

Л. В. КАНТОРОВИЧ и Г. П. АКИЛОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Леонид Витальевич Канторович
Глеб Павлович Акилов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Редактор *Б. М. Макаров*

Техн. редактор *Р. Г. Польская*

Корректор *Е. А. Максимова*

Сдано в набор 29/X 1958 г. Подписано к печати 16/IV 1959 г. Т-07314. Бумага 60×92¹/₁₆.
Физ. печ. 42,75. Условн. печ. 42,75. Уч.-изд. л. 42,10. Тираж 6000 экз. Цена 23 р. 05 к.
Заказ № 3620.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

*Посвящается памяти нашего дорогого учителя
Григория Михайловича Фихтенгольца.*

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	7

Часть I. Линейные операции и функционалы

Г л а в а I. Метрические пространства

§	1. Основные понятия	11
§	2. Полнота и сепарабельность	18
§	3. Компактность	26
§	4. Множества первой и второй категории	31
§	5. Топологические пространства	33

Г л а в а II. Нормированные пространства

§	1. Линейные множества	47
§	2. Основные определения и простейшие свойства нормированных пространств	52
§	3. Вспомогательные неравенства	62
§	4. Нормированные пространства последовательностей	67
§	5. Нормированные пространства измеримых функций	70
§	6. Другие нормированные пространства функций	74
§	7. Гильбертово пространство	78

Г л а в а III. Линейные операции и функционалы

§	1. Основные определения	96
§	2. Некоторые функционалы и операции в конкретных пространствах	99
§	3. Линейные функционалы и операции в гильбертовом пространстве	114

Г л а в а IV. Распространение линейных операций и функционалов

§	1. Распространение линейных операций	122
§	2. Теоремы о распространении функционалов и их применение	134

Г л а в а V. Пространства операций и функционалов

§	1. Пространство операций и сопряженное пространство	145
§	2. Кольцо операций	151
§	3. Метод последовательных приближений	160
§	4. Кольцо операторов в гильбертовом пространстве	172

Г л а в а VI. Аналитическое представление функционалов

§	1. Пространства последовательностей	184
§	2. Пространства L_p	189
§	3. Общая форма линейного функционала в пространстве C	197
§	4. Функционалы в одном классе пространств функций	212

Глава VII. Последовательности линейных операций

- § 1. Основные теоремы 229
- § 2. Некоторые приложения к теории функций 234

Глава VIII. Слабая сходимость функционалов и элементов

- § 1. Слабая сходимость функционалов 248
- § 2. Слабая сходимость элементов 253
- § 3. Универсальность пространства C 261

Глава IX. Вполне непрерывные и сопряженные операции

- § 1. Компактные множества в нормированных пространствах . . . 268
- § 2. Вполне непрерывные операции 276
- § 3. Сопряженные операции 279
- § 4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве 286
- § 5. Интегральное представление самосопряженного оператора . . 294

Глава X. Аналитическое представление некоторых классов линейных операций

- § 1. Операции в пространствах последовательностей 316
- § 2. Интегральные операции в пространствах функций 323
- § 3. Теоремы вложения Соболева 336

Глава XI. Линейные топологические пространства

- § 1. Общие определения 355
- § 2. Локально-выпуклые пространства 367
- § 3. Двойственность 377
- § 4. Второе сопряженное пространство. Рефлексивность 387
- § 5. Последовательности локально-выпуклых пространств 396

Часть II. Функциональные уравнения**Глава XII. Сопряженное уравнение**

- § 1. Теоремы об обратной операции 419
- § 2. Связь между данным и сопряженным уравнением 429

Глава XIII. Функциональные уравнения второго рода

- § 1. Уравнения с вполне непрерывным ядром 439
- § 2. О комплексных нормированных пространствах 448
- § 3. Спектр 453
- § 4. Резольвента 458
- § 5. Альтернатива Фредгольма 471
- § 6. Применение к интегральным уравнениям 479

Глава XIV. Общая теория приближенных методов

- § 1. Общая теория для уравнений второго рода 488
- § 2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода 504
- § 3. Применение к бесконечным системам уравнений 508
- § 4. Применение к интегральным уравнениям 511
- § 5. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям . 521
- § 6. Применение к граничным задачам для уравнений эллиптического типа 534

Глава XV. Метод наискорейшего спуска

- § 1. Решение линейных уравнений 541
- § 2. Нахождение собственных значений вполне непрерывных операторов 549
- § 3. Применение к эллиптическим дифференциальным уравнениям 554

Глава XVI. Принцип неподвижной точки

- § 1. Принцип Каччопполи — Банаха 563
- § 2. Вспомогательные предложения 567
- § 3. Принцип Шаудера 574
- § 4. Применения принципа неподвижной точки 579

Глава XVII. Дифференцирование нелинейных операций

- § 1. Первая производная 589
- § 2. Вторая производная и билинейные операции 598
- § 3. Примеры 605
- § 4. Теорема о неявной функции 613

Глава XVIII. Метод Ньютона

- § 1. Уравнения вида $P(x) = 0$ 622
- § 2. Следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона 636
- § 3. Применение метода Ньютона к конкретным функциональным уравнениям 645

Основная литература по функциональному анализу и основная вспомогательная литература 668

Использованная литература 671

Предметный указатель 681

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ — сравнительно недавно возникшая научная дисциплина. Как самостоятельная ветвь математического анализа он оформился лишь за последние двадцать-тридцать лет, что не помешало ему, однако, занять одно из центральных мест в современной математике.

Функциональный анализ — наиболее яркое проявление коренного поворота в математике, совершающегося в настоящее время и по своему принципиальному значению сравнимому с тем, который произошел в ней, когда в математику вошла переменная величина (XVII век), что привело к открытию дифференциального и интегрального исчисления.

Поворот этот прежде всего выразился в изменении подхода к исследованию различных проблем математического анализа. Рассмотрение отдельных функций и связывающих их соотношений и уравнений заменено совокупным исследованием этих объектов, т. е. изучением полей функций (функциональных пространств) и их преобразований (функциональных операций). Так, дифференциальный оператор или интегральное преобразование рассматриваются не в применении к отдельной функции, а к целому классу функций — изучается результат преобразования этого класса функций, непрерывность операции в том или ином смысле и т. п.

Важной особенностью функционального анализа является также общая абстрактная форма рассмотрения проблем анализа, позволяющая объединять и подвергать одновременному исследованию далекие на первый взгляд вопросы. Так, например, изучение функциональных уравнений $F(x) = y$, где x и y — объекты из более или менее произвольных областей, позволяет объединить рассмотрение таких различных проблем, как решение дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, граничных задач, бесконечных систем алгебраических уравнений или проблемы моментов. Переход от отдельных функций к полям, хотя он иногда формально даже трудно уловим, столь же принципиально важен, как в свое время переход от алгебраических уравнений и соотношений к переменным величинам и функциональной зависимости.

Эта новая точка зрения возникла не из простого стремления

к обобщению. Потребность перехода на новую ступень абстракции была вызвана естественно возникавшими в процессе развития анализа новыми задачами. Полнота системы функций, разрешимость граничных задач в определенном классе функций, одновременное рассмотрение целого класса задач, например при исследовании зависимости решения граничной задачи от правой части уравнения или граничных условий, представляют примеры такого рода вопросов. И именно для постановки и исследования таких задач методы функционального анализа оказались особенно плодотворными. При этом замечательно, что во многих случаях общность рассмотрения и позволяла обнаружить более общие и в то же время более конкретные и глубокие закономерности и связи, так как не имеющие значения детали каждой отдельной задачи отбрасываются и не заслоняют уже существа дела. Поэтому же становится яснее и родство различных по форме и происхождению вопросов.

Создание функционального анализа было подготовлено исследованиями в ряде областей классического математического анализа: вариационном исчислении, интегральных уравнениях, теории ортогональных функций, чебышёвской теории приближений, проблеме моментов, естественно требовавших применения нового метода. Отдельные вопросы функционального анализа и возникли в недрах этих областей, как, например, понятие функционала в вариационном исчислении. С другой стороны, развитие теоретико-множественных дисциплин: теории функций вещественной переменной, топологии, абстрактной алгебры, — подготовило аппарат для систематического проведения нового направления в абстрактной форме. В частности, весьма существенное значение для функционального анализа имела теория абстрактных пространств.

Моментом начала самостоятельного существования функционального анализа можно считать систематическое построение теории операторов в бесконечно-мерных унитарных пространствах (Д. Гильберт и др.) и развитие общей теории линейных нормированных пространств (1918—1923) в работах венгерского математика Ф. Рисса и, в особенности, польского математика С. Банаха.

Интерес к функциональному анализу еще более возрос, когда выяснилось, что его аппарат (теория операторов в гильбертовом пространстве) находит существенное применение в квантовой механике. За последние двадцать лет, в особенности в работах советских математиков, были созданы новые направления в функциональном анализе; методы его и результаты получили важнейшее применение в теоретической физике, математической физике, прикладном анализе и в других областях математики.

Функциональный анализ еще не откристаллизовался вполне как единая дисциплина, скорее это пучок ряда направлений, объединенных больше общностью метода, нежели содержанием. Основные направления функционального анализа это:

1. Гильбертово пространство и спектральная теория операторов в нем.

2. Теория нормированных пространств Банаха.

3. Теория нормированных колец и теория представлений, при-
мыкающая к теории топологических групп.

4. Теория полуупорядоченных пространств.

5. Теория линейных топологических пространств, получившая
особое значение в связи с теорией обобщенных функций.

Предлагаемая книга не ставит своей задачей охватить все на-
правления развития функционального анализа и области его приме-
нения. Она посвящена, в основном, теории нормированных про-
странств, охватывая важнейшие факты этой теории, основы которой
были даны Ф. Риссом и С. Банахом, с учетом некоторых последую-
щих работ. В книге рассмотрены теория нормированных пространств,
теория операций и теория функциональных уравнений. Наряду с ли-
нейными операциями и уравнениями значительное место занимают
нелинейные операции и уравнения. Помимо общей теории, большое
внимание в книге уделено конкретным функциональным пространствам
и операциям. В частности, специально рассматриваются введенные
С. Л. Соболевым пространства дифференцируемых функций многих
переменных. Эти вопросы связываются с общим изучением интеграль-
ных операций.

Гильбертово пространство и теория операторов в нем рассматри-
вается как часть теории банаховых пространств. В связи с этим
в книге нашли место лишь немногие вопросы, относящиеся к этой
области (спектральное представление ограниченных операторов), так
что книга обеспечивает ознакомление только с самыми элементами
этой теории. Более глубокие ее факты и дальнейшие применения
читатель может найти в многих имеющихся книгах, посвященных спе-
циально теории операторов в гильбертовом пространстве.

Из других упоминавшихся выше направлений функционального
анализа в книге получила отражение только теория линейных топо-
логических пространств, которой посвящена глава XI. Эта ветвь
функционального анализа, имеющая большое применение в теории
обобщенных функций и теории функций комплексного переменного,
практически не имеет литературы на русском языке. Кроме того,
некоторые факты функционального анализа в нормированных про-
странствах (такие, например, как рефлексивность), хотя и могут
быть изложены в рамках нормированных пространств, становятся
до конца понятными и естественными лишь с точки зрения теории
линейных топологических пространств. Этими соображениями и руко-
водствовались авторы, уделяя место указанной теории.

Из приложений функционального анализа наибольшее внимание
уделено применению его в прикладном анализе для построения и
исследования приближенных методов (глава XIV). Рассмотрены также
применения к некоторым вопросам конструктивной теории функций,

дифференциальным и интегральным уравнениям математической физики и т. п. В этих приложениях мы ограничивались, как правило, простейшими постановками вопросов, считая, что и они достаточно отчетливо иллюстрируют основные принципы применения функционального анализа и что со специальными вопросами читатель, интересующийся определенным кругом приложений, сможет ознакомиться по журнальной литературе.

Журнальная и монографическая литература по затронутым в книге вопросам дана в виде перечня в конце книги. Кроме того, в тексте имеются отдельные литературные указания.

Более специальные и тонкие вопросы теории и применений выделены мелким шрифтом и могут быть опущены при первом чтении.

В основу данной книги положен курс лекций, читаемых в Ленинградском университете для студентов, специализирующихся по математическому анализу и по вычислительной математике. Предполагается, что читатель знаком с элементами теории функций вещественной переменной примерно в объеме общего университетского курса.

Книга состоит из восемнадцати глав, разделенных на параграфы, которые, в свою очередь, делятся на пункты, занумерованные двойным индексом; первая часть дает номер параграфа, в котором содержится данный пункт, вторая — порядковый номер пункта в данном параграфе. При ссылках указывается, кроме индексов пункта, еще и номер главы, в которой этот пункт находится. Так, например, XI.4.2 означает ссылку на второй пункт четвертого параграфа одиннадцатой главы. При ссылках внутри параграфа номер главы опускается. Для теорем принята сквозная нумерация внутри каждого параграфа. Чтобы облегчить разыскание нужной теоремы, рядом с номером теоремы в скобках указаны номера параграфа и главы. Например, теорема 2 (3.XIV) означает вторую теорему третьего параграфа главы XIV. При ссылке внутри параграфа номера главы и параграфа не указываются.

При подготовке рукописи к печати большую работу проделал редактор книги Б. М. Макаров, за что авторы искренне благодарят его. Они также признательны А. Н. Балуюеву, А. М. Вершику, М. К. Гавурину, И. К. Дауговету, В. П. Ильину, Б. А. Самокишу, В. Н. Судакову, Л. В. Флоринской и В. П. Хавину, принявшим участие в чтении корректур.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЫ

ГЛАВА I

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Метрические пространства и связанные с ними понятия, о которых пойдет речь в настоящей главе, введены Фреше в [109а].*) Более подробные литературные указания даны непосредственно в тексте.

§ 1. Основные понятия

1.1. При исследовании множества вещественных чисел, или, что то же самое, множества точек на числовой прямой, большую роль играет понятие «расстояния» между двумя точками $\rho(x, y) = |x - y|$. В частности, в формулировке такого основного понятия анализа, как сходимости, а также других связанных с ним понятий по существу используется только расстояние и его свойства. Конкретный характер вещественных чисел при рассмотрении числовой прямой выступает только в определении расстояния и в выводе простейших его свойств. Как только это сделано, все остальные предложения можно получить уже без привлечения каких-либо соображений, относящихся к конкретной природе чисел. Именно поэтому определение этих понятий почти без изменений переносится на случай плоскости или трехмерного пространства, требуется только заменить величину $|x - y|$ расстоянием между точками на плоскости или, соответственно, в пространстве.

В связи с этим представляется целесообразным исследование множества произвольной природы, в котором каким-либо образом определено «расстояние» между двумя элементами, обладающее важнейшими свойствами, присущими расстоянию в множестве вещественных чисел.

Таким образом, мы приходим к основному определению: множество X элементов произвольной природы называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $x, y \in X$

*) Цифры в квадратных скобках означают порядковый номер в списке использованной литературы, помещенном в конце книги на стр. 670.

соотнесено вещественное число $\rho(x, y)$ — *расстояние* между элементами x и y , — удовлетворяющее условиям:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, x) = 0$ и, если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника),

Эти условия называются *аксиомами* метрического пространства.

Элементы множества X называются также *точками* данного метрического пространства.

Если введением расстояния множество X превращено в метрическое пространство, то говорят, что в множестве X введена *метрика*, или также, что множество X *метризовано*.

Простыми примерами метрических пространств могут служить: прямая, плоскость, n -мерное евклидово пространство R^n , отрезок прямой, кусок поверхности, если расстояние между точками измерять, например, по кратчайшему пути на поверхности (по геодезической).

1.2. Наличие расстояния позволяет естественным образом ввести в метрическом пространстве предельные соотношения, понятие сходимости и другие, с ним связанные.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X *сходится* (к точке x_0 того же пространства), если $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$. В этом случае пишут $x_n \rightarrow x_0$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Отметим два простых, но важных предложения:

а) $\rho(x, y)$ есть непрерывная функция своих аргументов, т. е. если $x_n \rightarrow x_0$ и $y_n \rightarrow y_0$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$;

б) сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ может иметь только один предел, т. е. из $x_n \rightarrow x_0$ и $x_n \rightarrow x'_0$ вытекает $x_0 = x'_0$.

Доказательство. а) Из неравенства треугольника без труда получаем соотношение

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leq \rho(y, y') + \rho(x, x').$$

Меняя x, y и x', y' ролями, приходим к неравенству противоположного знака, отсюда

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y'). \quad (1)$$

Воспользовавшись этим, можем написать:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \rightarrow 0.$$

б) Из а) получаем

$$0 = \rho(x_n, x_n) \rightarrow \rho(x_0, x'_0).$$

Следовательно, $\rho(x_0, x'_0) = 0$ и по первой аксиоме $x_0 = x'_0$.

Все упомянутые выше примеры метрических пространств были близки к обычному евклидову, и расстояние в них определяется гео-

метрически. Весьма большую роль играют, однако, метрические пространства, элементы которых имеют совсем другую природу. Рассмотрим некоторые важные для дальнейшего примеры таких метрических пространств и выясним, какой смысл имеют в них введенные понятия.

1.3. Пространство C , элементами (точками) которого являются произвольные непрерывные в промежутке $[a, b]$ функции. Расстояние между точками x и y определяется следующим образом:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

(проверка условий 1) — 3) не представляет труда, поэтому мы ее опускаем).

Расстояние, таким образом, есть максимальное расстояние между кривыми (см. рис. 1).

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ точек пространства C к точке x_0 означает равномерную сходимость последовательности функций $x_n(t)$ к функции $x_0(t)$.

В самом деле, если по произвольному $\varepsilon > 0$ выбрано N_ε так, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ при $n \geq N_\varepsilon$, то это значит, что для тех же n :

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

так что для всех $t \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon),$$

откуда и следует доказываемая равномерная сходимость.

Очевидно и обратное: из равномерной сходимости последовательности непрерывных функций к непрерывной функции следует сходимость соответствующих элементов в пространстве C .

Замечание. В качестве области определения функций, образующих пространство C , можно рассматривать не только промежутки $[a, b]$, но и любое замкнутое ограниченное множество T , лежащее в произвольном евклидовом пространстве. В этом случае мы будем использовать обозначение C_T . Все сказанное выше по поводу пространства C без каких-либо изменений переносится и на пространство C_T .

Укажем еще на пространство $C^{(n)}$, элементы которого — функции, определенные в промежутке $[a, b]$ и имеющие в этом промежутке непрерывные производные до n -й включительно. Расстояние между $x, y \in C^{(n)}$ можно определить так:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)| \quad (x^{(0)}(t) = x(t), y^{(0)}(t) = y(t)).$$

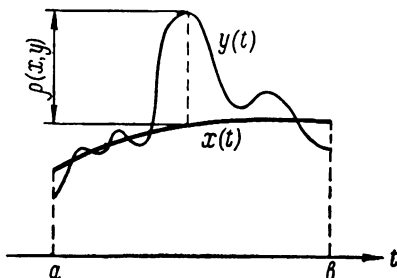


Рис. 1

Сходимость в $C^{(n)}$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательности k -х производных ($k = 1, 2, \dots, n$).

Можно рассматривать и пространство $C_T^{(n)}$, состоящее из функций, непрерывных вместе со всеми своими частными производными до n -го порядка в области T многомерного пространства.

1.4. Пространство S , состоящее из всех конечных измеримых на $[a, b]$ функций (функции, различающиеся только на множестве меры нуль, считаются за один элемент этого пространства). *)

Метрика в S вводится формулой

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

(Интеграл здесь имеет смысл, так как под знаком интеграла стоит измеримая и ограниченная функция).

Проверим выполнение аксиом метрического пространства.

1) Так как подынтегральная функция неотрицательна, то $\rho(x, y) \geq 0$. Ясно также, что $\rho(x, x) = 0$.

Пусть $\rho(x, y) = 0$. Тогда почти везде $\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} = 0$, что возможно только в случае, если почти везде $x(t) = y(t)$.

Выполнение условия 2) очевидно.

3) Функция $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$, возрастающая при $\lambda \geq 0$. Поэтому имеет место числовое неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} &\leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \\ &= \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha| + |\beta|} + \frac{|\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \quad (2) \end{aligned}$$

и, следовательно, если $x, y, z \in S$,

$$\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \leq \frac{|x(t) - z(t)|}{1 + |x(t) - z(t)|} + \frac{|y(t) - z(t)|}{1 + |y(t) - z(t)|} \quad (a \leq t \leq b).$$

Остается проинтегрировать это неравенство, чтобы получить, что

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

*) Точнее говоря, рассматриваются функции, почти везде определенные и почти везде конечные на $[a, b]$. При этом две функции, значения которых совпадают на множестве с мерой $b - a$, принимаются за один элемент пространства S . Или еще правильнее сказать, что элементами пространства S являются не индивидуальные измеримые функции, а классы эквивалентных между собой измеримых функций.

Отметим, что понятия близости в пространствах $\mathbf{S}$ и $\mathbf{C}$ существенно различны. Например, две функции, изображенные на рис. 1, близки как элементы $\mathbf{S}$, между тем расстояние между ними в пространстве $\mathbf{C}$ велико.

Сходимость в $\mathbf{S}$ означает сходимость по мере. Действительно, обозначая через $e_n(\sigma)$ множество тех точек промежутка $[a, b]$, в которых $|x_n(t) - x_0(t)| \geq \sigma$, и пользуясь тем, что $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ — возрастающая функция, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_0) &= \int_a^b \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \geq \\ &\geq \int_{e_n(\sigma)} \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt \geq \frac{\sigma}{1 + \sigma} \text{mes } e_n(\sigma), \end{aligned}$$

так что, если $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, то $\text{mes } e_n(\sigma) \rightarrow 0$. А это и значит, что последовательность функций $x_n(t)$ сходится по мере к функции $x_0(t)$.

Наоборот, если $x_n(t) \rightarrow x_0(t)$ (по мере), то, очевидно,

$$\frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} \rightarrow 0 \quad (\text{по мере}).$$

Поэтому, совершая в выражении

$$\rho(x_n, x_0) = \int_a^b \frac{|x_n(t) - x_0(t)|}{1 + |x_n(t) - x_0(t)|} dt$$

предельный переход под знаком интеграла, что допустимо, так как подынтегральные функции ограничены все одним и тем же числом (единицей), *) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Вместо промежутка $[a, b]$ можно было бы рассматривать произвольное измеримое множество T конечной меры.

1.5. Сходными с пространством $\mathbf{S}$ свойствами обладает пространство $\mathbf{s}$, элементами которого являются всевозможные числовые последовательности. Если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots)$

*) И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, изд. 2., переработанное. Гостехиздат, 1957, стр. 139. См. указатель «Основная литература по функциональному анализу и важнейшая вспомогательная литература» в конце книги на стр. 668. В дальнейшем при ссылках на этот указатель будет указываться лишь фамилия автора.

два элемента этого пространства, то расстояние между ними определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Так как k -ый член ряда в правой части не превосходит $\frac{1}{2^k}$, то ряд сходится.

Проверка условий 1) — 3) здесь не представляет труда [при проверке условия 3) надо использовать неравенство (2)].

Если последовательность $\{x_n\}$ ($x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$, $n = 1, 2, \dots$) сходится к элементу $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$, то это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

т. е. сходимость последовательности точек в $\mathbf{s}$ есть покоординатная сходимость — сходимость каждой координаты точки x_n к соответствующей координате предельной точки x_0 .

В самом деле, из неравенства

$$\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} \leq \rho(x_n, x_0) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

в случае если $x_n \rightarrow x_0$, получаем $\xi_k^{(n)} \rightarrow \xi_k^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Напротив, если выполнено условие (3), то так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} = \rho(x_n, x_0)$$

сходится равномерно относительно n (он мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$),

допустим почленный предельный переход, и поскольку каждый член ряда стремится к нулю, то $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$.

Пространство $\mathbf{s}$, так же как и $\mathbf{S}$, ограничено в том смысле, что ограничены расстояния между любыми двумя точками этих пространств.

1.6. Приведем определения некоторых понятий, относящихся к метрическому пространству. Все они знакомы читателю для случая евклидова пространства, поэтому мы не останавливаемся на них подробно.

а) *Открытой сферой* в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ называется множество $K_\epsilon(x_0)$ точек $x \in \mathbf{X}$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < \epsilon. \quad (5)$$

Точка $x_0 \in X$ называется *центром* сферы, а число $\varepsilon > 0$ — ее *радиусом*. Если в (5) допускается знак равенства, то говорят о *замкнутой сфере* $\bar{K}_\varepsilon(x_0)$. *)

б) *Сферической окрестностью* точки $x_0 \in X$ называется любая открытая сфера с центром в точке x_0 . *Окрестностью* точки x_0 называют любое множество, содержащее некоторую сферическую окрестность точки x_0 .

с) Множество $G \subset X$ называется *открытым*, если каждая его точка *внутренняя*, т. е. содержится в G вместе с некоторой окрестностью, иначе говоря, если для любой точки $x_0 \in G$ при некотором $\varepsilon > 0$ будет $K_\varepsilon(x_0) \subset G$.

д) Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $E \subset X$, если существует последовательность $\{x_n\}$ ($x_n \in E$, $x_n \neq x_0$; $n = 1, 2, \dots$), сходящаяся к x_0 .

е) Множество $\bar{E}$, получающееся присоединением к E всех его предельных точек, называется *замыканием* множества E .

ф) Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если $\bar{F} = F$, т. е. если каждая предельная точка множества F содержится в F .

Буквально так же, как для евклидова пространства доказываются следующие предложения:

а) для того чтобы точка x_0 принадлежала замыканию $\bar{E}$ множества E (соответственно была предельной для E), необходимо и достаточно, чтобы в каждой окрестности точки x_0 содержались точки множества E (соответственно отличные от x_0);

б) замыкание $\bar{E}$ множества E есть наименьшее замкнутое множество, содержащее E , т. е. если замкнутое множество $F \supset E$, то $F \supset \bar{E}$;

с) дополнение замкнутого множества открыто, и, наоборот, дополнение открытого множества замкнуто;

д) сумма конечного числа и пересечение любого множества замкнутых множеств есть замкнутое множество;

е) пересечение конечного числа и сумма любого множества открытых множеств есть открытое множество.

Очевидно, что все пространство X и пустое множество Λ суть одновременно и замкнутые и открытые множества.

Ниже нам понадобится понятие расстояния от точки $x_0 \in X$ до множества $E \subset X$. Как и в евклидовом пространстве, мы понимаем под этим величину

$$\rho(x_0, E) = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x).$$

Нетрудно видеть, что $\rho(x_0, E) = 0$ равносильно тому, что $x_0 \in \bar{E}$.

*) Мы будем употреблять иногда лишь одно слово «сфера», если из контекста ясно, о какой сфере — открытой или замкнутой — идет речь.

1.7. Пусть X_0 множество в метрическом пространстве X . Поскольку расстояние определено для каждой пары элементов множества X , оно тем самым определено и в X_0 . Ясно, что при этом выполнены аксиомы 1) — 3) метрического пространства, так что X_0 естественным образом оказывается метрическим пространством. Говорят, что метрика в X_0 *индуцирована* метрикой пространства X , или, что *пространство X_0 содержится в пространстве X* . Если X_0 , кроме того, замкнутое множество, то оно называется *подпространством* метрического пространства X .

Допустим, что между элементами двух метрических пространств X и Y можно установить взаимно-однозначное соответствие так, что расстояние между соответствующими парами элементов пространств X и Y равны. Такие пространства называются *изометричными*. Ясно, что все метрические соотношения в одном из изометричных пространств имеют место также и в другом, поэтому различие между такими пространствами является различием лишь в конкретной природе элементов и не затрагивает существенных, т. е. связанных с расстоянием свойств пространства. Это обстоятельство дает основания для отождествления изометричных пространств.

§ 2. Полнота и сепарабельность

Из аксиом метрического пространства вытекает и ряд других свойств расстояния и предела, аналогичных хорошо известным свойствам вещественных чисел; например, если $x_n^{(k)} \rightarrow x_n$, $x_n \rightarrow x_0$, то имеется последовательность $x_n^{(k_n)} \rightarrow x_0$. Однако некоторые важные предложения о пределе, имеющие место для множества вещественных чисел, не могут быть выведены из аксиом метрического пространства и не выполняются, вообще говоря, в произвольном метрическом пространстве. Поэтому естественно выделить из совокупности всех метрических пространств некоторые классы пространств, метрика в которых удовлетворяет тем или иным дополнительным условиям, обобщающим другие существенные свойства расстояния и сходимости в пространстве вещественных чисел.

2.1. Важнейшим из таких свойств является полнота. Для вещественных чисел принцип полноты может быть высказан в различных формах (принцип Дедекинда, наличие точной границы у ограниченного множества и др.), однако только в одной из них — в признаке сходимости Коши — не используется при формулировке иных понятий кроме метрических. Наличие обобщенного признака Коши мы и примем в качестве определения полноты произвольного метрического пространства. Именно, дадим следующее определение.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется *сходящейся в себе*, если $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$), т. е. если $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geq N_\varepsilon$.

Метрическое пространство X называется *полным*, если каждая сходящаяся в себе последовательность $\{x_n\}$ сходится, т. е. существует такая точка $x_0 \in X$, что $x_n \rightarrow x_0$.

Очевидно, в любом метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность сходится и в себе. Таким образом, в полном пространстве имеет место признак сходимости Коши: *для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе.*

При переходе от пространства X к его подпространству X_0 свойство полноты сохраняется.

В самом деле, если $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность точек из X_0 , то в силу полноты пространства X существует $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$. По замкнутости множества X_0 должно быть $x_0 \in X_0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в X_0 .

Нетрудно видеть, что если отбросить требование замкнутости множества X_0 , т. е. если под X_0 понимать произвольное метрическое пространство, содержащееся в пространстве X , то приведенное утверждение уже не будет верно. Достаточно взять, например, за X пространство всех вещественных чисел, а за X_0 содержащееся в нем пространство рациональных чисел.

Именно это обстоятельство явилось причиной того, что при определении подпространства (1.1.7) было выдвинуто требование замкнутости.

2.2. Все конкретные метрические пространства, введенные в § 1 (см. 1.1.3—1.1.5), полны. Проверим это.

1) Пространство C . Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов из C . Если $\varepsilon > 0$, то для достаточно больших m и n ($m, n \geq N_\varepsilon$)

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, при любом $t \in [a, b]$ будет

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Фиксируя здесь $t \in [a, b]$, мы видим, что числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в себе, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$,

который мы обозначим через $x_0(t)$. Остается доказать еще, что x_0 принадлежит C и сходимости x_n к x_0 имеет место в смысле метрики этого пространства. Переходя к пределу в неравенстве (1) при $m \rightarrow \infty$, получим

$$|x_0(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Откуда ясно, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции $x_0(t)$ равномерно, что влечет непрерывность функции $x_0(t)$ и сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 в пространстве C .

Доказательство полноты пространства S_T не отличается от приведенного выше.

Аналогично можно проверить полноту пространства $S^{(n)}$.

2) Пространство S . Возьмем сходящуюся в себе последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства S .

Пусть n_k таково, что при $n \geq n_k$ будет $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и, следовательно, $n_k \rightarrow \infty$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|} dt$$

очевидно сходится. Но если сходится ряд интегралов от положительных функций, то сходится почти везде ряд из самих функций, *) т. е. почти везде сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t).$$

Если при некотором t указанный ряд сходится, то при достаточно больших k будет $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leq 1$. Следовательно, для этих k справедливо неравенство $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leq 2\alpha_k(t)$. Таким образом, сходится почти везде ряд $x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$.

Обозначим его сумму через $x_0(t)$. Это измеримая функция. Так как в силу сходимости ряда почти везде $x_{n_k}(t) \rightarrow x_0(t)$, то тем более имеет место сходимость по мере, что и означает сходимость в пространстве S , и поэтому $\rho(x_{n_k}, x_0) \rightarrow 0$.

Мы получили сходимость частичной последовательности. Но так как при $k \rightarrow \infty$ и $n_k \rightarrow \infty$, то из неравенства $\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$ следует, что $\rho(x_k, x_0) \rightarrow 0$, т. е. $x_k \rightarrow x_0$ (в S). **)

Приведенное доказательство без каких-либо изменений распространяется и на пространство S_T измеримых функций, определенных на произвольном измеримом множестве T конечной меры.

3) Полнота пространства s устанавливается совсем просто. Если $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$ — сходящаяся в себе последовательность, то, используя неравенство типа (4) § 1, легко убедиться, что каждая из числовых последовательностей $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots$ также

*) Натансон-II, стр. 157.

**) Полнота пространства S , как полнота сходимости по мере, доказана Ф. Риссом. См. Натансон-II, стр. 124.

сходится в себе, а потому существует предел $\xi_k^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} (k=1, 2, \dots)$.

Полагая $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$, мы видим, что $x_n \rightarrow x_0$ в $\mathfrak{s}$ (так как сходимость в $\mathfrak{s}$ по-координатная).

2.3. Подобно тому, как множество рациональных чисел включается в множество вещественных чисел, так и произвольное метрическое пространство может быть включено в полное метрическое пространство.

Наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное пространство X , называется *пополнением* пространства X . (Термин «наименьшее» понимается в том смысле, что пополнение содержится во всяком другом полном пространстве, содержащем X . При этом, как указывалось в 1.1.7, изометричные пространства отождествляются.)

Теорема 1 (2.1). *Всякое метрическое пространство имеет пополнение.*

Доказательство. *) Пусть X некоторое метрическое пространство. Назовем сходящиеся в себе последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ эквивалентными, если $\rho(x_n, x'_n) \rightarrow 0$. Ясно, что если одна из эквивалентных последовательностей сходится, то сходится и другая и к той же самой точке. Действительно, если, например, $x_n \rightarrow x$, то

$$\rho(x'_n, x) \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(x_n, x) \rightarrow 0,$$

и потому $x'_n \rightarrow x$.

Разобьем множество всех сходящихся в себе последовательностей на классы, относя в один класс все эквивалентные между собой последовательности. Обозначим через $\mathfrak{E}$ множество всех таких классов. Очевидно, две последовательности, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой, следовательно, одна и та же последовательность не может принадлежать двум разным классам.

Пусть ξ и η — некоторые классы из $\mathfrak{E}$. Выберем в классе ξ произвольным образом последовательность $\{x_n\}$, а в классе η — последовательность $\{y_n\}$. С помощью неравенства (1) § 1 получаем

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n).$$

И так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся в себе, то правая часть стремится к нулю, и числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ сходится. Положим

$$\rho(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

*) См. Хаусдорф. Доказательство по существу следует процессу Кантора — Мерэ введения вещественных чисел.

$\rho(\xi, \eta)$ определяется классами ξ и η однозначно. В самом деле, если последовательность $\{x'_n\}$ эквивалентна последовательности $\{x_n\}$, а $\{y'_n\} - \{y_n\}$, то, переходя к пределу в неравенстве

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n),$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Проверим теперь, что $\rho(\xi, \eta)$ удовлетворяет аксиомам 1) — 3) метрического пространства.

При проверке условия 1) нужно доказать только, что из $\rho(\xi, \eta) = 0$ следует $\xi = \eta$. Сохранив прежние обозначения, мы видим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

т. е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, а тогда классы ξ и η совпадают.

Условие 2) очевидно.

Условие 3) получается предельным переходом из неравенства

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Здесь $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ — последовательности, принадлежащие соответственно классам ξ , η , ζ .

Таким образом, множество Ξ классов эквивалентных последовательностей представляет собой метрическое пространство.

Покажем, что первоначальное пространство X можно рассматривать как подмножество Ξ .

Для произвольного $x \in X$ обозначим через $\xi_x \in \Xi$ класс последовательностей, содержащий последовательность $(x, x, \dots, x, \dots)$, иначе говоря, класс сходящихся к x последовательностей. Очевидно, равенство $\xi_x = \xi_y$ равносильно $x = y$. Далее, $\rho(\xi_x, \xi_y) = \rho(x, y)$, в чем проще всего убедиться, беря последовательности $(x, x, \dots, x, \dots)$ и $(y, y, \dots, y, \dots)$ в качестве определяющих классы ξ_x и ξ_y .

Ввиду сказанного ясно, что, отождествляя элемент $x \in X$ с классом $\xi_x \in \Xi$, мы изометрично погрузим X в метрическое пространство Ξ .

Таким образом, впредь X можно рассматривать как подмножество пространства Ξ , а для элементов ξ_x пользоваться старым обозначением x . Отметим еще следующий факт. Пусть $\{x_n\}$ — определяющая последовательность для класса ξ . Тогда имеем $\xi_{x_n} = x_n \rightarrow \xi$ (в Ξ).

Действительно, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \geq N_\varepsilon$, но тогда $\rho(x_n, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ при $n \geq N_\varepsilon$, откуда ясно, что $x_n \rightarrow \xi$ (в Ξ).

Благодаря доказанному для любого $\xi \in \Xi$ можно найти такое $x \in X$, что $\rho(x, \xi) < \varepsilon$ (в качестве x можно взять любое x_n при $n \geq N_\varepsilon$).

Докажем теперь полноту пространства E . Пусть $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$ — последовательность классов, сходящаяся в себе. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Согласно доказанному выше для каждого n найдется $x^{(n)} \in X$ так, что $\rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) < \varepsilon_n$. Из неравенства

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) \leq \rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \rho(\xi^{(m)}, x^{(m)}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)})$$

ясно, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ сходится в себе. Она, следовательно, определяет некоторый класс ξ так, что $\rho(x^{(n)}, \xi) \rightarrow 0$. Но

$$\rho(\xi^{(n)}, \xi) \leq \rho(\xi^{(n)}, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, \xi) < \varepsilon_n + \rho(x^{(n)}, \xi).$$

Отсюда $\xi^{(n)} \rightarrow \xi$ в E , что и устанавливает полноту пространства E .

Если H — другое полное пространство, содержащее X , то, отождествляя те элементы пространства H , которые являются пределами сходящихся в себе последовательностей точек из X , с классами эквивалентных последовательностей, получим, в силу полноты H , что $E \subset H$.

Пополнение пространства X построено.

2.4. Другим важным свойством множества вещественных чисел является наличие счетного подмножества, например множества рациональных чисел, «плотно» распределенного в нем и представляющего счетный скелет, определяющий все пространство. В соответствии с этим дадим следующее определение.

Множество D метрического пространства X называется *плотным в множестве* $X_0 \subset X$, если для каждого $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$ в D найдется такая точка z , что $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Очевидно, если множество D_0 плотно в D , а D в свою очередь плотно в X_0 , то и D_0 плотно в X_0 .

Пусть D плотно в $X_0 \subset X$ и $x \in X_0$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ($\varepsilon_k > 0$). Для каждого $k = 1, 2, \dots$ в D найдется точка z_k такая, что $\rho(x, z_k) < \varepsilon_k$ и, следовательно, $z_k \rightarrow x$. Итак, из множества D можно извлечь последовательность, сходящуюся к любому наперед заданному элементу $x \in X_0$, т. е. всякий элемент $x \in X_0$ представим в виде:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \quad (z_n \in D).$$

Обратно, если D обладает этим свойством, то оно, очевидно, плотно в X_0 . Принимая это во внимание, можно утверждать, что D тогда и только тогда плотно в X_0 , когда замыкание $\bar{D}$ множества D содержит X_0 : $\bar{D} \supset X_0$. В частности, если $X_0 = X$, то $\bar{D} = X$ — множество D плотно в пространстве, если его замыкание есть все пространство.

Нетрудно видеть, что всякое пространство X представляет собой множество, плотное в своем пополнении.

Действительно, если $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — последовательность, принадлежащая классу $\xi \in \Xi$, то, как было показано при доказательстве теоремы 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, откуда и следует наше утверждение.

Метрическое пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное плотное подмножество.

Если метрическое пространство X_0 содержится в сепарабельном метрическом пространстве X , то X_0 также сепарабельно.

Пусть X_0 — подмножество пространства X , и $D = \{x_k\}$ — счетное плотное в X множество. Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($\varepsilon_n > 0$) и для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдем в X_0 элемент z_{kn} так, что

$$\rho(x_k, z_{kn}) < \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n.$$

Пусть $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$; найдется элемент $x_k \in D$ такой, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$; беря n настолько большим, чтобы было $\varepsilon_n < \varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \rho(x, z_{kn}) &\leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, z_{kn}) < \varepsilon + \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n \leq \varepsilon + \\ &+ \rho(x_k, x) + \varepsilon_n < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда и следует плотность множества $D_0 = \{z_{kn}\}$ в X_0 .

2.5. Пространства R^n , C , $C^{(n)}$, S , s , сепарабельны.

Для R^n это утверждение очевидно. В качестве счетного плотного множества можно взять, например, множество точек с рациональными координатами.

Что касается C , то в качестве счетного плотного в нем множества можно взять множество всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами.

В самом деле, по известной теореме Вейерштрасса всякую непрерывную функцию можно равномерно (т. е. по расстоянию в C) аппроксимировать многочленом с любой наперед заданной точностью. Ясно, далее, что за счет сколь угодно малого изменения многочлена можно добиться рациональности его коэффициентов. Таким образом, для всякой непрерывной функции $x(t)$ найдется многочлен с рациональными коэффициентами, сколь угодно близкий к $x(t)$ в метрике C .

В пространстве C в качестве счетного плотного множества можно взять также совокупность всех кусочно-линейных функций, графики которых представляют собой ломаные с вершинами в рациональных точках.

Доказательство сепарабельности пространства $C^{(n)}$ предоставляем читателю.

Указанные выше множества оказываются плотными и в пространстве S . Для множества многочленов это доказывается с помощью

теоремы Фреше, согласно которой всякая измеримая почти везде конечная функция есть предел сходящейся по мере последовательности многочленов.

Счетным плотным в пространстве s множеством является, например, множество r_0 , элементы которого суть все последовательности рациональных чисел, с конечным числом членов, отличных от нуля. Действительно, заменяя в последовательности $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}, \xi_n \dots)$, определяющей элемент x из s , все члены, начиная с $n+1$ -го, нулями, получим последовательность $(\xi_1 \dots \xi_{n-1}, \xi_n, 0, \dots) = [x]_n$, отстоящую как элемент пространства s , от предыдущей меньше, чем на $\frac{1}{2^n}$.

Поскольку сходимость в s по-координатная, к полученной последовательности — элементу из s — можно, очевидно, сколь угодно близко приблизиться последовательностью элементов r_0 .

2.6. Не всякое метрическое пространство сепарабельно. Чтобы построить пример не сепарабельного пространства, рассмотрим произвольное бесконечное множество T и множество M_T всех заданных на T вещественных ограниченных функций. Если для $x, y \in M_T$ положить

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|,$$

то M_T обращается в полное метрическое пространство, сходимость в котором означает равномерную сходимость соответствующей последовательности функций.

Эти утверждения проверяются так же, как для пространства C . Докажем, что пространство M_T не сепарабельное.

Рассмотрим множество $M_0 \subset M_T$ всех характеристических функций, т. е. функций, принимающих только два значения — нуль и единица. Это множество несчетное. *) Пусть D — плотное в M_T множество. Каждому $x \in M_0$ отнесем один из таких $z \in D$, что

$$\rho(x, z) < \frac{1}{2},$$

При этом различным элементам x и x' из M_0 соответствуют различные же элементы z и z' из D , так как если бы оказалось

$$\rho(x, z) < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \rho(x', z) < \frac{1}{2},$$

то было бы

$$\rho(x, x') \leq \rho(x, z) + \rho(x', z) < 1,$$

в то время как должно быть

$$\rho(x, x') = 1.$$

*) Натансон-II, стр. 31.

Таким образом, несчетное множество M_0 поставлено во взаимно-однозначное соответствие с частью множества D . Следовательно, D несчетное.

§ 3. Компактность

3.1. Очень важным свойством ограниченного множества в пространстве вещественных чисел является то, что из всякой последовательности точек такого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Это свойство не сохраняется для ограниченных (т. е. содержащихся в некоторой сфере) множеств в произвольных метрических пространствах; чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что пространство S представляет ограниченное множество.

Из сказанного выясняется важность следующего определения. Множество E метрического пространства X называется *компактным в пространстве X* , если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества E можно выделить сходящуюся в пространстве X подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пространство X называется *компактным*, если оно представляет компактное в самом себе множество.

Таким образом, множество компактно, если для него имеет место теорема Больцано—Вейерштрасса. В частности, компактны ограниченные множества в евклидовом пространстве, хотя само евклидово пространство в целом, очевидно, некомпактно.

Свойство компактности множества не зависит от того, в каком полном пространстве рассматривается это множество. Точнее, если множество $E \subset X_0 \subset X$, где X_0 есть подпространство пространства X , то E одновременно компактно или нет и в X_0 и в X .

Далее, всякое множество компактного пространства компактно, и, следовательно, подпространство компактного пространства само является компактным пространством.

Требование компактности пространства является весьма сильным и выделяет сравнительно узкий класс пространств, в частности, более узкий, чем оба определенных выше класса (полные и сепарабельные пространства). Имеет место

Теорема 1 (3.1). *Компактное пространство полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность компактного пространства X . Согласно определению из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$: $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Для произвольного k имеем

$$\rho(x_k, x_0) \leq \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0).$$

Оба слагаемых в правой части стремятся к нулю (первое — в силу сходимости в себе последовательности), а потому $\rho(x_k, x_0) \rightarrow 0$, т. е. x_0 является пределом всей последовательности $\{x_k\}$, и полнота пространства X доказана.

3.2. Данное выше определение не дает эффективного критерия компактности множества. Чтобы сформулировать удобный признак компактности, нам понадобится следующее принадлежащее Хаусдорфу определение. *)

Пусть $\varepsilon > 0$ — данное положительное число, а M — множество метрического пространства X . Множество M называется ε -сетью для множества E , если для каждой точки $x \in E$ в M найдется такая точка z , что $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Теорема 2(3.1) (Хаусдорф). Для того чтобы множество E метрического пространства X было компактным, необходимо, а если X полное пространство, то и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ в X существовала конечная ε -сеть для E .

Доказательство. Необходимость. Пусть условие теоремы не выполнено, т. е. пусть при некотором $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε -сети. Возьмем произвольную точку $x_1 \in E$. Множество, состоящее из одного элемента x_1 , не образует ε -сети для E , поэтому найдется $x_2 \in E$ такое, что $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2\}$ также не может быть ε -сетью для E , следовательно, найдется $x_3 \in E$, причем $\rho(x_i, x_3) \geq \varepsilon$ ($i = 1, 2$). Рассуждая так и дальше, мы придем к последовательности $\{x_n\}$ точек из E такой, что $\rho(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ ($m \neq n, m, n = 1, 2, \dots$). Очевидно, из этой последовательности нельзя выделить никакой сходящейся подпоследовательности. Множество E , таким образом, некомпактно.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества E и докажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для этого зададимся числовой последовательностью $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($\varepsilon_n > 0$) и рассмотрим существующую по условию ε_1 -сеть. Если построить сферы с центрами в точках ε_1 -сети и радиусом ε_1 , то каждая точка множества E попадет по крайней мере в одну из этих сфер. Так как сфер конечное число, то в одной из них окажется бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности. Обозначим эту сферу через $K_{\varepsilon_1}(z_1)$.

Возьмем далее ε_2 -сеть и рассмотрим сферы радиуса ε_2 с центрами в ее точках. Как и раньше, в одну из этих сфер попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Пусть это будет сфера $K_{\varepsilon_2}(z_2)$. Продолжая таким образом, получим последовательность сфер $K_{\varepsilon_1}(z_1), K_{\varepsilon_2}(z_2), \dots, K_{\varepsilon_n}(z_n), \dots$ такую, что в пересечении любого их числа попадает бесконечное множество точек данной последовательности. Ввиду этого мы можем выбрать

$$x_{n_1} \in K_{\varepsilon_1}(z_1); x_{n_2} \in K_{\varepsilon_2}(z_2) \cap K_{\varepsilon_1}(z_1) \quad (n_2 > n_1);$$

и вообще $x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^k K_{\varepsilon_i}(z_i) \quad (n_k > n_{k-1} > \dots > n_1)$.

*) См. Хаусдорф. Там же доказана и теорема 2.

Так как оба элемента x_{n_k} и x_{n_l} принадлежат сфере $K_{\varepsilon_k}(z_k)$ ($k \leq l$), то

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(x_{n_l}, z_k) < 2\varepsilon_k,$$

а, значит, последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в себе и, в силу полноты пространства X , сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$.

Таким образом, компактность E доказана.

З а м е ч а н и е. Для компактности множества достаточно также (в случае полноты пространства X) существование компактной ε -сети.

В самом деле, для этой компактной ε -сети будет существовать конечная ε -сеть, которая будет, очевидно, (2ε) -сетью для исходного множества, что и устанавливает его компактность.

С л е д с т в и е. Компактное пространство сепарабельно.

Действительно, если $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $M_k (k = 1, 2, \dots)$ — конечная ε_k -сеть, то $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ будет, очевидно, счетным плотным в данном пространстве множеством.

В связи с проведенным рассуждением мы хотим обратить внимание на различие понятий компактного и сепарабельного пространств. В случае сепарабельного пространства было обеспечено наличие счетного множества, элементами которого можно было безгранично приблизиться к любому элементу пространства. В случае компактного пространства мы также получаем такую возможность, строя множество M — соединение ε_k -сетей. Однако здесь с помощью одной ε -сети — конечного числа элементов — мы можем одновременно аппроксимировать каждый элемент пространства, что в сепарабельном пространстве, вообще говоря, не имеет места.

Таким образом, компактное пространство характеризуется тем, что оно может быть «равномерно» аппроксимировано с любой степенью точности конечным скелетом. Иначе говоря, компактное пространство может быть моделировано с точностью до ε пространством, состоящим из конечного числа элементов.

Укажем теперь условия компактности множества в пространстве s .

Нетрудно видеть, что множество $E \subset s$ компактно в s тогда и только тогда, когда числовое множество k -ых координат точек множества E ограничено при любом $k = 1, 2, \dots$, т. е.

$$|\xi_k| \leq l_k \quad \text{для} \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots) \in E.$$

Иначе говоря, множество E расположено в некотором параллелепипеде пространства s .

Необходимость этого условия очевидна, так как если мы возьмем последовательность элементов, у которых, скажем, первая координата неограниченно возрастает, то из нее, очевидно, нельзя выделить частичную сходящуюся (по-координатно).

*) См. [6], [4].

существует конечная ε -сеть. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — непрерывные функции, образующие эту сеть. Так как каждая из функций x_k ограничена, а для произвольного элемента $x \in E$ найдется x_k так, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_k(t)| + |x(t) - x_k(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x_k(t)| + \rho(x, x_k) < \\ &< \max_{a \leq t \leq b} |x_k(t)| + \varepsilon, \end{aligned}$$

и, следовательно, условие 1) выполнено, если в качестве постоянной K взять увеличенную на ε общую границу функций $|x_k(t)|$ ($k = 1, \dots, n; a \leq t \leq b$).

Далее, для каждой из функций x_k найдется такое δ_k , что

$$|x_k(t') - x_k(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t' - t| < \delta_k.$$

Обозначим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Возьмем произвольную функцию x из множества E . Пусть x_k — тот элемент, для которого $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |x(t') - x(t)| &\leq |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t)| + |x_k(t) - x(t)| \leq \\ &\leq \rho(x, x_k) + |x_k(t') - x_k(t)| + \rho(x, x_k) < 2\varepsilon + |x_k(t') - x_k(t)|. \end{aligned}$$

Если $|t - t'| < \delta$, то второе слагаемое здесь будет меньше ε , а потому в этом случае

$$|x(t') - x(t)| < 3\varepsilon.$$

Таким образом, функции множества E равностепенно непрерывны.

Достаточность. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем по нему $\delta > 0$ в соответствии с условием равностепенной непрерывности. Разобьем промежуток $[a, b]$ на части $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, что $t_{k+1} - t_k < \delta$.

Обозначим через H семейство ломаных $\bar{x}(t)$ (кусочно-линейных функций) с вершинами в точках (t_k, η_k) ($|\eta_k| \leq K$). H — компактное множество, так как каждый его элемент — функция $\bar{x}(t)$ — определяется набором чисел $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ так, что сходимость последовательности таких функций означает сходимость последовательностей соответствующих чисел $\{\eta_i\}$.

Множество H образует ε -сеть. Действительно, для любой $x \in E$ построим $\bar{x} \in H$ как кусочно-линейную функцию, график которой проходит через точки: $(t_k, x(t_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Проверим, что $\rho(x, \bar{x}) < \varepsilon$, т. е. что $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [a, b]$. Пусть $t \in [a, b]$. Оно попадает в один из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$. Если обозначить через m_k и M_k точные границы функции x в промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, то $M_k - m_k < \varepsilon$ (так как $t_{k+1} - t_k < \delta$). Но, очевидно,

$$m_k \leq x(t) \leq M_k,$$

$$m_k \leq \bar{x}(t) \leq M_k.$$

Откуда

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq M_k - m_k < \varepsilon.$$

Наличие компактной ε -сети доказывает компактность множества E (см. замечание к теореме Хаусдорфа).

Проиллюстрируем доказанную теорему примерами.

Рассмотрим в промежутке $[0, \pi]$ совокупность функций $E = \{\sin nt\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Условие ограниченности для E выполнено. Однако, поскольку $\sin n \frac{\pi}{2n} = 1$, то второе условие — равностепенной непрерывности — нарушено. Множество E некомпактно в C .

Рассмотрим теперь множество E функций, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$|x(t') - x(t)| \leq M |t' - t|^\alpha \quad (x \in E; t', t \in [a, b]; 0 < \alpha \leq 1). \quad *)$$

Если функции множества E ограничены в совокупности, то E компактно. Действительно, $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ обеспечивает равностепенную непрерывность функций множества E , и, следовательно, выполнены оба условия теоремы Арцела — Асколи.

Более общо: пусть E — ограниченное множество непрерывных функций и пусть существует такая функция $\omega(\delta)$, что $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, причем модуль непрерывности $\omega(x; \delta)$ **) любой функции $x \in E$ удовлетворяет неравенству $\omega(x; \delta) \leq \omega(\delta)$; тогда E компактно в пространстве C .

Отметим в заключение, что теорема Арцела — Асколи имеет место и для пространства C_T .

Также предоставляем читателю сформулировать критерий компактности множества в пространстве $C^{(n)}$.

§ 4. Множества первой и второй категории ***)

4.1. Ранее мы ввели понятие плотного множества. В известном смысле противоположно ему понятие нигде не плотного множества.

*) При $\alpha = 1$ получаем условие Липшица

$$|x(t') - x(t)| \leq M |t' - t|.$$

О функции, удовлетворяющей условию Гёльдера, часто говорят, что она удовлетворяет условию Липшица с показателем α . Класс всех таких функций обозначают $Lip \alpha$.

**) Напомним, что модулем непрерывности функции $x \in C$ называется величина

$$\omega(x; \delta) = \max_{\substack{a \leq t, t' \leq b \\ |t' - t| \leq \delta}} |x(t') - x(t)| \quad (0 < \delta \leq b - a).$$

***) Множества первой и второй категории введены Бэром [18].

Множество E метрического пространства X называется *нигде не плотным* в X , если оно не плотно ни в одной сфере, т. е. если для всякой сферы $K_\varepsilon(x)$ найдется другая сфера $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_\varepsilon(x)$, свободная от точек множества E .

Множество E называется *множеством первой категории* в X , если его можно представить в форме суммы счетного множества нигде не плотных множеств.

Множество $E \subset X$, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории* (в X).

Очевидно, сумма счетного множества множеств первой категории снова есть множество первой категории.

Далее, если A — множество первой (второй) категории, а $B \subset A$ ($B \supset A$), то B — также множество первой (второй) категории.

В двумерном евклидовом пространстве (на плоскости) примером нигде не плотного множества может служить любое множество точек, лежащих на прямой. Множество точек, обе координаты которых рациональны, является примером множества первой категории — оно есть сумма счетного множества «одноточечных» множеств. Хотя это множество первой категории, оно тем не менее плотно в $\mathbb{R}^2$.

4.2. На вопрос о существовании множеств второй категории ответ дает следующая

Теорема 1 (4.1). *Полное метрическое пространство X есть множество второй категории (в себе).*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что X — первой категории, так что $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k нигде не плотны.

Так как E_1 нигде не плотно, найдется сфера $K_{\varepsilon_1}(x_1)$, свободная от точек множества E_1 .

Поскольку E_2 нигде не плотно, в сфере $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(x_1)$ найдется сфера $K_{\varepsilon_2}(x_2)$, свободная от точек E_2 . При этом можно считать, что $\varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Продолжая таким же образом, построим последовательность сфер $\{K_{\varepsilon_n}(x_n)\}$ так, что

$$K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset K_{\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}); \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap E_n = \Lambda^*); \quad \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} (n = 1, 2, \dots).$$

Ввиду того, что сфера $K_{\frac{\varepsilon_n}{2}}(x_n)$ содержит все следующие сферы, будет

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \frac{\varepsilon_n}{2}. \quad (1)$$

Так как, очевидно, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе, а потому вследствие полноты пространства X существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

*) Здесь и всюду в дальнейшем Λ означает пустое множество.

Переходя к пределу в (1) (при $p \rightarrow \infty$), получаем

$$\rho(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon_n}{2} < \varepsilon_n,$$

так что $x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$ и, следовательно, $x \in E_n$ для любого $n = 1, 2, \dots$

С другой стороны, $x \in X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, стало быть, x должно входить по крайней мере в одно из E_n .

Замечание. Небольшое изменение доказательства позволяет получить и более сильный результат о том, что в полном пространстве всякое непустое открытое множество — второй категории.

Следствие. В полном пространстве множество, дополнительное к множеству первой категории, всегда второй категории.

Множества такого рода называются *вычетами*. Отметим следующий факт: пересечение счетного множества вычетов является вычетом. Действительно, если A_k — вычеты, то $A_k = X \setminus E_k$, где E_k — множества первой категории. Поскольку $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, и, как отмечалось в 4.1, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ — первой категории, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ является вычетом.

Ясно также, что открытое плотное в полном метрическом пространстве множество является вычетом, т. к., очевидно, его дополнение нигде не плотно.

Предоставляем читателю в виде упражнения убедиться, что множество вещественных чисел, в разложении которых в k -ричную дробь какая-либо цифра, начиная с некоторого места, отсутствует, есть множество первой категории в пространстве вещественных чисел, и получить отсюда, что существуют числа, у которых в разложении в k -ричную дробь (при всех k) все значащие цифры присутствуют бесконечное множество раз (множество таких чисел является вычетом).

В качестве другого упражнения предлагаем доказать, что множество L всех суммируемых функций есть множество первой категории в пространстве S .

§ 5. Топологические пространства

Во многих вопросах, связанных с метрическими пространствами, количественные соотношения, определяемые метрикой, не играют большой роли. Основное значение в ряде случаев имеет понятие близости, которое, например, только и фигурирует в определении сходимости, окрестности, открытого и замкнутого множества и т. п. Поэтому представляется возможность рассмотреть пространства, в которых близость точек определяется не с помощью метрики, а иными путями. Одним из наиболее естественных на первый взгляд путей является непосредственное указание для каждой точки

пространства ее окрестностей — т. е. совокупностей точек, «близких» к данной. Однако по причинам, не имеющим, впрочем, принципиального характера, удобнее избрать другой путь, который состоит в том, что в пространстве указываются всевозможные открытые множества, после чего уже нетрудно определить окрестности любой точки пространства.

5.1. Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем выделена система $\mathfrak{G}$ подмножеств, называемых *открытыми*, которая удовлетворяет следующим трем условиям (аксиомам топологического пространства):

1) пустое множество Λ и все множество X входят в $\mathfrak{G}$;

2) если $G_\xi \in \mathfrak{G}$ ($\xi \in \Xi$), то $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathfrak{G}$;

3) если $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, то $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$.

Если множество X обращено в топологическое пространство, то говорят, что в X *введена топология*.*)

Два топологических пространства X_1 и X_2 называются *гомеоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором открытые множества в X_1 и X_2 соответствуют друг другу. С точки зрения теории топологических пространств гомеоморфные пространства могут быть, очевидно, отождествлены.

Поскольку система открытых множеств метрического пространства удовлетворяет аксиомам топологического пространства, то метрическое пространство можно рассматривать и как топологическое. Как мы увидим, далеко не во всяком топологическом пространстве топологию можно ввести посредством метрики. Если это возможно, то топологическое пространство называется *метризуемым*.

Следует иметь в виду, что различные метрические пространства могут совпадать как топологические. К примеру, в двумерном евклидовом пространстве топология может быть определена посредством весьма разнообразных метрик.

Пусть в множестве X двумя, вообще говоря, различными способами введена топология, в результате чего образовалось два топологических пространства X_1 и X_2 (совпадающих по составу элементов). Обозначим через $\mathfrak{G}_1$, соответственно через $\mathfrak{G}_2$, систему открытых множеств пространства X_1 , соответственно X_2 . Говорят, что топология в X_1 *сильнее* топологии в X_2 (или топология в X_2 *слабее* топологии в X_1), если $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$. При этом пишут $\tau(X_1) \geq \tau(X_2)$ (или $\tau(X_2) \leq \tau(X_1)$).

Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{G}$ — система открытых множеств в нем. Пусть, далее, $X_0 \subset X$ — произвольное множество. Система $\mathfrak{G}_0$, состоящая из множеств вида $G \cap X_0$ ($G \in \mathfrak{G}$), удовлетворяет аксиомам топологического пространства (по отношению к множеству X_0), вследствие чего X_0 обращается в топологическое пространство. Говорят, что топология в X_0 *индуцирована* топологией в X .

5.2. Множество F в топологическом пространстве X называется *замкнутым*, если множество $G = X \setminus F$ открыто. Система $\mathfrak{F}$ всех замкнутых множеств пространства X обладает следующими свойствами.

1. $\Lambda, X \in \mathfrak{F}$.

2. Если $F_\xi \in \mathfrak{F}$ ($\xi \in \Xi$), то $\bigcap_{\xi \in \Xi} F_\xi \in \mathfrak{F}$.

3. Если $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

Поскольку система $\mathfrak{F}$ однозначно определяет систему $\mathfrak{G}$ открытых множеств, можно топологию в X вводить, задавая первоначально систему $\mathfrak{F}$, удовлетворяющую указанным трем условиям, называя множества из $\mathfrak{F}$ замкну-

*) Так же как и метрические пространства, топологические пространства впервые рассматривались Фреше [109a].

тыми. Открытые множества определяются при этом как дополнения замкнутых. Предоставляем читателю формулировку основных понятий, введенных выше, для случая, когда топология задается с помощью системы замкнутых множеств.

Если $X_0 \subset X$ —замкнутое множество, то, вводя в X_0 топологию, индуцированную топологией в X , мы получим *подпространство* X_0 топологического пространства X . Система $\mathfrak{F}_0$ замкнутых множеств пространства X_0 состоит из замкнутых в X множеств, которые целиком содержатся в X_0 .

5.3. Пусть X —топологическое пространство. Точка $x \in X$ называется *внутренней* точкой множества $E \subset X$, если существует открытое множество $G \subset E$ такое, что $x \in G$. *Окрестностью* точки $x \in X$ называется любое множество $V \subset X$, для которого точка x внутренняя. Система $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки x называется *фундаментальной*, или *базисом* окрестностей точки x , если для любой окрестности V точки x найдется окрестность $V_x \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V_x \subset V$. Совокупность $\mathfrak{B}$ базисов $\mathfrak{B}_x$ во всевозможных точках пространства называется *базисом* пространства. Базис пространства обладает следующими свойствами.

1. Если $V \in \mathfrak{B}_x$, то $x \in V$.

2. Если $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, то существует $V \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V \subset V_1 \cap V_2$.

3. Каково бы ни было множество $V_x \in \mathfrak{B}_x$, существует $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ так, что $V'_x \subset V_x$, причем для любого $y \in V'_x$ найдется $V_y \in \mathfrak{B}_y$ такая, что $V_y \subset V_x$.

Поясним последнее свойство. Так как V_x —окрестность точки x , то существует открытое множество $G \subset V_x$, содержащее точку x . Множество G является окрестностью точки x и потому существует $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ такая, что $V'_x \subset G$ и тем более $V'_x \subset V_x$. Если $y \in V'_x$, то $y \in G$ и множество G , будучи открытым, является окрестностью точки y , вследствие чего найдется $V_y \subset G$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Подавно будет $V_y \subset V_x$.

Читатель легко убедится, что совокупность сферических окрестностей $K_{\frac{1}{n}}(x)$ ($n = 1, 2, \dots, x \in X$) образует базис метрического пространства X .

Свойства 1—3 характеризуют базис пространства. Именно, справедлива **Теорема 1 (5.1)**. Пусть с каждой точкой x некоторого множества X связана система $\mathfrak{B}_x$ подмножеств множества X , причем удовлетворены условия 1—3. Множество $G \subset X$ назовем *открытым*, если для любого $x \in G$ существует $V \subset G$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Тогда система *открытых* множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства, и в полученном таким образом топологическом пространстве каждая система $\mathfrak{B}_x$ является базисом окрестностей точки x .

Доказательство. Выполнение аксиом топологического пространства очевидным образом вытекает из первых двух условий 1—3. Проверим, что при любом $x \in X$ система $\mathfrak{B}_x$ является фундаментальной системой окрестностей точки x . Пусть $V \in \mathfrak{B}_x$. Образует множество G , состоящее из всех таких точек $y \in V$, для которых существует $V_y \subset V$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Докажем, что G —открытое множество. Возьмем произвольную точку $z \in G$. Существует множество $V_z \in \mathfrak{B}_z$ такое, что $V_z \subset V$. По условию 3 найдется $V'_z \in \mathfrak{B}_z$ так, что $V'_z \subset V_z$ и для любого $y \in V'_z$ существует $V_y \subset V_z$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Это означает, что $y \in G$ и $V'_z \subset G$, т. е. G —открытое множество и V , таким образом, является окрестностью точки x . Осталось проверить, что $\mathfrak{B}_x$ будет фундаментальной системой окрестностей. Пусть U —произвольная окрестность точки x . Существует открытое множество $G \subset U$, содержащее точку x . Следовательно, по определению найдется $V_x \in \mathfrak{B}_x$ так, что $V_x \subset G$ и тем более $V_x \subset U$.

Доказанная теорема позволяет вводить топологию посредством указания фундаментальных систем окрестностей для каждой точки пространства.

Этот способ введения топологии оказывается, как правило, самым удобным, так как обычно в качестве окрестностей можно выбрать множества, имеющие сравнительно простую структуру.

Охарактеризуем в терминах базиса основные понятия, введенные в топологическом пространстве.

Пусть в множестве X указаны два базиса *): $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$) и $\{\mathfrak{U}_x\}$ ($x \in X$). Каждый из них на основании теоремы 1 определяет в X топологию. Топологическое пространство, построенное по первому базису, обозначим через X_1 , по второму базису — через X_2 .

Для того, чтобы топология в X_1 была слабее топологии в X_2 , необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ и $V \in \mathfrak{B}_x$ нашлась бы окрестность $U \in \mathfrak{U}_x$, содержащаяся в V .

Сложное доказательство этого факта предоставляем читателю.

Из сформулированного предложения следует, что два базиса определяют одну и ту же топологию в том и только в том случае, когда, кроме указанного условия, выполнено еще ему симметричное: для любого $x \in X$ и $U \in \mathfrak{U}_x$ найдется $V \in \mathfrak{B}_x$, содержащаяся в U . В этом случае базисы называются *эквивалентными*.

Мы не останавливаемся на формулировке в терминах окрестностей условий гомеоморфизма топологических пространств.

Если X_0 — множество в топологическом пространстве X с заданным базисом $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$), то индуцированную топологию в X_0 можно определить исходя из базиса $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ ($x \in X_0$), где $\mathfrak{B}_x^{(0)}$ состоит из всех множеств вида $V \cap X_0$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Мы и здесь предоставляем читателю доказательство того, что построенная совокупность $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и что топология, определенная этим базисом, совпадает с индуцированной.

5.4. Прежде чем указывать условия замкнутости множества в терминах окрестностей, введем еще одно важное понятие. Точка x топологического пространства X называется *точкой прикосновения* множества $E \subset X$, если, какую бы окрестность V точки x ни взять, пересечение $V \cap E$ непусто. Если, кроме того, это пересечение не сводится к одной точке x , то x называется *предельной точкой* множества E (или *точкой сгущения*; применяется также термин — *точка накопления*).

В определении точки прикосновения (соответственно предельной точки) можно учитывать не все окрестности точки x , а только окрестности, входящие в некоторую фундаментальную систему окрестностей этой точки.

Множество всех точек прикосновения данного множества E называется *замыканием* множества E и обозначается символом $\bar{E}$. Без труда устанавливаются следующие свойства замыкания:

- 1) $\bar{\Lambda} = \Lambda$,
- 2) $E \subset \bar{E}$,
- 3) если $E_1 \subset E_2$, то $\bar{E}_1 \subset \bar{E}_2$,
- 4) $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 = \overline{E_1 \cup E_2}$,
- 5) $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$.

Проверим наличие двух последних, менее очевидных, свойств. Пусть $E = E_1 \cup E_2$. Так как $E_i \subset E$, то $\bar{E}_i \subset \bar{E}$ ($i = 1, 2$); откуда $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \subset \bar{E}$. Наоборот, если $x \in \bar{E}$, то, предполагая, что $x \notin \bar{E}_1$, найдем окрестность V_0 точки x такую, что $V_0 \cap \bar{E}_1 = \Lambda$. Пусть V — произвольная окрестность точки x . Можно считать, что $V \subset V_0$ (иначе мы рассмотрим пересечение $V \cap V_0$). Так как $V \cap E \neq \Lambda$, то должно быть $V \cap E_2 \neq \Lambda$ и, следовательно, $x \in \bar{E}_2 \subset \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$.

*) Под базисом в множестве X в дальнейшем понимается совокупность систем множеств, удовлетворяющая условиям 1—3.

Проверяя последнее свойство, надо лишь установить, что $\bar{E} \subset \bar{E}$. Пусть $x \in \bar{E}$. Возьмем произвольную окрестность V точки x . Можно считать, что V — открытое множество и потому является окрестностью всех своих точек. Пересечение $V \cap \bar{E} \neq \emptyset$, пусть $y \in V \cap \bar{E}$. Так как $y \in \bar{E}$, а V является окрестностью точки y , то $V \cap E \neq \emptyset$, а это означает, что $x \in \bar{E}$.

Множество $F \subset X$ будет замкнутым тогда и только тогда, когда $\bar{F} = F$. Действительно, если $x \in \bar{F} = \bar{F}$, то существует окрестность V точки x , которая не пересекается с F . Это означает, что множество $G = X \setminus F$ открыто, а F , следовательно, замкнуто. Обратное предложение доказывается в обратном порядке.

Отметим еще тот очевидный факт, что замыкание множества E получается присоединением к E всех предельных точек множества E , и, следовательно, замкнутое множество можно охарактеризовать как множество, содержащее все свои предельные точки.

5.5. Пусть имеются два топологических пространства X и Y и пусть каждому элементу $x \in X$ отнесен элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда говорят, что имеется *отображение* f пространства X в пространство Y . Элемент $y = f(x)$ называется *образом* элемента x , а элемент $x \in X$ называется *прообразом* элемента $y = f(x) \in Y$. Если множество всех образов заполняет все пространство Y , то говорят, что f отображает X на Y .

Совокупность $B \subset Y$ всех образов элементов из множества $A \subset X$ называется *образом* множества A и обозначается $B = f(A)$. Множество A всех прообразов элементов из множества $B \subset Y$ называется *полным прообразом* множества B и обозначается $A = f^{-1}(B)$ (при этом $f(X)$ может и не совпадать с Y).

Определим в множестве X новую топологию, считая открытыми множества вида $f^{-1}(U)$, где U — открытое в Y множество. Проверим, что система $\mathfrak{G}_f$ указанных множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства. В самом деле, $\Lambda = f^{-1}(\Lambda)$ и $X = f^{-1}(Y)$, поэтому $\Lambda, X \in \mathfrak{G}_f$. Далее, если $G_\xi \in \mathfrak{G}_f$ ($\xi \in \Xi$), т. е. если $G_\xi = f^{-1}(U_\xi)$, где U_ξ — открытые в Y множества ($\xi \in \Xi$), то $G = \bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi = \bigcup_{\xi \in \Xi} f^{-1}(U_\xi) = f^{-1}\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} U_\xi\right) \in \mathfrak{G}_f$. Аналогично проверяется третья аксиома.

Образованное только что топологическое пространство обозначим X_f . Если топология пространства X_f слабее топологии пространства X , то отображение f называется *непрерывным*. Из самого определения следует, что для непрерывности f необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз открытого в Y множества U был открытым множеством в X .

Поскольку имеет место соотношение

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \quad (B \subset Y),$$

то для непрерывности f также необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз замкнутого множества был замкнут.

Если $\mathcal{U}_y$ — базис окрестностей точки $y \in Y$, то система $\mathfrak{B}_x$ ($f(x) = y$), состоящая из множеств вида $f^{-1}(U)$ ($U \in \mathcal{U}_y$), будет фундаментальной системой окрестностей точки x в пространстве X_f . Отсюда можно получить критерий непрерывности отображения f в терминах окрестностей: для любого $x \in X$ и $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$ существует окрестность V точки x в пространстве X такая, что $V \subset f^{-1}(U)$ (или иначе: $f(V) \subset U$). *)

*) Если это условие выполнено лишь для данной точки $x \in X$, то отображение f называется *непрерывным в точке x* .

Отметим, что если f взаимно-однозначное отображение X на Y , то можно говорить об обратном отображении f^{-1} . Именно для $y \in Y$ полагаем $x = f^{-1}(y)$, если $f(x) = y$. Элемент x при этом однозначно определяется элементом y . Если оба отображения f и f^{-1} непрерывны, то пространства X и Y , как легко видеть, гомеоморфны. Ясно, что и наоборот, если X и Y — гомеоморфные пространства, то существует отображение f пространства X на пространство Y взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное (т. е. такое, что f и f^{-1} непрерывны). В этом случае f называется *гомеоморфизмом* X на Y . Нередко приходится рассматривать отображения f , сопоставляющие паре элементов $x', x'' \in X$ элемент $y = f(x', x'') \in Y$. Чтобы естественным образом связать такие отображения с рассмотренными ранее, введем понятие прямого произведения топологических пространств.

Пусть X' и X'' — два топологических пространства. Образует множество X , состоящее из всевозможных пар (x', x'') , где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. В X введем топологию, принимая за окрестность точки $(x'_0, x''_0) \in X$ всякое множество V , состоящее из пар (x', x'') , где $x' \in V'$ и $x'' \in V''$, а V' , соответственно V'' , окрестность точки x'_0 в пространстве X' , соответственно точки x''_0 в пространстве X'' . Топологическое пространство X , таким образом построенное называется *прямым произведением* (или просто произведением) пространств X' и X'' и обозначается $X = X' \times X''$.

Пусть $\tilde{f}$ — отображение указанного выше типа. Его можно рассматривать, как обычное отображение пространства $X^2 = X \times X$ в Y . Обозначая новое отображение через $\tilde{f}$, условимся называть f непрерывным, если непрерывно отображение $\tilde{f}$. В терминах, относящихся к исходному отображению f , условие непрерывности может быть высказано так: каковы бы ни были точки $x', x'' \in X$ и окрестность U точки $y = f(x', x'')$, найдутся окрестности V' точки x' и V'' точки x'' такие, что $f(V', V'') \subset U$.

5.6. Топологические пространства, удовлетворяющие лишь трем аксиомам топологического пространства, могут иметь самую замысловатую структуру, или, наоборот, топологическое их строение может оказаться настолько примитивным, что средствами топологии их изучать нельзя. Так, например, будет, если в пространстве имеется всего два открытых множества — пустое и все пространство.

В связи с указанными обстоятельствами обычно вводят еще те или иные дополнительные аксиомы, среди которых особого внимания заслуживают так называемые аксиомы отделимости.

Первая аксиома отделимости. Каковы бы ни были различные точки x_1, x_2 топологического пространства X , существует окрестность V_1 точки x_1 , не содержащая x_2 .*)

Топологическое пространство, в котором выполнена первая аксиома отделимости, называется *отделимым* или *T_1 -пространством*.

Ясно, что в отделимом пространстве каждое одноточечное множество замкнуто. Наоборот, если в топологическом пространстве X одноточечные множества замкнуты, то X — отделимо.

Вторая аксиома отделимости. Каковы бы ни были различные точки x_1 и x_0 топологического пространства X , существуют окрестности V_1 точки x_1 и V_2 точки x_2 , пересечение которых пусто.

Пространства, в которых выполнена вторая аксиома отделимости, называются *хаусдорфовыми*, или *T_2 -пространствами*. Роль второй аксиомы отделимости будет выяснена несколько позже.

*) При этом, очевидно, можно добиться, чтобы V_1 принадлежала к заранее указанной фундаментальной системе окрестностей точки x_1 . Аналогичное замечание имеет место и по отношению к следующим аксиомам отделимости.

Третья аксиома отделимости. Какова бы ни была точка x топологического пространства X и замкнутое множество $F \subset X$, не содержащее точку x , существуют окрестность V точки x и открытое множество $G \supset F$ такие, что $V \cap G = \Delta$.

Пространства, в которых выполняется эта аксиома, называются T_3 -пространствами. Если пространство, кроме того, удовлетворяет первой аксиоме отделимости (а следовательно, и второй), то оно называется *регулярным*.

T_3 -пространства характеризуются тем, что для каждой точки такого пространства существует фундаментальная система окрестностей, состоящая из замкнутых множеств. Действительно, пусть $\mathfrak{B}_x$ состоит из замыканий всевозможных окрестностей точки x . Докажем, что $\mathfrak{B}_x$ — фундаментальная система окрестностей точки x . Для этого возьмем произвольную окрестность V точки x . Можно считать, что V — открытое множество. Множество $F = X \setminus V$ замкнуто и не содержит точки x . Поэтому найдется окрестность V' точки x и открытое множество $G \supset F$ так, что $V' \cap G = \Delta$. Иначе это можно записать в виде $V' \subset X \setminus G$. Следовательно, поскольку $X \setminus G$ — замкнутое множество, $\overline{V'} \subset X \setminus G \subset X \setminus F = V$.

Наоборот, если каждая точка топологического пространства X обладает фундаментальной системой $\mathfrak{B}_x$ окрестностей, состоящей из замкнутых множеств, то X будет T_3 -пространством. В самом деле, пусть $F \subset X$ — замкнутое множество и $x \notin F$. Множество $G = X \setminus F$ открыто и содержит точку x и поэтому является окрестностью этой точки. Пусть $V \subset G$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Открытое множество $X \setminus V \supset X \setminus G = F$. Кроме того, очевидно, $V \cap (X \setminus V) = \Delta$.

5.7. В топологическом пространстве можно, как и в метрическом, ввести понятие сходимости последовательности элементов. Именно: последовательность $\{x_n\}$ элементов топологического пространства X *сходится* к элементу x , если для каждой окрестности V точки x можно указать такой номер n_0 , что $x_n \in V$ для $n > n_0$. При этом, как обычно, пишут $x_n \rightarrow x$ или $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Следует, однако, отметить, что в произвольном топологическом

пространстве сходимость не играет столь заметной роли, какую она играет в метрических пространствах. Одной из основных причин этого является то обстоятельство, что в отличие от случая метрического пространства замыкание множества в топологическом пространстве нельзя, вообще говоря, получить, присоединяя к данному множеству пределы сходящихся последовательностей элементов множества. Более того, множество, содержащее все пределы сходящихся последовательностей своих элементов, вообще говоря, не будет замкнутым.

Все это приводит к необходимости рассматривать более общее понятие, чем сходимость последовательности.

Множество A называется *частично упорядоченным*, если в множестве пар (a', a'') ($a', a'' \in A$) выделено подмножество $\mathfrak{U}$, обладающее свойствами:

- 1) $(a, a) \in \mathfrak{U}$ при любом $a \in A$, и если $(a', a'') \in \mathfrak{U}$, $(a'', a') \in \mathfrak{U}$, то $a' = a''$;
- 2) если $(a', a'') \in \mathfrak{U}$ и $(a'', a''') \in \mathfrak{U}$, то $(a', a''') \in \mathfrak{U}$.

Если $(x', a'') \in \mathfrak{U}$, то условимся говорить, что a' *предшествует* a'' (или a'' *следует* за a') и писать $a' \rightarrow a''$ (или $a'' \leftarrow a'$).

Частично упорядоченное множество A называется *направлением*, если выполнено условие:

- 3) каковы бы ни были элементы $a', a'' \in A$, существует $a \in A$ такое, что $a \leftarrow a'$ и $a \leftarrow a''$.

Множество $A_0 \subset A$ называется *конфинальным*, если для любого $a \in A$ найдется $a_0 \in A_0$ такое, что $a_0 \leftarrow a$. Очевидно, множество A_0 , конфинальное в A , будет направлением в силу той частичной упорядоченности, которая имеется в нем как в части A .

Пусть имеется направление A и пусть каждому $a \in A$ соотнесен элемент x_a из топологического пространства X . В этом случае говорят, что имеется *обобщенная последовательность* $\{x_a\}$ ($a \in A$).

Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов топологического пространства X называется *сходящейся* к $x \in X$, если для любой окрестности V точки x существует $\alpha_V \in A$ такое, что $x_\alpha \in V$ для $\alpha \geq \alpha_V$. Это обстоятельство обозначается так: $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ или $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$. Точка x называется *пределом* обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}$.

Укажем некоторые свойства сходящихся обобщенных последовательностей.

1. Если $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ и A_0 конфинально в A , то $x_\alpha \xrightarrow{A_0} x$.

2. Пусть $E \subset X$; для того чтобы $x \in \bar{E}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такая, что $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ и $x_\alpha \in E$.

Действительно, если такая последовательность существует, то, какова бы ни была окрестность V точки x , пересечение $V \cap E \neq \emptyset$, так как оно содержит элементы данной обобщенной последовательности.

Предположим теперь, что $x \in \bar{E}$. Пусть A — фундаментальная система окрестностей точки x . Для $\alpha', \alpha'' \in A$ будем считать $\alpha' \rightarrow \alpha''$, если $\alpha' \supset \alpha''$. Ясно, что A в силу такой частичной упорядоченности оказывается направлением. В пересечении $A \cap E$, которое непусто вследствие условия $x \in \bar{E}$, выберем точку x_α . Прделав это для каждого $\alpha \in A$, получим обобщенную последовательность, обладающую требуемым свойством.

Из доказанного вытекает:

3. Для того чтобы множество $F \subset X$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такая, что $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ и $x_\alpha \in F$ ($\alpha \in A$), было $x \in F$.

4. Если пространство X таково, что каждая точка обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, то в свойстве 2, а следовательно, и 3 можно говорить об обычных последовательностях.

Действительно, пусть $\mathfrak{B}_x = \{V_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — базис окрестностей в точке x . Обозначим

$$V'_n = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ясно, что окрестности $V'_1, V'_2, \dots$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки x . Повторяя рассуждения из доказательства свойства 2, получим обычную последовательность $\{x_n\}$ ($x_n \in E$), сходящуюся к x .

5. Для того чтобы каждая сходящаяся обобщенная последовательность сходилась только к одному пределу, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было хаусдорфовым.

Единственность предела при условии, что пространство X хаусдорфово, непосредственно вытекает из определения предела.

Докажем обратное. Пусть пространство X не хаусдорфово. Существует пара различных точек $x, y \in X$ такая, что какие бы окрестности U, V точки x , соответственно точки y , ни взять, пересечение $U \cap V \neq \emptyset$. Обозначим через A совокупность пар (U, V) , где U — окрестность точки x , а V — точки y . Если $\alpha' = (U', V')$ и $\alpha'' = (U'', V'')$ — элементы из A , то будем считать $\alpha' \rightarrow \alpha''$ в случае, когда одновременно $U' \supset U''$, $V' \supset V''$. Пусть $\alpha = (U, V) \in A$. Поскольку $U \cap V \neq \emptyset$, можно выбрать $x_\alpha \in U \cap V$. Тогда $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ и вместе с тем $x_\alpha \xrightarrow{A} y$. Проверим, например, первое соотношение. Какую бы окрестность U_0 точки x ни взять, существует $\alpha \in U_0$. Можно считать, что $\alpha_0 = (U_0, V_0)$, где V_0 — некоторая окрестность точки y . Так как $\alpha = (U, V) \geq \alpha_0$ означает, в частности, $U \subset U_0$, то $x_\alpha \in U \subset U_0$, т. е. $x_\alpha \xrightarrow{A} x$.

Условие непрерывности отображения f топологического пространства X в топологическое пространство Y может быть с помощью понятия сходимости сформулировано так.

6. Чтобы f было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ и любой обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такой, что $x_\alpha \xrightarrow{A} x$, было $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$.

В самом деле, пусть $\Phi \subset Y$ — замкнутое множество, и $F = f^{-1}(\Phi)$. Рассмотрим обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов множества F , сходящуюся к $x \in X$. Если $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$ и $f(x_\alpha) \in \Phi$ ($\alpha \in A$), то и $f(x) \in \Phi$. Следовательно, $x \in F$. Множество F , таким образом, замкнуто, а отображение f непрерывно.

Предположим, что f — непрерывное отображение. Возьмем произвольное $x \in X$ и обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), сходящуюся к x . Пусть U — окрестность точки $y = f(x)$. Существует окрестность V точки x такая, что $f(V) \subset U$. Далее, найдется $\alpha_V \in A$ так, что $x_\alpha \in V$ при $\alpha \geq \alpha_V$. Для этих же α имеем $f(x_\alpha) \in U$, откуда вытекает, что $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$. *)

Свойство 3 обобщенной сходимости позволяет вводить топологию, исходя из заранее заданной (априорной) сходимости. Именно, пусть в множестве X определена сходимость, т. е. выделен класс обобщенных последовательностей, которые называются сходящимися, и для каждой такой последовательности указан ее предел (предположим для простоты — единственный). Будем, кроме того, считать, что сходимость обладает свойством 1. Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если F содержит предел любой сходящейся обобщенной последовательности своих элементов. Нетрудно проверить, что система так определенных замкнутых множеств удовлетворяет условиям 1 — 3 из 5.3, так что мы, действительно, имеем дело с топологическим пространством. Поскольку X стало топологическим пространством, в нем можно ввести сходимость так, как это делается в любом топологическом пространстве. Мы, однако, не будем выяснять соотношения между априорной сходимостью и топологической сходимостью, которую она порождает.

В связи с понятием частично упорядоченного множества сформулируем предложение, эквивалентное принципу трансфинитной индукции, но более удобное для использования. Частично упорядоченное множество A будем называть *экстремальным*, если всякая его упорядоченная часть A_0 ограничена сверху (соответственно, снизу), т. е. если существует элемент $\alpha_0 \in A$ такой, что $\alpha \rightarrow \alpha_0$ (соответственно, $\alpha \leftarrow \alpha_0$) ($\alpha \in A_0$).

Лемма Цорна. Если частично упорядоченное множество A экстремально, то в нем существует по крайней мере один максимальный (соответственно, минимальный) элемент, т. е. элемент, за которым не следует (соответственно, которому не предшествует) ни один из элементов множества A .

5.8. В заключение остановимся на понятии компактности для топологического пространства. Поскольку, как было указано в 5.7, обычные сходящиеся последовательности не являются подходящим аппаратом для изучения топологического пространства, нельзя рассчитывать, что определение компактности, данное в § 3 для метрического пространства, окажется целесообразным и в общем случае. Хотя естественно напрашивается мысль использовать для определения компактности понятие обобщенной последовательности, при ближайшем рассмотрении обнаруживается чрезмерная сложность этого подхода. Поэтому обычно отправляются от определения на первый взгляд совсем непохожего на определение из 1.3.1. Именно: топологическое пространство X называется *компактным* (или *бикompактным*), если, какова бы ни была система $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) открытых множеств, образующая

*) Если условие выполнено для данной точки x , то, как это следует из доказательства, отображение f непрерывно в этой точке.

покрытие пространства X (говорят также: *покрывающая* пространство X), т. е. такая, что

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} G_{\xi} = X,$$

существует конечное число множеств $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \dots, G_{\xi_n}$, также покрывающих пространство X .

Будем говорить, что система $\{A_{\xi}\} (\xi \in \Xi)$ произвольных множеств—*центрированная*, если пересечение произвольного конечного числа любых множеств из этой системы непусто.

Поскольку утверждение, что система множеств $\{G_{\xi}\} (\xi \in \Xi)$ образует покрытие пространства X , равносильно тому, что пересечение дополнений F_{ξ} множеств G_{ξ} пусто, то можно сказать, что пространство X компактно тогда и только тогда, когда каждая центрированная система замкнутых множеств этого пространства имеет непустое пересечение.

Связь различных определений компактности (данного в I.3.1 и только что сформулированного) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2(5.1). *Для метрического пространства X оба определения компактности эквивалентны.*

Доказательство. Допустим сначала, что пространство X компактно в смысле данного выше определения, т. е., иными словами, бикompактно. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X и предположим, что из нее нельзя извлечь никакой сходящейся подпоследовательности. Тогда множество F_1 , состоящее из всех элементов рассматриваемой последовательности, очевидно, замкнуто. Замкнутыми будут и множества

$$F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку система множеств $\{F_n\}$ центрирована, пересечение всех этих множеств должно быть непусто, чего, как легко видеть, на самом деле нет.

Будем считать теперь, что X —произвольное метрическое сепарабельное пространство. Рассмотрим систему $\{G_{\xi}\} (\xi \in \Xi)$ открытых множеств, покрывающую пространство X , и покажем, что из системы $\{G_{\xi}\}$ можно выделить счетное покрытие пространства X . Для этого обозначим через D счетное плотное в X множество и рассмотрим всевозможные сферы рационального радиуса с центрами в точках из D . Множество таких сфер, очевидно, счетно. Перенумеруем указанные сферы; пусть это будут $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Для каждого $x \in X$ и $\xi \in \Xi$, очевидно, найдется сфера $S_n(x, \xi)$ такая, что

$$x \in S_n(x, \xi) \subset G_{\xi}. \quad (1)$$

Когда x пробегает все X , а ξ —все Ξ , индексы $n(x, \xi)$ пробегает некоторую последовательность $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$. При этом сферы $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_k}, \dots$ покрывают пространство X . Для каждого $k = 1, 2, \dots$ выберем $\xi_k \in \Xi$ так, что $n(x_k, \xi_k) = n_k$ при некотором $x_k \in X$. В силу (1)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\xi_k} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k}(x_k, \xi_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k} = X.$$

Предположим теперь, что X компактно в смысле определения § 3, и снова рассмотрим покрытие $\{G_{\xi}\}$ пространства X открытыми множествами. Так как X сепарабельно (следствие к теореме 2(3.1)), то по доказанному можно

считать, что покрытие $\{G_\xi\}$ счетное, т. е. что ξ пробегает множество натуральных чисел. Предположим, что множества

$$F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^n G_\xi$$

не пусты ни при одном $n = 1, 2, \dots$. Выберем в множестве F_n точку x_n . Из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть, например, $x_{n_k} \rightarrow x$. Так как для $n_k \geq n$ будет $x_{n_k} \in F_n$, а множество F_n замкнуто, то и $x \in F_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Иначе говоря,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi,$$

что, однако, невозможно, поскольку $\bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi = X$.

Таким образом, при некотором n будет $X = \bigcup_{\xi=1}^n G_\xi$ и пространство X компактно в смысле последнего определения.

5.9. Множество E топологического пространства X называется *компактным в себе*, если рассматриваемое как топологическое пространство (с топологией, индуцируемой топологией пространства X) оно компактно. Поскольку открытые множества в E имеют вид $G \cap E$, где G — открытое множество в X , то независимо от предыдущего можно сформулировать определение компактности в себе следующим образом: какова бы ни была система $\{G_\xi\}$ открытых (в X) множеств, покрывающая E , т. е. такая, что $\bigcup_{\xi} G_\xi \supset E$, существует конечное число множеств $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \dots, G_{\xi_n}$, также покрывающих E .

Теорема 3 (5.1). Если X — хаусдорфово пространство, то всякое компактное в себе множество $E \subset X$ замкнуто.

Доказательство. Допустим, что множество E имеет точку прикосновения $x_0 \in \bar{E}$. Для каждого $x \in E$ найдем открытые непересекающиеся окрестности — V_x — точки x , и $V_{x_0}^{(x)}$ — точки x_0 . Ясно, что система $\{V_x\}$ ($x \in E$) покрывает множество E и, следовательно, существует конечное число точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ таких, что

$$G = \bigcup_{k=1}^n V_{x_k} \supset E.$$

Пересечение

$$V_0 = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}^{(x)}$$

является, очевидно, окрестностью точки x_0 . Однако $V_0 \cap E \subset V_0 \cap G = \Lambda$, что противоречит тому, что x_0 — точка прикосновения множества E .

Замечание. Если X — компактное пространство и E — замкнутое множество в X , то E компактно в себе.

Действительно, замкнутые множества в E будут замкнутыми и в X . Поэтому, если $\{F_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — центрированная система замкнутых в E множеств, то она имеет непустое пересечение, которое содержится в E .

Будем называть множество E топологического пространства X *компактным* (говорят также, *относительно компактным*), если его замыкание компактно в себе. *) Ясно, что любое множество в компактном пространстве компактно.

5.10. Пусть X — компактное пространство и f — непрерывное отображение пространства X в топологическое пространство Y . Имеет место

Теорема 4 (5.1). *Множество $f(X)$ компактно в себе в пространстве Y .*

Доказательство. Обозначим $A = f(X)$ и пусть $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — система открытых множеств, покрывающая A . Пусть $G'_\xi = f^{-1}(G_\xi)$. Множества G'_ξ ($\xi \in \Xi$) открыты и, кроме того, $\bigcup_{\xi \in \Xi} G'_\xi = X$. Следовательно, существуют

индексы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такие, что $\bigcup_{k=1}^n G'_{\xi_k} = X$. Но тогда и $\bigcup_{k=1}^n G_{\xi_k} \supset A$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если E — компактное в себе множество топологического пространства X , то $f(E)$ — компактное в себе множество в пространстве Y .*

Привлекая теорему 3, получаем

Следствие 2. *Если Y — хаусдорфово пространство, то образ $f(E)$, компактного в себе множества $E \subset X$, замкнут.*

Следствие 3. *Если пространство X компактно, а Y — хаусдорфово и f взаимно-однозначное непрерывное отображение X на Y , то обратное отображение f^{-1} непрерывно.*

Действительно, всякое замкнутое множество $F \subset X$ компактно в себе. Прообраз этого множества при отображении f^{-1} есть $f(F)$ — множество, замкнутое на основании следствия 2. Поскольку прообраз каждого замкнутого множества замкнут, отображение f^{-1} непрерывно.

Замечание. В условиях следствия 3 пространства X и Y гомеоморфны.

5.11. Дальнейшее изучение компактных пространств и компактных в себе множеств в топологических пространствах связано с понятием фильтра (см. Бурбаки-1).

Пусть X — топологическое пространство. *Фильтром* в X называется система $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X , обладающая свойствами:

- 1) если $F_1 \supset F_2 \in \mathfrak{F}$, то $F_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, то $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$;
- 3) пустое множество $\Lambda \notin \mathfrak{F}$.

Примером фильтра является совокупность всех множеств, содержащих данное множество или, в частности, точку. Другим важным примером фильтра служит совокупность $\mathfrak{B}_x$ всех окрестностей данной точки $x \in X$.

Если для фильтров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ имеет место соотношение $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$, то говорят, что фильтр $\mathfrak{F}_1$ *тоньше* фильтра $\mathfrak{F}_2$ или же, что фильтр $\mathfrak{F}_2$ *грубее* фильтра $\mathfrak{F}_1$. **)

Пусть имеется фильтр $\mathfrak{F}$. Система $\mathfrak{F}^\circ$ непустых множеств называется *базисом фильтра* $\mathfrak{F}$, если для любого $F \in \mathfrak{F}$ найдется $F_0 \in \mathfrak{F}^\circ$ так, что $F_0 \subset F$. Так,

*) Предоставляем читателю убедиться, что вводимая здесь терминология согласуется с терминологией, введенной в I.3.1 для случая метрических пространств.

**) Фильтр, в общепринятом значении этого слова, характеризуется тем, что он отфильтровывает. Это замечание делает ясным происхождение употребляемой здесь терминологии.

фундаментальная система окрестностей точки x будет базисом фильтра $\mathfrak{B}_x$. Ясно, что базис $\mathfrak{F}^\circ$ фильтра $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям:

- 1) для любых $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}^\circ$ существует $F_3 \in \mathfrak{F}^\circ$ так, что $F_3 \subset F_1 \cap F_2$;
- 2) $\Delta \in \mathfrak{F}^\circ$.

Если произвольная система $\mathfrak{F}^\circ$ множеств удовлетворяет этим двум условиям, то существует единственный фильтр $\mathfrak{F}$, для которого $\mathfrak{F}^\circ$ является базисом. Действительно, фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из всех множеств, содержащих хотя одно множество из $\mathfrak{F}^\circ$. Отмеченное обстоятельство позволяет говорить о базисе фильтра, не имея самого фильтра, понимая под этим всякую систему $\mathfrak{F}^\circ$, удовлетворяющую указанным двум условиям.

Фильтр $\mathfrak{U}$ называется *ультрафильтром*, если не существует фильтра, существенно более тонкого чем $\mathfrak{U}$. Примером ультрафильтра служит совокупность всех множеств, содержащих данную точку.

Лемма. *Каков бы ни был фильтр $\mathfrak{F}$, существует ультрафильтр $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим совокупность Φ всех фильтров более тонких, чем данный фильтр $\mathfrak{F}$. При естественной упорядоченности — по включению — Φ становится частично упорядоченным множеством, удовлетворяющим условию леммы Цорна, применение которой и приводит к требуемому результату.

Будем говорить, что фильтр $\mathfrak{F}$ *сходится* к точке x , если $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{F}$. В этом случае пишут: $\mathfrak{F} \rightarrow x$.

Теорема 5 (5.1). *Для того чтобы пространство X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый ультрафильтр в X был сходящимся.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — компактное пространство и $\mathfrak{U}$ — некоторый ультрафильтр. Обозначим через $\mathfrak{F}^\circ$ систему замыканий всех множеств из $\mathfrak{U}$. Поскольку $\mathfrak{F}^\circ$, очевидно, центрированная система, $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}^\circ} F \neq \Delta$. Пусть x — одна из точек указанного пересечения. Какую

бы окрестность V_x точки x и множество $U \in \mathfrak{U}$ ни взять, пересечение $V_x \cap U \neq \Delta$. Поэтому эти пересечения образуют базис фильтра. Обозначим соответствующий фильтр через $\mathfrak{U}_0$. Ясно, что $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{B}_x$ и $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр, то из второго соотношения вытекает $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}$. Следовательно, $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{B}_x$, т. е. $\mathfrak{U} \rightarrow x$.

Достаточность. Достаточно доказать, что каждая центрированная система $\mathfrak{F}^\circ$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Можно считать, что система $\mathfrak{F}^\circ$ содержит все конечные пересечения своих множеств, так как в противном случае мы присоединили бы их к системе, не изменив при этом пересечения всех множеств системы. При сделанном предположении система $\mathfrak{F}^\circ$ оказывается базисом некоторого фильтра $\mathfrak{F}$. Применяя к $\mathfrak{F}$ лемму, найдем ультрафильтр $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}$. По условию $\mathfrak{U}$ сходится. Пусть, например, $\mathfrak{U} \rightarrow x$. Рассмотрим произвольное множество $F \in \mathfrak{F}^\circ$ и произвольную окрестность V_x точки x . Поскольку $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}^\circ$, то $F \in \mathfrak{U}$ и аналогично, $V_x \in \mathfrak{U}$. Но тогда пересечение $V_x \cap F$ также входит в $\mathfrak{U}$ и, тем самым, непусто. Учитывая замкнутость множества F , можем заключить отсюда, что $x \in F$. Ввиду произвольности множества F , получаем,

в конце концов, что $x \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}^\circ} F \neq \Delta$, что и требовалось доказать.

Понятие фильтра можно связать с понятием обобщенной последовательности. Пусть имеется фильтр $\mathfrak{F}$ или даже базис фильтра $\mathfrak{F}^\circ$. Из каждого множества $F \in \mathfrak{F}^\circ$ выберем произвольным образом точку x_F . Если считать $F_1 \not\subset F_2$ в случае, когда $F_1 \subset F_2$, то $\mathfrak{F}^\circ$ становится направлением и можно рассматривать обобщенную последовательность $\{x_F\}$ ($F \in \mathfrak{F}^\circ$). О каждой такой обобщенной последовательности будем говорить, что она *порождена*

базисом фильтра $\mathfrak{F}^\circ$. Если фильтр $\mathfrak{F}$, базисом которого является $\mathfrak{F}^\circ$, сходится к точке x , то и любая порожденная базисом $\mathfrak{F}^\circ$ обобщенная последовательность будет сходиться к x . Действительно, если V_x —некоторая окрестность точки x , то по определению сходимости фильтра $V_x \in \mathfrak{F}$, следовательно, найдется $F_0 \in \mathfrak{F}^\circ$ так, что $F_0 \subset V_x$. Ясно, что при $F \supset F_0$ ($F \in \mathfrak{F}^\circ$) будет $x_F \in F \subset F_0 \subset V_x$, а это и означает сходимость $x_F \rightarrow x$.

Рассмотрим теперь данную обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). Система $\mathfrak{F}^\circ$, состоящая из множеств $F_\alpha = \{x_{\alpha'}\}$ ($\alpha' \prec \alpha$) удовлетворяет условиям базиса фильтра. Соответствующий фильтр $\mathfrak{F}$ называется *порожденным* данной обобщенной последовательностью или фильтром данной обобщенной последовательности. И здесь сходимость $x_\alpha \rightarrow x$ влечет сходимость $\mathfrak{F} \rightarrow x$.

Переходя от фильтра $\mathfrak{F}$ или его базиса $\mathfrak{F}^\circ$ к какой-нибудь порожденной им обобщенной последовательности, а от нее к порожденному ею фильтру, мы получим фильтр $\mathfrak{F}'$, более тонкий, чем исходный фильтр $\mathfrak{F}$. Действительно, пусть $F_0 \in \mathfrak{F}^\circ$. Для $F \supset F_0$ будет $x_F \in F \subset F_0$, так что множество $F'_F = \{x_F\}$ ($F \supset F_0$) содержится в множестве F_0 . Следовательно, $\mathfrak{F}^\circ \subset \mathfrak{F}'$ и также $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$.

Если, однако, фильтр $\mathfrak{F}$ является ультрафильтром, то, понятно, $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$.

5.12. В заключение докажем теорему о компактности произведения компактных пространств.

Теорема 6 (5.1). Если X_1, X_2 —компактные пространства, то и пространство $X = X_1 \times X_2$ компактно.

Доказательство. Для каждой точки $x = (x_1, x_2) \in X$ положим $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = x_2$.

Рассмотрим ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в пространстве X и пусть

$$\mathfrak{U}_1 = \varphi_1(\mathfrak{U}) = \{\varphi_1(F)\} \quad (F \in \mathfrak{U});$$

аналогично определим $\mathfrak{U}_2$.

Докажем, что $\mathfrak{U}_1$ является фильтром в X_1 . Пусть $F_1 \in \mathfrak{U}_1$. По определению существует такое $F \in \mathfrak{U}$, что $F_1 = \varphi_1(F)$. Так как $F \subset \varphi_1^{-1}(F_1)$, то множество $\varphi_1^{-1}(F_1) \in \mathfrak{U}$. Отсюда и следует, что система $\mathfrak{U}_1$ удовлетворяет условиям определения фильтра. Проверим, что $\mathfrak{U}_1$ —ультрафильтр. В противном случае имеется существенно более тонкий чем $\mathfrak{U}_1$ фильтр $\tilde{\mathfrak{U}}_1$. Пусть $\tilde{F}_1 \in \tilde{\mathfrak{U}}_1 \setminus \mathfrak{U}_1$. По определению фильтра $\mathfrak{U}_1$ будет $\tilde{F} = \varphi_1^{-1}(\tilde{F}_1) \in \mathfrak{U}$. Поэтому пересечения $\tilde{F} \cap F$ ($F \in \mathfrak{U}$) образуют базис фильтра существенно более тонкого, чем $\mathfrak{U}$, что невозможно.

Итак, $\mathfrak{U}_1$ и аналогично $\mathfrak{U}_2$ —ультрафильтры. По теореме 5 фильтр $\mathfrak{U}_1$ сходится к некоторой точке $x_1 \in X_1$, а $\mathfrak{U}_2$ —к точке $x_2 \in X_2$. Пусть V_x —произвольная окрестность точки $x = (x_1, x_2) \in X$. Можно считать, что $V_x = \varphi_1^{-1}(V_{x_1}) \cap \varphi_2^{-1}(V_{x_2})$, где V_{x_1} есть окрестность точки x_1 (в пространстве X_1), а V_{x_2} —точки x_2 (в пространстве X_2). Поскольку $\mathfrak{U}_1 \rightarrow x_1$, $\mathfrak{U}_2 \rightarrow x_2$, будет $V_{x_1} \in \mathfrak{U}_1$, $V_{x_2} \in \mathfrak{U}_2$. Следовательно, как отмечалось, $\varphi_1^{-1}(V_{x_1})$, $\varphi_2^{-1}(V_{x_2}) \in \mathfrak{U}$, а тогда и $V_x = \varphi_1^{-1}(V_{x_1}) \cap \varphi_2^{-1}(V_{x_2}) \in \mathfrak{U}$, а это, в свою очередь, означает, что $\mathfrak{U} \rightarrow x$. По теореме 5 заключаем о компактности пространства X .

Замечание. В теоремах 5 и 6 можно вместо компактных пространств говорить о компактных в себе множествах в топологических пространствах.

ГЛАВА II

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА*)

§ 1. Линейные множества

1.1. К понятию метрического пространства мы пришли, когда при рассмотрении множества вещественных чисел, отвлекаясь от прочих свойств, сосредоточили наше внимание на одном свойстве этого множества — наличии расстояния в нем. Мы назвали метрическим пространством абстрактное множество, в котором определено расстояние между двумя элементами, удовлетворяющее таким же условиям, что и расстояние между точками на прямой.

Подобным же образом, сосредоточив внимание на алгебраических операциях в множестве вещественных чисел, выделяя некоторые из этих операций и их основные свойства, мы приходим к понятию линейного множества. Так мы называем абстрактное множество, для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественное число с выполнением обычных для этих действий законов, которые полностью перечислены в данном ниже определении.

Множество X называется *линейным множеством* (вещественным), если для каждых двух его элементов x и y определена их сумма $x + y$ — элемент того же множества, и для любого элемента x и вещественного числа λ определено произведение λx , являющееся также элементом множества X , причем эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);
- 2) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
- 3) в X существует такой элемент 0 , что для любого $x \in X$ будет $0 \cdot x = 0$;
- 4) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
- 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ } (дистрибутивность)
- 6) $(\lambda \mu) x = \lambda(\mu x)$ (ассоциативность умножения);
- 7) $1 \cdot x = x$.

*) Основные понятия этой главы (§ 1—2) введены Банахом [9а]; см. также монографию Банаха-И.

Если в множестве X введены операции сложения и умножения на вещественное число так, что X превращено в линейное множество, то говорят, что X *линеаризовано*.

Все введенные выше как метрические пространства множества S , $S^{(n)}$, S , s , M_T являются, как нетрудно видеть, и линейными множествами, если сумму двух элементов этих множеств определить как функцию,*) равную сумме соответствующих функций, и аналогичным образом определить произведение элемента на вещественное число. Роль нулевого элемента во всех этих множествах играет функция, тождественно равная нулю.

Другим примером линейного множества является множество L_n всех n -мерных векторов, линеаризованное естественным образом. Это линейное множество служит основным предметом изучения в линейной алгебре.

1.2. Укажем на простейшие следствия из аксиом 1) — 7). (x, y, z здесь означают элементы одного и того же линейного множества X , а λ, μ — вещественные числа).

а) $x + 0 = x$.

Действительно, $x + 0 = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x$. (аксиомы 3), 4), 7)).

б) Каждому x отвечает единственный элемент x' такой, что $x + x' = 0$. Именно: $x' = (-1) \cdot x$. Элемент x' обозначается обычно $-x$ и называется противоположным (по отношению к x) элементом.

Как уже было указано, возьмем $x' = (-1) \cdot x$. Тогда опять по аксиомам 3), 4), 7): $x + x' = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Если же имеется еще элемент $\bar{x}$, для которого также $x + \bar{x} = 0$, то в силу ассоциативности и коммутативности сложения получаем, используя а)

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0 = x' + (x + \bar{x}) = (x' + x) + \bar{x} = (x + x') + x = \\ &= 0 + \bar{x} = \bar{x} + 0 = \bar{x}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Из доказанного ясно, что линейное множество X представляет абелеву группу относительно операции сложения. Так как в множестве X определено также и второе действие, то говорят, что линейное множество есть группа с оператором умножения на вещественное число.

с) $-(\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x)$.

В самом деле, по б) и 7) имеем

$$-(\alpha x) = (-1) \cdot (\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot ((-1) \cdot x) = \alpha \cdot (-x).$$

*) s можно также рассматривать как совокупность функций. Именно как множество всевозможных вещественных функций, заданных на множестве N натуральных чисел.

д) Каковы бы ни были x и y , существует единственный элемент z такой, что $z + y = x$; его называют разностью элементов x и y и обозначают $z = x - y$.

Положим $z = x + (-y)$. С помощью доказанного выше находим

$$z + y = (x + (-y)) + y = x + (y + (-y)) = x + 0 = x.$$

Если бы существовал еще один элемент $\bar{z}$, удовлетворяющий указанному условию, то

$$\bar{z} = \bar{z} + 0 = \bar{z} + (y + (-y)) = (\bar{z} + y) + (-y) = x + (-y) = z.$$

е) $x = y$ эквивалентно $x - y = 0$.

Действительно, если $x = y$, то, очевидно,

$$x - y = x + (-y) = y + (-y) = 0.$$

Если же $x - y = 0$, то $y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + 0 = x$.

ф) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$; $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.

Вследствие дистрибутивности умножения с помощью б) и с) получаем $\lambda(x - y) = \lambda[x + (-y)] = \lambda x + \lambda(-y) = \lambda x + (-\lambda y) = \lambda x - \lambda y$ и $(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + (-\mu x) = \lambda x - \mu x$.

г) $\lambda 0 = 0$.

В самом деле, $\lambda 0 = \lambda(0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0)x = 0 \cdot x = 0$.

h) Если $\lambda x = 0$ и $\lambda \neq 0$, то $x = 0$.

Действительно, $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0 = 0$.

i) Если $\lambda x = \lambda y$ и $\lambda \neq 0$, то $x = y$.

Очевидным образом следует из предыдущего пункта и пункта е).

j) Если $\lambda x = 0$ и $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.

В самом деле, если бы $\lambda \neq 0$, то согласно h) было бы $x = 0$.

к) Если $\lambda x = \mu x$ и $x \neq 0$, то $\lambda = \mu$.

Очевидно.

В заключение отметим, что благодаря ассоциативности сложения вместо суммы $(x + y) + z$ или суммы $x + (y + z)$ можно писать, опуская скобки, $x + y + z$ и аналогичным образом поступать при большем числе слагаемых.

1.3. Если в определении линейного множества исходить из множества комплексных чисел, то мы естественным образом придем к понятию *комплексного линейного множества*. Так называется множество, для элементов которого определено сложение и умножение на комплексное число, причем, так же как и в вещественном случае, соблюдены аксиомы 1) — 7).

Ясно, что все следствия из аксиом будут одинаково верны как в вещественном, так и в комплексном случае, лишь бы при выводе

их не были использованы такие свойства вещественных чисел, которыми комплексные числа не обладают, например упорядоченность. Ввиду этого нет необходимости рассматривать отдельно комплексные линейные множества, за исключением немногочисленных случаев, предусмотренных выше.

1.4. Как и в случае метрических пространств, мы не будем различать линейные множества X и Y , если между их элементами можно установить *линейный изоморфизм* — такое взаимно-однозначное соответствие $x \longleftrightarrow y$, что $x_1 \longleftrightarrow y_1$ и $x_2 \longleftrightarrow y_2$ влечет за собой $\lambda x_1 + \mu x_2 \longleftrightarrow \lambda y_1 + \mu y_2$.

Так, с этой точки зрения множество вещественных чисел и множество точек на прямой должны рассматриваться как одно и то же линейное множество, что, как известно, и делается в анализе.

1.5. Рассмотрим множество X_0 , содержащееся в линейном множестве X и такое, что если $x, y \in X_0$, то и линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in X_0$. В X_0 определены, таким образом, операции сложения элементов и умножения элемента на вещественное число, приводящие к элементам из X_0 . При этом для X_0 выполнена аксиома 3) линейного множества ($0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$). Остальные аксиомы соблюдены для X_0 , поскольку они имеют место в X . Следовательно, X_0 естественным образом оказывается линейным множеством.

Очевидно, пересечение любой совокупности линейных множеств в X является снова линейным множеством. Поэтому, если A — некоторое множество в X , то существует наименьшее линейное множество $\mathcal{L}(A)$, содержащее A . Это будет пересечение всех линейных множеств, содержащих A . Множество $\mathcal{L}(A)$ называется *линейной оболочкой множества A* .

Легко убедиться, что $\mathcal{L}(A)$ совпадает с множеством $\tilde{L}$ всех элементов x вида: $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольный набор элементов из A , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа.

В самом деле, $\tilde{L}$, очевидно, линейное множество и содержит A . С другой стороны, всякое линейное множество, содержащее A , должно содержать и всевозможные линейные комбинации элементов из A , т. е. должно содержать $\tilde{L}$. Следовательно, $\mathcal{L}(A) = \tilde{L}$.

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно-независимыми*, если соотношение вида: $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 =$

$= \dots = \lambda_n = 0$. В противном случае элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *линейно-зависимыми*. Так, например, элементы x и $-x$ линейно-зависимы, так как $1 \cdot x + 1 \cdot (-x) = 0$. Если среди элементов $x_1, \dots, x_n$ есть равный нулю, то они также линейно-зависимы.

Бесконечная система элементов называется *линейно-независимой*, если любой конечный набор различных элементов этой системы линейно-независим.

Если элементы $\{x_\xi\}$ образуют линейно-независимую систему, то ясно, что из равенства

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{\xi_k} = \sum_{k=1}^n \mu_k x_{\xi_k}$$

вытекает равенство

$$\lambda_k = \mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Примером линейно-независимой системы в пространстве S является система $\{x_n\}$ ($x_n(t) = t^n$).

Линейно-независимая система $\{x_\xi\}$ называется *алгебраическим базисом* линейного множества X , если $\mathcal{L}(\{x_\xi\}) = X$. Таким образом, всякий элемент $x \in X$ может быть представлен в форме линейной комбинации элементов алгебраического базиса и, как это следует из сказанного выше, единственным образом.

Среди всех линейных множеств с этой точки зрения наиболее простыми являются те, которые имеют конечный алгебраический базис. Такие множества называются *конечномерными*, а число элементов, образующих базис, называется *размерностью* данного линейного множества. Как нетрудно показать, размерность линейного множества является его инвариантом, т. е. не зависит от выбора того или иного алгебраического базиса.

Пусть X — конечномерное линейное множество (размерности n). Как уже отмечалось, каждый элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, где $x_1, \dots, x_n$ — алгебраический базис. Соотнося элементу x вектор $\bar{x} \in L_n$ с компонентами $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, мы установим взаимно-однозначное соответствие между X и L_n , которое является линейным изоморфизмом, так как если $x \leftrightarrow \bar{x}$ и $y \leftrightarrow \bar{y}$, то $\lambda x + \mu y \leftrightarrow \lambda \bar{x} + \mu \bar{y}$. Согласно сделанному выше замечанию мы вправе отождествить множества X и L_n , рассматривая, таким образом, X как векторное множество.

По этой причине линейные множества (даже и не конечномерные) называются иногда *векторными пространствами*, а их элементы — *векторами*.

1.6. В линейном множестве X можно ввести понятие *выпуклого множества*. Так называется множество, обладающее тем свойством, что вместе с двумя элементами x и y оно содержит и всякую их линейную комбинацию $\lambda x + \mu y$, коэффициенты которой λ и μ — вещественные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию: $\lambda + \mu = 1$. Ясно, что если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — элементы выпуклого множества, то элемент

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1; \lambda_k \geq 0 \right) \quad (1)$$

также входит в рассматриваемое множество.

Если E — произвольное множество, входящее в X , то можно говорить о *выпуклой оболочке* $\mathcal{C}(E)$ множества E , понимая под этим наименьшее выпуклое множество, содержащее E . Как и для линейной оболочки, устанавливается, что $\mathcal{C}(E)$ состоит из всех элементов $x \in X$, допускающих представление в форме (1) с $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$.

Выпуклые множества изучались Мазуром [74].

1.7. В заключение укажем на некоторые обозначения, которые мы будем иногда использовать в дальнейшем.

Пусть E_1 и E_2 — два множества в линейном множестве X . Совокупность всех элементов $x \in X$, которые могут быть представлены в форме $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, обозначается $E_1 + E_2$ и называется *суммой* (алгебраической) данных множеств. Если, в частности, E_1 состоит из единственного элемента x_0 , то вместо $E_1 + E_2$ мы будем писать просто $x_0 + E_2$. Если трактовать элемент x_0 как вектор, то множество $x_0 + E_2$ есть результат переноса множества E_2 на вектор x_0 .

Аналогичным образом, если λ — число, а $E \subset X$, то под λE мы понимаем множество всех элементов вида λx , где $x \in E$. Множество λE можно рассматривать как результат применения к E преобразования подобия (гомотетии) с центром в 0 и коэффициентом подобия λ . Если $\lambda = -1$, то вместо $(-1)E$ пишут $-E$.

Подобные упрощения в записи употребляются и в других случаях. Так, например, обозначение $E_1 - E_2$ заменяет символ $E_1 + (-E_2)$ и т. д.

Не останавливаясь на формулировке простых соотношений, связанных с введенными обозначениями, укажем для иллюстрации лишь одно из них: если E — выпуклое множество, а вещественные неотрицательные числа α, β таковы, что $\alpha + \beta = 1$, то $E = \alpha E + \beta E$. Любопытно отметить, что в случае произвольного E можно утверждать только, что $E \subset \alpha E + \beta E$.

§ 2. Основные определения и простейшие свойства нормированных пространств

2.1. Очень часто метрическое пространство является в то же время и линейным множеством. Таковы, например, все конкретные метрические пространства, рассмотренные выше в качестве примеров линейных пространств. Поэтому представляется целесообразным изучение класса таких линейных множеств, в которых, кроме того, еще введена и метрика. Однако, если линеаризация и метрика никак не связаны между собой, то, очевидно, нельзя построить содержательной теории, факты которой соединяли бы вместе алгебраические *) и метрические понятия. Ввиду этого накладывают на метрику, введенную в линейном множестве, те или иные ограничения, и обычно

*) Т. е. относящиеся к линейному множеству.

саму метрику вводят, не задавая непосредственно расстояния между всевозможными парами точек из рассматриваемого пространства, а используя наличие в пространстве алгебраических операций.

Важнейшими пространствами такого рода являются так называемые нормированные пространства. Все дальнейшее изложение в книге за редкими исключениями относится к этим пространствам.

Линейное (векторное) множество X называется *нормированным пространством*, если каждому элементу $x \in X$ сопоставлено вещественное число $\|x\| \geq 0$ («длина» вектора x), называемое *нормой* элемента x ,*) причем соблюдены условия (аксиомы нормированного пространства):

- 1) $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность нормы);
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Положив для $x, y \in X$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\|, \quad (1)$$

мы обращаем X в метрическое пространство. Действительно, $\rho(x, y) = 0$ означает $\|x - y\| = 0$, что по условию 1) равносильно равенству $x - y = 0$, а это, в свою очередь, эквивалентно $x = y$ (см. II.1.2,е)). Симметрия расстояния очевидна из самого определения. Наконец, неравенство треугольника для расстояния является простым следствием неравенства треугольника для нормы:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = \|x - y\| &= \|(x - z) + (z - y)\| \leq \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Очевидно, метрика, определенная таким образом в линейном множестве, обладает, кроме указанных общих свойств, дополнительно еще двумя свойствами:

- 1) *транзитивность*:

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \quad (x, y, z \in X)$$

(расстояние не меняется при переносе);

- 2) *однородность*:

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y) \quad (\lambda \geq 0; x, y \in X).$$

Если в метрическом пространстве X , являющемся одновременно линейным множеством, метрика удовлетворяет этим двум условиям, то X можно рассматривать как нормированное пространство. Именно надо положить

$$\|x\| = \rho(x, 0). \quad (2)$$

*) Если одновременно рассматриваются несколько нормированных пространств, то, чтобы отличить норму в одном пространстве от нормы в другом, указывают это пространство в виде индекса, например $\|x\|_X$.

Введенные выше как метрические пространства R^n , C , $C^{(n)}$, M_T , будучи линейными множествами, нормируемы. В соответствии с формулой (2) норму в R^n следует определить так:

$$\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)).$$

В пространстве C :

$$\|x\| = \max_{n \leq t \leq b} |x(t)|,$$

и аналогично в пространстве M_T

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Метрические пространства S и s , хотя они и являются линейными множествами, не будут нормированными пространствами, так как ни в одном из этих пространств выражение $\rho(x, 0)$ не удовлетворяет условию однородности и потому не может быть нормой.

2.2. В нормированных пространствах имеют место все факты, установленные для метрических пространств и линейных множеств. Ввиду важности нормированных пространств приведем некоторые из этих фактов, формулируя их в новых терминах.

а) Имеет место неравенство:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \quad (3)$$

По неравенству треугольника $\|x\| \leq \|y\| + \|x - y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Меняя x и y ролями, находим $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, и, следовательно, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, что и требовалось доказать. Отметим, что доказанное неравенство получается из неравенства (1) из 1.1.2, если принять во внимание соотношения (1) и (2).

б) $x_n \rightarrow x_0$ эквивалентно $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$.

Это утверждение вытекает из соотношения (1).

с) $\|x\|$ — непрерывная функция от x , т. е. если $x_n \rightarrow x_0$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$.

В самом деле, с помощью неравенства (3) получаем

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0.$$

д) Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такое число K , что $\|x_n\| \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$).

Справедливость этого предложения следует из с).

е) Операции $x + y$ и λx непрерывны, т. е. если $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, то $x_n + y_n \rightarrow x_0 + y_0$ и $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$.

В самом деле,

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \rightarrow 0;$$

и

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0) + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + \\ &+ |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.3. В нормированных пространствах имеет смысл понятие линейного множества. Отметим следующий факт: замыкание линейного множества снова является линейным множеством. Это непосредственно следует из 2.2, е). Таким образом, если для данного множества $E \subset X$ образовать линейную оболочку $\mathcal{L}(E)$ и затем построить ее замыкание $\overline{\mathcal{L}(E)}$, то это будет наименьшее замкнутое линейное множество содержащее E , так как всякое замкнутое линейное множество $\tilde{L}$, содержащее E , должно содержать $\mathcal{L}(E)$, а, значит, и $\overline{\mathcal{L}(E)}$. Множество $\overline{\mathcal{L}(E)}$ называется *линейным замыканием* E .

Учитывая строение линейной оболочки $\mathcal{L}(E)$ множества E (см. II.1.5), можно утверждать, что и $\overline{\mathcal{L}(E)}$ состоит из всех элементов $x \in X$, которые допускают представление в форме

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)} \quad (x_k^{(n)} \in E; k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots).$$

Система элементов $\{x_\alpha\}$ называется *полной* в пространстве X , если $\overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})} = X$, т. е. если множество всевозможных линейных комбинаций элементов x_α плотно в X .

В нормированных пространствах можно рассматривать выпуклые множества. Примером такого множества является сфера $K_r(x_0)$ или ее замыкание, т. е. множество элементов $x \in X$, для которых

$$\|x - x_0\| < r \quad (\leq r).$$

Действительно, если $x, y \in K_r(x_0)$ ($\lambda + \mu = 1$; $\lambda, \mu \geq 0$), то

$$\begin{aligned} \|(\lambda x + \mu y) - x_0\| &= \|\lambda(x - x_0) + \mu(y - x_0)\| \leq \\ &\leq \lambda\|x - x_0\| + \mu\|y - x_0\| < r, \end{aligned}$$

так что $\lambda x + \mu y \in K_r(x_0)$.

Подобно тому, как это было сделано для линейного замыкания, можно ввести *выпуклое замыкание*, понимая под этим множество $\overline{C(E)}$, т. е. замыкание выпуклой оболочки множества E . Как и выше, устанавливается, что $\overline{C(E)}$ есть наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее E .

2.4. Особо важную роль среди нормированных пространств играют полные пространства, которые называются *пространствами типа В* или *В-пространствами* (по имени польского математика С. Банаха).

В терминах нормы сходимости в себе последовательности $\{x_n\}$ означает, что $\|x_m - x_n\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому условие полноты нормированного пространства X выглядит так: из того, что $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ вытекает существование такого $x_0 \in X$, что $x_n \rightarrow x_0$.

Очевидно, пространства R^n , C , $C^{(n)}$, M_T , будучи полными, являются *В-пространствами*.

Если данное нормированное пространство X — неполное, то его можно погрузить в полное метрическое пространство $\tilde{X}$ (теорема 1 (2.1)). Алгебраические операции и норма, определенные лишь на X , можно однозначно распространить на $\tilde{X}$, превратив его тем самым в B -пространство.

Для доказательства этого воспользуемся сделанным в 1.2.4. замечанием о том, что пространство X плотно в своем пополнении $\tilde{X}$.

Пусть $x, y \in \tilde{X}$. Существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ элементов из X , сходящиеся к x , соответственно к y . Операция сложения в пространстве X определена, поэтому имеет смысл $z_n = x_n + y_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как

$$\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

то последовательность $\{z_n\}$ сходится в себе в пространстве X и, тем самым, в пространстве $\tilde{X}$. Следовательно, существует элемент $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \tilde{X}$. По определению полагаем $x + y = z$. Нетрудно убедиться, что определение элемента z не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. В самом деле, пусть

$$x'_n \rightarrow x, y'_n \rightarrow y \quad (x'_n, y'_n \in X; \quad n = 1, 2, \dots)$$

и $z'_n = x'_n + y'_n$. Так как

$$\|z'_n - z_n\| \leq \|x'_n - x_n\| + \|y'_n - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Отсюда, в частности, следует, что для элементов пространства X новое определение суммы приводит к уже имеющемуся. Действительно, если $x, y \in X$, то можно положить $x_n = x, y_n = y$ ($n = 1, 2, \dots$), так что $z = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$, где знак плюс понимается в первоначальном смысле.

Аналогичным образом в $\tilde{X}$ определяется произведение элемента на число.

Полагая в соответствии с формулой (2) для $x \in \tilde{X}$

$$\|x\| = \rho(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

$$(x_n \rightarrow x; x_n \in X; n = 1, 2, \dots),$$

мы без труда убедимся, что $\tilde{X}$ удовлетворяет аксиомам нормированного пространства. Из этого же равенства следует однозначность определения нормы.

Однозначность определения суммы элементов и произведения элемента на число без труда получается, если воспользоваться непре-

рывностью этих операций. Предоставляем читателю самостоятельно провести относящиеся сюда несложные рассуждения.

Впредь, говоря о пополнении нормированного пространства, мы будем считать его линейризованным и нормированным указанным выше способом.

2.5. В нормированном пространстве можно рассматривать бесконечные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad (4)$$

Ряд (4) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{s_n\}$ его частных сумм: $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Суммой ряда называется предел s этой последовательности: $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

В B -пространстве из «абсолютной» сходимости ряда вытекает обычная сходимость, т. е. если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| + \dots, \quad (5)$$

то сходится и ряд (4), причем справедлива оценка $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Действительно, если $m > n$, то

$$s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m,$$

и, следовательно,

$$\|s_m - s_n\| \leq \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \dots + \|x_m\|.$$

Поскольку ряд (5) сходится, правая часть в этом неравенстве сколь угодно мала при достаточно большом n . Стало быть, последовательность $\{s_n\}$ сходится в себе, а следовательно, в силу полноты пространства, сходится. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\|s_n\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

и используя непрерывность нормы, получаем требуемую оценку.

2.6. Нормированное пространство является одновременно метрическим пространством и линейным множеством, поэтому термин «подпространство» в данном случае целесообразно применять лишь к множеству, являющемуся, с одной стороны, подпространством метрического пространства и, с другой стороны, линейным множеством. В соответствии с этим *подпространством* нормированного пространства X мы будем называть любое замкнутое линейное множество, содержащееся в X .

В силу замечания в 1.2.1 подпространство B -пространства само является B -пространством.

2.7. Если два нормированных пространства изометричны как метрические пространства и изоморфны как линейные множества, то они называются линейно изометричными. Точнее говоря, пространства X и Y *линейно изометричны*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие $x \longleftrightarrow y$ так, что из $x \longleftrightarrow y$ следует $\|x\| = \|y\|$ и $\lambda x \longleftrightarrow \lambda y$, а из $x_1 \longleftrightarrow y_1$ и $x_2 \longleftrightarrow y_2$ вытекает $x_1 + x_2 \longleftrightarrow y_1 + y_2$.

В дальнейшем мы не будем различать линейно изометричные пространства. (Ср. I.1.7 и II.1.4).

Чтобы установить, что пространство X линейно изометрично пространству Y , нет необходимости проверять наличие взаимно-однозначного соответствия между элементами этих пространств. Достаточно установить, что имеется соответствие $x \rightarrow y$ ($x \in X$, $y \in Y$) такое, что

1) каждый $y \in Y$ сопоставлен, по крайней мере, одному $x \in X$;

2) если $x' \rightarrow y'$, $x'' \rightarrow y''$, то $\lambda x' + \mu x'' \rightarrow \lambda y' + \mu y''$;

3) если $x \rightarrow y$, то $\|x\| = \|y\|$.

Действительно, при этих условиях соответствие взаимно-однозначно, так как если $x' \rightarrow y$, $x'' \rightarrow y$, то по второму условию $x' - x'' \rightarrow y - y = 0$, а тогда по третьему условию $\|x' - x''\| = \|0\| = 0$, т. е. $x' = x''$.

Предоставляем читателю убедиться, что фактически достаточно проверить условие 2) лишь для случая $\lambda = -\mu = 1$, если X и Y — вещественные пространства, и дополнительно для случая $\lambda = i$, $\mu = 0$, если пространства X и Y комплексные.

2.8. Рассмотрим более подробно конечномерные нормированные пространства. Как уже упоминалось (II.1.5), ν -мерное линейное множество изоморфно множеству векторов ν -мерного евклидова пространства, и потому можно считать, что элементы рассматриваемого пространства X суть ν -членные комплексы чисел. Пусть

$$e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad (\text{единица на } k\text{-ом месте}).$$

Тогда, если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)$, то

$$x = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k e_k$$

и, следовательно,

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\nu} |\xi_k| \|e_k\| = \sum_{k=1}^{\nu} a_k |\xi_k|,$$

где $a_k = \|e_k\|$ не зависят от x .

Отсюда вытекает, что если последовательность $\{x_n\}$ ($x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_\nu^{(n)})$) такова, что

$$\xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, \nu), \quad (6)$$

то $x_n \rightarrow x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_\nu^{(0)})$.

Действительно,

$$\|x_n - x_0\| \leq \sum_{k=1}^v a_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| \rightarrow 0.$$

Справедливо и обратное утверждение. Точнее, имеет место

Теорема 1 (2.II). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к элементу $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы имело место (6).*)

Доказательство. Достаточность условия уже установлена выше. Докажем его необходимость.

Лемма. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то ограничена и каждая из последовательностей $\{\xi_k^{(n)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, v$).

Доказательство. Введем обозначения

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^v |\xi_k^{(n)}| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и докажем, что последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена. В противном случае можно было бы выделить из нее последовательность, сходящуюся к бесконечности. Не уменьшая общности, будем считать, что уже $\sigma_n \rightarrow \infty$. Положим

$$y_n = \frac{x_n}{\sigma_n}; \quad y_n = (\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \dots, \eta_v^{(n)})$$

$$(\eta_k^{(n)} = \frac{\xi_k^{(n)}}{\sigma_n}; k = 1, 2, \dots, v; n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, каждая из последовательностей $\{\eta_k^{(n)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, v$) ограничена ($|\eta_k^{(n)}| \leq 1$), так что, переходя, если нужно, к подпоследовательностям, можно считать, что существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_k^{(n)} = \eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, v).$$

На основании сказанного ранее отсюда следует, что $y_n \rightarrow y$, где $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_v)$. Но, с другой стороны,

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{\sigma_n} \rightarrow 0,$$

т. е. $y_n \rightarrow 0$ и $y = 0$. Иными словами, $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_v = 0$. Это, однако, невозможно, потому что

$$\sum_{k=1}^v |\eta_k^{(n)}| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $x_0 = 0$, т. е. когда $x_n \rightarrow 0$. Последо-

*) По существу эта теорема доказана Риссом в монографии Рисс-И,

вательность $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ ограничена, поэтому по лемме должны быть ограничены последовательности $\left\{ \frac{\xi_k^{(n)}}{\|x_n\|} \right\}$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$), что возможно лишь в случае, когда $\xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$).

Следствие 1. Для того чтобы множество E конечномерного нормированного пространства X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.

В самом деле, если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то, полагая $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_\nu^{(n)})$ ($n = 1, 2, \dots$), на основании леммы заключаем, что при каждом $j = 1, 2, \dots, \nu$ числовая последовательность $\{\xi_j^{(n)}\}$ ограничена. Поэтому по известной теореме Больцано — Вейерштрасса существует последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ такая, что

$$\xi_j^{(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

В силу (6) $x_{n_k} \rightarrow x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_\nu^{(0)})$.

Следствие 2. Конечномерное нормированное пространство X полно.

Действительно, если $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность, то она ограничена и, тем самым, по предыдущему следствию из нее можно выделить сходящуюся к некоторому элементу $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Не составляет труда проверить, что и $x_n \rightarrow x_0$.

Следствие 3. Конечномерное линейное множество X_0 в нормированном пространстве X замкнуто.

Следствие 4. Пусть X — нормированное пространство, и X_0 — конечномерное линейное множество в X . Каков бы ни был элемент $x \in X$, в X_0 найдется элемент x_0 , реализующий расстояние от x до X_0 , т. е. такой, что $\|x - x_0\| = \rho(x, X_0)$.

В самом деле, для каждого $n = 1, 2, \dots$ в X_0 найдется элемент x_n так, что $\|x - x_n\| < \rho(x, X_0) + \frac{1}{n}$. Последовательность $\{x_n\}$, очевидно, ограничена, так как

$$\|x_n\| \leq \|x\| + \|x - x_n\| < \|x\| + \rho(x, X_0) + 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

поэтому на основании следствия 1 из нее можно выделить сходящуюся последовательность $\{x_{n_k}\} : x_{n_k} \rightarrow x_0$. Ясно, что $\|x - x_0\| \leq \rho(x, X_0)$, а так как $x_0 \in X_0$, то справедливо и обратное неравенство.

В качестве применения установленного результата рассмотрим пространство C и его конечномерное подпространство H^ν , состоящее из всех алгебраических полиномов степени не выше ν . Согласно

следствию 4, какова бы ни была непрерывная функция x , существует полином x_0 из $N^\vee$ такой, что

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - x_0(t)| = \|x - x_0\| = \rho(x, N^\vee),$$

т. е. полином, дающий наилучшее приближение к функции x по сравнению со всеми остальными полиномами степени не выше ν .

2.9. В заключение покажем, что результат следствия 1 к теореме 1 обратим, т. е. докажем, что любое ограниченное множество в нормированном пространстве компактно лишь тогда, когда пространство конечномерно. *)

Докажем предварительно важную лемму.

Лемма. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \neq X$ его подпространство. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует нормированный элемент x_0 **) такой, что

$$\rho(x_0, X_0) > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку X_0 — замкнутое множество и не совпадает с X , существует элемент $\bar{x} \in X$ такой, что $\rho(\bar{x}, X_0) = d > 0$. В X_0 найдется, далее, элемент x' такого рода, что

$$\|\bar{x} - x'\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Положим

$$x_0 = \frac{\bar{x} - x'}{\|\bar{x} - x'\|} = \alpha(\bar{x} - x') \quad \left(\alpha = \frac{1}{\|\bar{x} - x'\|} > \frac{1 - \varepsilon}{d} \right).$$

Ясно, что $\|x_0\| = 1$. Кроме того, если $x \in X_0$, то

$$\begin{aligned} \|x_0 - x\| &= \|\alpha\bar{x} - \alpha x' - x\| = \\ &= \alpha \left\| \bar{x} - \left(x' + \frac{x}{\alpha} \right) \right\| \geq \alpha d > \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Нормированный элемент x_0 , обладающий тем свойством, что $\rho(x_0, X_0) = 1$, является в известном смысле перпендикуляром к X_0 (так, в евклидовом пространстве вектор x_0 , удовлетворяющий этому условию, действительно будет ортогонален к X_0). В связи с этим мы будем называть доказанную лемму леммой о почти перпендикуляре.

Теорема 2 (2.11). Для того чтобы каждое ограниченное множество в нормированном пространстве X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы X было конечномерным.

Достаточность условия уже установлена (следствие 1 к теореме 1).

*) Этот факт также установлен Ф. Риссом. См. Рисс-II.

**) Т. е. элемент, норма которого равна единице.

Необходимость. Рассмотрим произвольный нормированный элемент $x_1 \in X$ и обозначим через X_1 линейную оболочку $\mathcal{L}(\{x_1\})$ этого элемента, т. е. совокупность элементов вида λx_1 .

Предполагая X бесконечномерным, будем иметь $X_1 \neq X$, и по лемме о почти перпендикуляре найдем нормированный элемент $x_2 \in X$ такой, что $\rho(x_2, X_1) > \frac{1}{2}$. Образует линейную оболочку элементов x_1 и x_2 , которую обозначим через X_2 . Рассуждая так и дальше, приходим к последовательности элементов $\{x_n\}$ и подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ таких, что

$$\|x_n\| = 1; \quad X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}); \quad \rho(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2} \\ (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся последовательность. Однако на основании (7)

$$\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2} \quad (n > m; \quad m, n = 1, 2, \dots),$$

поэтому ни сама последовательность $\{x_n\}$, ни какая-либо ее подпоследовательность не могут сходиться.

Теорема доказана.

§ 3. Вспомогательные неравенства

В этом параграфе мы установим некоторые неравенства, которые найдут себе применение при рассмотрении конкретных примеров B -пространств (см. § 4 и 5). Литературные указания по материалу этого параграфа см. Харди, Литтлвуд, Полиа.

3.1. Докажем сначала лемму.

Лемма. Пусть p и q — вещественные положительные числа, связанные соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1)$$

Каковы бы ни были числа a и b , имеет место неравенство

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \quad (2)$$

Доказательство. Можно считать, что a и b положительны. Обозначим $\alpha = p - 1$ и $\beta = q - 1$ и предположим, что $a^\alpha \leq b$ (если $a^\alpha > b$, то, поскольку $\alpha\beta = 1$, $|a| > b^{\frac{1}{\alpha}} = b^\beta$, и надо только поменять ролями a и b). Так как

$$\int_0^a u^\alpha du = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{a^p}{p}, \quad \int_0^b v^{\frac{1}{\alpha}} dv = \int_0^b v^\beta dv = \frac{b^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{b^q}{q},$$

то $\frac{a^p}{p}$ есть площадь криволинейного треугольника OaA (рис. 2), таким же образом $\frac{b^q}{q}$ равно площади криволинейного треугольника ObB . Сумма этих площадей не меньше площади прямоугольника $OaCb$, которая равна ab . Это обстоятельство и означает неравенство (2).

3.2. Неравенство Гёльдера. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — произвольные числа. Имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

(p и q связаны соотношением (1)).

Доказательство. Обозначим $A^p = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p$ и $B^q = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q$. Можно считать, что $A, B > 0$. Положим $\xi'_k = \frac{\xi_k}{A}$, $\eta'_k = \frac{\eta_k}{B}$. Тогда на основании неравенства (2)

$$|\xi'_k \eta'_k| \leq \frac{|\xi'_k|^p}{p} + \frac{|\eta'_k|^q}{q},$$

или, суммируя,

$$\sum_{k=1}^n |\xi'_k \eta'_k| \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\xi'_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^n |\eta'_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^n |\xi_k \eta_k| \leq AB,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Неравенство Гёльдера справедливо и тогда, когда число слагаемых бесконечно (счетно), т. е. справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (3)$$

причем сходимость рядов в правой части влечет сходимость ряда в левой части.

В самом деле, для частных сумм фигурирующих в (3) рядов неравенство доказано. Предельный переход приводит к (3).

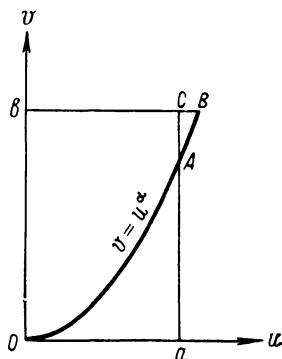


Рис. 2

3.3. Интегральное неравенство Гёльдера. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — измеримые на множестве T функции. Имеет место неравенство

$$\int_T |x(t)y(t)| dt \leq \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_T |y(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Оно по существу является повторением доказательства неравенства Гёльдера для сумм. Именно можно считать, что

$$0 < A^p = \int_T |x(t)|^p dt < \infty, \quad 0 < B^q = \int_T |y(t)|^q dt < \infty,$$

так как если один из интегралов равен нулю или бесконечности, то доказываемое неравенство тривиально.

Положим $\bar{x}(t) = \frac{x(t)}{A}$ и $\bar{y}(t) = \frac{y(t)}{B}$. Для каждого $t \in T$ согласно (1) получаем неравенство

$$|\bar{x}(t)\bar{y}(t)| \leq \frac{|\bar{x}(t)|^p}{p} + \frac{|\bar{y}(t)|^q}{q},$$

проинтегрировав которое, найдем

$$\int_T |\bar{x}(t)\bar{y}(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_T |\bar{x}(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_T |\bar{y}(t)|^q dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Откуда

$$\int_T |x(t)y(t)| dt \leq AB,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что, как и в случае неравенства для сумм, конечность интегралов в правой части неравенства влечет конечность интеграла в левой части.

Замечание. Если $p=2$ (тогда и $q=2$), то неравенства Гёльдера переходят в известные неравенства Коши и Буняковского для сумм и интегралов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_T |x(t)y(t)| dt \leq \left[\int_T |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_T |y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3.4. Обобщенное неравенство Гёльдера. Пусть положительные числа p, q, r связаны соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Тогда, каковы бы ни были измеримые функции $x(t), y(t), z(t)$, заданные на множестве T , справедливо неравенство

$$\int_T |x(t) y(t) z(t)| dt \leq \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_T |y(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_T |z(t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}}.$$

Доказательство. Определим p' равенством $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Тогда, поскольку $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, по неравенству Гёльдера имеем

$$\int_T |x(t) y(t) z(t)| dt \leq \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_T |y(t) z(t)|^{p'} dt \right]^{\frac{1}{p'}}. \quad (4)$$

Ко второму интегралу снова применим неравенство Гёльдера с показателями $\frac{q}{p'}$ и $\frac{r}{p'}$ ($\frac{p'}{q} + \frac{p'}{r} = 1$), в результате чего получим

$$\int_T |y(t) z(t)|^{p'} dt \leq \left\{ \int_T |y(t)|^{p' \cdot \frac{q}{p'}} dt \right\}^{\frac{p'}{q}} \left\{ \int_T |z(t)|^{p' \cdot \frac{r}{p'}} dt \right\}^{\frac{p'}{r}}.$$

Подставляя это в (4), приходим к требуемому неравенству.

Замечание. Обобщенное неравенство Гёльдера справедливо, разумеется, и для сумм.

Предоставляем читателю вывод неравенства, подобного доказанному, в левой части которого находится интеграл от произведения n функций.

3.5. Неравенство Минковского. Пусть $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ последовательности чисел. Имеет место неравенство

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $p > 1$ и все ξ_k и η_k неотрицательны. Кроме того, можно считать, что суммы, фигурирующие в неравенстве, имеют конечное

число слагаемых (переход к рядам осуществляется предельным переходом). При этих предположениях имеем

$$\sum_{k=1}^n [\xi_k + \eta_k]^p = \sum_{k=1}^n \xi_k [\xi_k + \eta_k]^{p-1} + \sum_{k=1}^n \eta_k [\xi_k + \eta_k]^{p-1}.$$

Применяя к каждой сумме в правой части неравенство Гёльдера, получим $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [\xi_k + \eta_k]^p &\leq \left[\sum_{k=1}^n \xi_k^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)} \right]^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)} \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Но из $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ следует $q(p-1) = p$; поэтому, умножая обе части последнего неравенства на $\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^p \right]^{-\frac{1}{q}}$, приходим к неравенству

$$\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k + \eta_k)^p \right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \left[\sum_{k=1}^n \xi_k^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^n \eta_k^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, то это и есть неравенство, подлежащее доказательству.

3.6. Интегральное неравенство Минковского. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — измеримые на множестве T функции. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left[\int_T |x(t) + y(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left[\int_T |y(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1). \end{aligned}$$

Доказательство. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ ограничены, то доказательство проводится по той же схеме, что и в 3.5 в неравенстве для сумм. Пусть поэтому $x(t)$ и $y(t)$ — неограниченные функции. Очевидно, можно считать их неотрицательными. Определим последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{y_n(t)\}$ «срезанных» функций, полагая для $n = 1, 2, \dots$,

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } |x(t)| \leq n \\ n, & \text{если } |x(t)| > n \end{cases} \quad y_n(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } |y(t)| \leq n \\ n, & \text{если } |y(t)| > n. \end{cases}$$

функции $x_n(t)$ и $y_n(t)$ при фиксированном n ограничены, поэтому

$$\left[\int_T |x_n(t) + y_n(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_T |x_n(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_T |y_n(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Последовательности $\{|x_n(t)|^p\}$ и $\{|y_n(t)|^p\}$, монотонно возрастаая, сходятся к $|x(t)|^p$, соответственно $|y(t)|^p$. Равным образом последовательность $\{|x_n(t) + y_n(t)|^p\}$, монотонно возрастаая, сходится к $|x(t) + y(t)|^p$. А тогда на основании теоремы Б. Леви (Натансон-II, стр. 156) в последнем неравенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, в результате чего получается требуемое неравенство.

§ 4. Нормированные пространства последовательностей

4.1. В этом параграфе рассматриваются некоторые примеры нормированных пространств, элементами которых являются последовательности чисел. Все эти пространства линейаризованы, как и $\mathbf{s}$, естественным образом.

Укажем прежде всего на пространство $\mathbf{m}$, состоящее из всех ограниченных последовательностей. Линейность $\mathbf{m}$ очевидна, а если положить

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)), \quad (1)$$

то $\mathbf{m}$ становится B -пространством. Проще всего в этом убедиться, заметив, что $\mathbf{m}$ есть не что иное, как пространство ограниченных функций, заданных на множестве N натуральных чисел, т. е. $\mathbf{m} = \mathbf{M}_N$. Вследствие этого, если $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$; $n = 0, 1, \dots$), то $\xi_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi_k^{(0)}$, причем сходимость равномерная относительно k .

Из пространства $\mathbf{m}$ выделяется пространство $\mathbf{s}$, элементами которого являются все сходящиеся последовательности. Норма в $\mathbf{s}$ определяется, так же как и в $\mathbf{m}$, с помощью (1).

Нетрудно видеть, что $\mathbf{s}$ есть линейное множество пространства $\mathbf{m}$. Докажем, что $\mathbf{s}$ замкнуто в $\mathbf{m}$.

Действительно, если $\{x_n\}$ — последовательность элементов из $\mathbf{s}$, сходящаяся к $x_0 \in \mathbf{m}$, то $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$. Полагая $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$ ($n = 0, 1, \dots$), будем иметь при $n \geq N_\varepsilon$

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2)$$

что можно записать и так

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k = 1, 2, \dots; n \geq N_\varepsilon).$$

Возьмем фиксированное $n \geq N_\varepsilon$. Элемент $x_n \in \mathfrak{s}$, поэтому последовательность $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots$ сходится. Следовательно, для достаточно больших k и k' будет $|\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Стало быть, для тех же k и k' будем иметь

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_{k'}^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| + |\xi_{k'}^{(n)} - \xi_{k'}^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, последовательность $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots$ сходящаяся, т. е. $x_0 \in \mathfrak{s}$.

Из доказанного вытекает, что $\mathfrak{s}$ есть подпространство B -пространства $\mathfrak{m}$, и, следовательно, само является B -пространством.

Иногда рассматривают еще пространство $\mathfrak{s}_0$ — последовательностей, сходящихся к нулю. Это тоже B -пространство.

4.2. Дальнейшие примеры B -пространств опираются на неравенства § 3.

Рассмотрим пространство l^p ($p \geq 1$; $l^1 = l$), элементами которого являются все такие числовые последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$.

Если $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\} \in l^p$, то в силу неравенства Минковского

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \leq \left\{ \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right\}^p < \infty,$$

так что $x + y \in l^p$. Отсюда ясно, что l^p — линейное множество. Если положить

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)),$$

то l^p становится нормированным пространством (неравенство треугольника в l^p — не что иное, как неравенство Минковского).

Докажем, что l^p — полное пространство. С этой целью рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ элементов из l^p , сходящуюся в себе. Пусть $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$. Так как

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \|x_m - x_n\|,$$

то каждая из последовательностей $\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots, \xi_j^{(n)}, \dots$ сходится. Положим $\xi_j^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots$). Установим, что последова-

тельность $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$ входит в l^p и что $x_n \rightarrow x_0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N_ε , что при $m, n \geq N_\varepsilon$

$$\|x_m - x_n\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Тем более будет

$$\left[\sum_{k=1}^r |\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Переходя здесь к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\left[\sum_{k=1}^r |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon; \quad r = 1, 2, \dots).$$

Так как это неравенство справедливо при любом r , то будет также

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon), \quad (3)$$

т. е. последовательность $x_0 - x_n \in l^p$. Но $x_n \in l^p$, а потому $x_0 = (x_0 - x_n) + x_n \in l^p$. Из (3) вытекает далее, что

$$\|x_0 - x_n\| \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon).$$

Следовательно, $x_n \rightarrow x_0$.

l^p — *сепарабельное пространство*, так как счетное множество последовательностей с рациональными координатами, которые, начиная с некоторого номера, равны нулю, очевидно, плотно в l^p . Сепарабельными также являются пространства s и s_0 ; предоставляем читателю убедиться, что пространство m несепарабельно.

4.3. Укажем на связанные с только что введенными пространствами последовательностей m и l^p конечномерные (разномерности v) пространства m_v и l_v^p . Так как два конечномерных пространства одинаковой размерности алгебраически изоморфны, то различие между ними может состоять лишь в способе определения нормы. Именно в пространстве m_v норма определяется так:

$$\|x\| = \max_{k=1, 2, \dots, v} |\xi_k| \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)).$$

В пространстве l_v^p :

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^v |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)).$$

(При $p = 2$ получается пространство R^v : $R^v = l_v^2$).

Как это следует из теоремы 1 (2.II), несмотря на различие норм в этих пространствах, сходимость в них имеет один и тот же смысл — это по-координатная сходимость. (Здесь это получается и непосредственно из неравенства $|\xi_k| \leq \|x\|$, которое имеет место в каждом из рассматриваемых конечномерных пространств).

Пространство $\mathbf{m}$, можно считать подпространством пространства $\mathbf{m}$. Для этого надо отождествить элемент $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbf{m}$, с элементом $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) \in \mathbf{m}$. Аналогичное отношение имеет место между пространствами l^p и l^p .

Пространства l^p введены и изучены Ф. Риссом (см. Рисс-1), l^2 ранее — Гильбертом (см. Гильберт).

§ 5. Нормированные пространства измеримых функций

5.1. В этом параграфе рассматриваются пространства, элементами которых являются измеримые функции, т. е. некоторые подмножества (но не подпространства) пространства $\mathbf{S}$. При этом, как и в $\mathbf{S}$, эквивалентные функции отождествляются. Алгебраические операции определяются в этих пространствах естественным образом. В частности, роль нулевого элемента играет функция, эквивалентная нулю.

Аналогом пространства l^p среди функциональных пространств является пространство L^p ($p \geq 1$; $L^1 = L$), состоящее из всех функций, суммируемых с p -ой степенью в промежутке $[0, 1]$, *) т. е. таких измеримых функций $x(t)$, что

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < +\infty.$$

Используя интегральное неравенство Минковского, мы убеждаемся, что L^p становится нормированным пространством, если положить

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что функции, входящие в пространство L^r , входят и в каждое пространство L^s , если только $s < r$. При этом

$$\|x\|_{L^s} \leq \|x\|_{L^r}. \quad (1)$$

*) Вместо промежутка $[0, 1]$ можно рассматривать любой другой промежуток $[a, b]$ и даже произвольное измеримое (хотя бы и многомерное) множество, в том числе и бесконечной меры. Никаких принципиальных трудностей это не создает, почему мы и ограничиваемся частным случаем. Если функции — элементы пространства — определены на множестве T , то мы будем употреблять обозначение L^p_T или $L^p(T)$.

Это следует непосредственно из интегрального неравенства Гёльдера. Действительно, полагая $p = \frac{r}{s}$, $q = \frac{r}{r-s}$ ($p, q > 0$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), получим

$$\|x\|_{L^s} = \left\{ \int_0^1 |x(t)|^s dt \right\}^{\frac{1}{s}} \leq \left\{ \int_0^1 |x(t)|^{ps} dt \right\}^{\frac{1}{ps}} \cdot \left\{ \int_0^1 1^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} = \|x\|_{L^r}.$$

Если T — произвольное множество конечной меры, указанное соотношение между пространствами L_T^s и L_T^r сохраняется. В неравенстве (1) при этом появляется множитель $(\text{mes } T)^{\frac{r-s}{rs}}$. (Заметим, что, как нетрудно убедиться, для пространств L^p имеет место обратное включение и соответственно противоположное неравенство для норм).

5.2. Сходимость в L^p является сходимостью в среднем с показателем p . Именно $x_n \rightarrow x_0$ означает

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^p dt \rightarrow 0.$$

Пространство L^p — полное. В самом деле, если $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов из L^p , то она сходится в себе и в пространстве S , так как, используя (1), найдем

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_n) &= \int_0^1 \frac{|x_m(t) - x_n(t)|}{1 + |x_m(t) - x_n(t)|} dt \leq \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)| dt = \\ &= \|x_m - x_n\|_L \leq \|x_m - x_n\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Поскольку пространство S полное, то существует измеримая функция $x_0(t)$, к которой сходится последовательность $\{x_n\}$ (в пространстве S). Это означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ по мере. (См. I.1.4). Применяя к последовательности $\{|x_m(t) - x_n(t)|^p\}$ теорему Фату (Натансон-II, стр. 155), получим

$$\int_0^1 |x_0(t) - x_n(t)|^p dt \leq \sup_{m \geq n} \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|^p dt.$$

Если m и n достаточно велики, то $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\sup_{m \geq n} \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|^p dt < \varepsilon^p. \text{ Поэтому}$$

$$\int_0^1 |x_0(t) - x_n(t)|^p dt \leq \varepsilon^p. \quad (2)$$

Таким образом, функция $x_0(t) - x_n(t)$ входит в L^p , а тогда и $x_0(t) = [x_0(t) - x_n(t)] + x_n(t)$ входит в L^p . При этом из (2) вытекает, что

$$\|x_0 - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Стало быть, $x_n \rightarrow x_0$ в L^p .

Если множество, на котором заданы функции, имеет бесконечную меру, то проведенные выше рассуждения не проходят. Ограничиваясь для простоты случаем, когда это множество есть промежуток $(-\infty, +\infty)$, рассмотрим сходящуюся в себе последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $L^p(-\infty, +\infty)$. Рассматривая функции $x_n(t)$ на конечном промежутке $[a, b]$, мы из очевидного неравенства

$$\|x\|_{L^p(a, b)} \leq \|x\|_{L^p(-\infty, +\infty)} \quad (3)$$

заключаем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и в пространстве $L^p(a, b)$. Следовательно, по доказанному ранее существует $x_0 \in L^p(a, b)$, к которой сходится (в $L^p(a, b)$) последовательность $\{x_n\}$. Поскольку в качестве $[a, b]$ можно взять любой конечный промежуток, и предел единственен, то функция $x_0(t)$ будет задана на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Беря далее m, n настолько большими, чтобы $\|x_m - x_n\|_{L^p(-\infty, +\infty)} < \varepsilon$ из неравенства (3) получим

$$\|x_m - x_n\|_{L^p(a, b)} < \varepsilon \quad (m, n \geq N_\varepsilon).$$

Откуда при $m \rightarrow \infty$ находим

$$\|x_0 - x_n\|_{L^p(a, b)} \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon),$$

т. е.

$$\left\{ \int_a^b |x_0(t) - x_n(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon).$$

Устремляя здесь $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$, приходим к неравенству

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |x_0(t) - x_n(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

т. е. $x_0 - x_n \in L^p(-\infty, +\infty)$. А тогда и $x_0 \in L^p(-\infty, +\infty)$. Кроме того при $n \geq N_\varepsilon$

$$\|x_0 - x_n\|_{L^p(-\infty, +\infty)} \leq \varepsilon,$$

что означает $x_n \rightarrow x_0$ в $L^p(-\infty, +\infty)$.

5.3. Нетрудно видеть, что L^p — сепарабельное пространство. В качестве счетного плотного множества в нем можно взять, например, множество полиномов с рациональными коэффициентами или множество ступенчатых функций, на рациональных интервалах

принимающих рациональные значения. Для установления этого отметим прежде всего, что если $x_n(t)$ — «срезанная» функция:

$$x_n(t) = \begin{cases} n & x(t) > n \\ x(t) - n & -n \leq x(t) \leq n \\ -n & x(t) < -n, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^p dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

так как подынтегральная функция стремится к нулю и предельный переход под знаком интеграла допустим ввиду ограниченности подынтегральной функции суммируемой функцией $|x(t)|^p$.

Возьмем n так, чтобы $\|x - x_n\| < \varepsilon$. Далее, найдя непрерывную функцию $y(t)$, совпадающую с $x_n(t)$ всюду за исключением множества e с $\text{mes } e < \frac{\varepsilon^p}{(2n)^p}$ и также не превосходящую n , будем иметь

$$\begin{aligned} \|x_n - y\| &= \left\{ \int_e |x_n(t) - y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_e (2n)^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= 2n [\text{mes } e]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, возьмем полином $P(t)$ с рациональными коэффициентами такой, что $|y(t) - P(t)| < \varepsilon$. Тогда ясно, что $\|y - P\| < \varepsilon$ и окончательно $\|x - P\| < 3\varepsilon$.

Пространство $L^p(-\infty, +\infty)$ также сепарабельно. Счетным плотным в нем множеством является, например, совокупность ступенчатых функций на рациональных интервалах, принимающих только рациональные значения, из которых только конечное число отлично от нуля.

5.4. Другой пример B -пространства измеримых функций представляет множество $\tilde{M}$ всех измеримых и почти везде ограниченных функций, норма в котором определяется равенством

$$\|x\| = \text{vrai max}_{t \in [0,1]} |x(t)|. \quad *)$$

Проверка того, что $\tilde{M}$ есть нормированное пространство, не представляет труда и может быть проведена читателем самостоятельно.

*) $\text{vrai max } \varphi(t)$ (истинный, или существенный, максимум) есть точная нижняя граница множества чисел A таких, что множество тех t , для которых $\varphi(t) > A$, имеет меру нуль.

Сходимость в $\tilde{M}$ есть равномерная сходимость почти везде. Исходя из этого, нетрудно показать, что $\tilde{M}$ — полное пространство.

Иногда для $\tilde{M}$ используется другое обозначение: L^∞ . В этом обозначении подчеркивается тот факт, что $\tilde{M}$ состоит из функций, любая степень которых суммируема, и что $\|x\|_{\tilde{M}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{L^p}$. (Харди, Литтлвуд, Поля, стр. 173).

Разумеется, можно рассматривать и пространство $\tilde{M}_T$, элементы которого — функции, определенные на произвольном измеримом множестве T .

Пространства L^p ($p > 1$) введены в [97 а, б]. Пространство L — в [124].

Более широкий класс пространств представляют так называемые пространства Орлича L^Φ [87 а]. Элементами пространства L^Φ являются всевозможные измеримые на $[0; 1]$ (или вообще на множестве T) функции, для которых

$$\int_0^1 \Phi(|x(t)|) dt < \infty,$$

где Φ — возрастающая непрерывная функция, заданная на $[0, \infty]$ и такая, что $\Phi(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$.

По поводу пространств Орлича см. монографию Зигмунда, а также работы [73] и [119 а]. Особенно далеко продвинута теория пространств Орлича в [64].

§ 6. Другие нормированные пространства функций

6.1. В этом параграфе основное внимание уделено пространствам функций ограниченной вариации (по этому поводу см. Банах-1).

Пусть $x(t)$ — конечная функция, заданная в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим произвольное разбиение τ промежутка $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$) и образуем выражение

$$v_\tau = \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})|. \quad (1)$$

Если совокупность сумм v_τ , отвечающих всевозможным подразделением τ промежутка $[a, b]$, ограничена, то функция $x(t)$ называется *функцией ограниченной вариации* в промежутке $[a, b]$, а величина

$$V_a^b(x) = \sup_\tau v_\tau$$

называется *полной вариацией* функции $x(t)$.

Рассмотрим множество V всех функций ограниченной вариации. V — линейное множество. Действительно, всякую функцию ограниченной вариации в промежутке $[a, b]$ можно представить в форме разности двух неубывающих функций (Ф и х т е н г о л ь ц, т. III, стр. 101):

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Нетрудно видеть, что и обратно каждая функция, представимая в виде разности неубывающих, является функцией ограниченной вариации. Линейность V непосредственно следует из этого замечания.

Если положить для $x \in V$

$$\|x\| = |x(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x),$$

то V становится нормированным пространством.

В самом деле, первые две аксиомы нормированного пространства выполнены очевидным образом, поэтому в проверке нуждается лишь неравенство треугольника. Пусть $x, y \in V$ и $z = x + y$.

Тогда для любого подразделения промежутка $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$),

$$|z(a)| = |x(a) + y(a)| \leq |x(a)| + |y(a)|$$

и

$$|z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})|$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом,

$$z(a) + \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq |x(a)| + \sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| +$$

$$+ |y(a)| + \sum_{k=1}^n |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq \|x\| + \|y\|,$$

откуда и следует требуемое неравенство.

6.2. Докажем, что V — полное пространство.

Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность. Прежде всего, поскольку

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq |[x_m(t) - x_n(t)] - [x_m(a) - x_n(a)]| +$$

$$+ |x_m(a) - x_n(a)| \leq |x_m(a) - x_n(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x_m - x_n) = \|x_m - x_n\|,$$

то числовая последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится, каково бы ни было $t \in [a, b]$. Положим $x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Пусть N_ε настолько велико, что при $m, n < N_\varepsilon$

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Тем более для всякого разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ будем иметь

$$|x_m(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^r |[x_m(t_k) - x_n(t_k)] - [x_m(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| < \varepsilon.$$

Фиксируя здесь разбиение и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, найдем

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^r |[x_0(t_k) - x_n(t_k)] - [x_0(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| \leq \varepsilon.$$

И так как это справедливо для любого разбиения, то

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \bigvee_a^b (x_0 - x_n) \leq \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon).$$

Отсюда обычным рассуждением заключаем: $x_0 \in V$ и

$$\|x_0 - x_n\| \leq \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon)$$

т. е. $x_n \rightarrow x_0$.

6.3. Введем новое важное понятие. Заданная в промежутке $[a, b]$ функция $x(t)$ называется *абсолютно непрерывной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что какую бы конечную систему не налегающих друг на друга интервалов $(\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ни взять, сумма абсолютных величин приращений функции $x(t)$ на этих интервалах будет меньше ε , как только сумма длин интервалов меньше δ , т. е.

$$\sum_{k=1}^n |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta.$$

З а м е ч а н и е 1. Абсолютно непрерывная функция очевидным образом непрерывна.

З а м е ч а н и е 2. Абсолютно непрерывная функция $x(t)$ является функцией ограниченной вариации.

В самом деле, согласно определению абсолютной непрерывности найдем δ , отвечающее $\varepsilon = 1$. Возьмем теперь произвольное подразделение промежутка $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$). Можно считать его настолько мелким, что $t_k - t_{k-1} < \frac{\delta}{2}$. Распределим все частичные промежутки на группы таким образом, чтобы сумма длин промежутков каждой группы была бы меньше δ , но больше $\frac{\delta}{2}$. Число K всех таких групп не может превзойти $\frac{2(b-a)}{\delta}$. Но, с другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n |x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq K \leq \frac{2(b-a)}{\delta},$$

причем оценка, очевидно, не зависит от взятого подразделения. Отсюда и следует, что $x(t)$ — функция ограниченной вариации.

Функция, удовлетворяющая условию Липшица, наверное будет абсолютно непрерывной. Действительно, если для любых t' и t''

$$|x(t') - x(t'')| \leq K |t' - t''|,$$

то

$$\sum_{k=1}^n |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| \leq K \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)$$

и сумма в левой части становится сколь угодно малой, если достаточно мала сумма в правой части.

Множество A всех абсолютно непрерывных функций является линейным подмножеством пространства V . Докажем, что A замкнуто в V .

Пусть $x_0 \in V$ — предельная точка множества A . Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $x \in A$ так, чтобы $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Функция $x(t)$ абсолютно непрерывна; найдем $\delta > 0$, отвечающее согласно определению абсолютной непрерывности числу $\frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем далее произвольную систему не налегающих друг на друга промежутков (α_k, β_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы $\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta$.

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_0(\beta_k) - x_0(\alpha_k)| &\leq \sum_{k=1}^n |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| + \sum_{k=1}^n |[x(\beta_k) - x_0(\beta_k)] - \\ &- [x(\alpha_k) - x_0(\alpha_k)]| < \frac{\varepsilon}{2} + \bigvee_a^b (x - x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|x - x_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

и, следовательно, $x_0 \in A$.

Так же доказывается, что линейное множество $\tilde{A}$ тех абсолютно непрерывных функций, которые обращаются в нуль при $t = a$, замкнуто в V .

Таким образом, как A , так и $\tilde{A}$ являются B -пространствами.

6.4. Класс абсолютно непрерывных функций оказывается тесно связанным с классом суммируемых функций. Именно в теории функций вещественной переменной доказывается, что каждая абсолютно непрерывная функция $x(t)$ может быть представлена в форме неопределенного интеграла, т. е.

$$x(t) = x(a) + \int_0^t \varphi(s) ds, \quad (2)$$

где φ — суммируемая в промежутке $[a, b]$ функция, которую мы будем называть *обобщенной производной* функции x . При этом устанавливается, что

$$\bigvee_a^b(x) = \int_a^b |\varphi(t)| dt. *) \quad (3)$$

*) Натансон-II. Стр. 274 и 279. Там же доказано, что каждая абсолютно непрерывная функция почти везде имеет производную, которая и является ее обобщенной производной.

Представление (2) для некоторых классов абсолютно непрерывных функций будет получено ниже средствами функционального анализа (см. § 4, гл. VI).

Это обстоятельство позволяет доказать, что пространства $\tilde{A}$ и $\tilde{L}$ линейно изометричны. Для этого нужно только сопоставить функции $x \in \tilde{A}$ ее обобщенную производную. Линейный изоморфизм этого соответствия очевиден, а равенство норм соответствующих элементов записано в (3).

6.5. Можно рассматривать функциональные пространства, элементы которых не числовые, а *векторные функции*, т. е., иначе говоря, системы обычных числовых функций. Таким образом, если x такая функция, то $x(t)$ есть γ -мерный вектор. Обозначая его составляющие через $x_1(t), x_2(t), \dots, x_\gamma(t)$, получим следующее выражение для длины $\|x(t)\|$ указанного вектора

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\gamma} |x_k(t)|^2}. \quad (4)$$

Нетрудно сообразить, что, например, совокупность непрерывных вектор-функций (данной размерности) образует B -пространство, если норму определить, как обычно в C , заменив только абсолютную величину $|x(t)|$ числовой функции x длиной $\|x(t)\|$ вектора $x(t)$, т. е. полагая

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \|x(t)\|.$$

Аналогично можно поступить и в случае других функциональных пространств.

§ 7. Гильбертово пространство

7.1. Эвклидово пространство R^n выделяется из всех конечномерных пространств тем, что в нем определено скалярное произведение, связанное с нормой простым соотношением: квадрат нормы элемента есть скалярное произведение элемента самого на себя.

В связи с этим целесообразно рассматривать такие пространства, в которых определено «скалярное произведение», а норма вводится указанным выше образом.

Линейное комплексное множество H называется *пространством со скалярным произведением*, если для каждой пары элементов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y) — комплексное число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

$$1) (y, x) = \overline{(x, y)};$$

$$2) (\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda (x_1, y) + \mu (x_2, y);$$

3) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0$ равносильно $x = 0$. *)

Из определения пространства со скалярным произведением вытекает:

$$a) (x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda}(x, y_1) + \bar{\mu}(x, y_2).$$

(Аксиомы 1 и 2)

$$b) (x, 0) = (0, y) = 0.$$

Действительно, $(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0$.

с) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ (неравенство Коши — Буняковского).

Для доказательства этого предложения рассмотрим выражение

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y).$$

По аксиоме 3) это выражение неотрицательно, каково бы ни было число λ . Предполагая, что $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = 0$, и доказываемое неравенство очевидно), положим $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$. На основании сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

$$\text{т. е.} \quad (x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Если в пространстве H со скалярным произведением положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (x \in H), \quad (1)$$

то H становится нормированным пространством. Действительно, из аксиом нормированного пространства только неравенство треугольника не вытекает непосредственно из определения H . Докажем его. Пусть $x, y \in H$. Используя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Нормированное пространство H называется *унитарным*, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением (1).

Поскольку H — нормированное пространство, оно обладает всеми свойствами последнего. В частности, имеют место элементарные факты.

*) Реже в основу пространства со скалярным произведением кладется вещественное линейное множество. В этом случае предполагается, что скалярное произведение — вещественное число, условие 1) при этом заменяется условием $(y, x) = (x, y)$.

Ниже, говоря о пространстве со скалярным произведением, мы всегда будем подразумевать, если не оговорено противоположное, что речь идет о комплексном пространстве.

указанные в II.2.2. Отметим еще несколько простых предложений, относящихся специально к пространствам со скалярным произведением.

d) Непрерывность скалярного произведения. Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Действительно, с помощью неравенства Коши — Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leq \\ &\leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\|. \end{aligned}$$

Так как сходящаяся последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то правая часть в написанном неравенстве стремится к нулю, следовательно, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

e) Каковы бы ни были элементы $x, y \in \mathbf{H}$ справедливо равенство

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \quad *) \quad (2)$$

В самом деле, по определению нормы имеем

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + \\ &+ (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \end{aligned}$$

То, что $\mathbf{H}$ есть унитарное пространство, означает, что норма в $\mathbf{H}$ введена специальным образом, через скалярное произведение. Пополнение $\overline{\mathbf{H}}$ пространства $\mathbf{H}$ также будет нормированным пространством (II. 2.4). Покажем, что скалярное произведение в $\mathbf{H}$ можно распространить на $\overline{\mathbf{H}}$ таким образом, что $\overline{\mathbf{H}}$ окажется унитарным пространством.

f) Пополнение $\overline{\mathbf{H}}$ унитарного пространства $\mathbf{H}$ само является унитарным пространством.

В самом деле, пусть $\xi, \eta \in \overline{\mathbf{H}}$. Существуют последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbf{H}$ такие, что $x_n \rightarrow \xi, y_n \rightarrow \eta$. Повторяя почти дословно рассуждения доказательства пункта d), убедимся, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$, который не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, а определяется только элементами ξ и η . Поскольку для $\xi, \eta \in \mathbf{H}$ на основании пункта d) $\lim (x_n, y_n) = (\xi, \eta)$, естественно и для произвольных $\xi, \eta \in \overline{\mathbf{H}}$ положить

$$(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n).$$

*) Это соотношение является обобщением того элементарного геометрического факта, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Если в нормированном пространстве $\mathbf{X}$ для любых элементов $x, y \in \mathbf{X}$ выполняется соотношение (2), то $\mathbf{X}$ — унитарное пространство, т. е. в $\mathbf{X}$ можно ввести скалярное произведение так, что норма будет определяться равенством (1). См. [43].

Как нетрудно проверить, в силу данного определения $\bar{H}$ становится пространством со скалярным произведением. Учитывая указанную в II.2.4 связь нормы в $\bar{H}$ с нормой в H , будем иметь

$$\|\xi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim \sqrt{(x_n, x_n)} = \sqrt{(\xi, \xi)}$$

$$(\xi \in \bar{H}, x_n \rightarrow \xi, x_n \in H, n = 1, 2, \dots),$$

что и означает унитарность пространства $\bar{H}$.

Отметим еще одно вполне очевидное предложение.

г) Подпространство (и даже линейное множество) унитарного пространства также является унитарным пространством.

7.2. Основной интерес представляет полное унитарное пространство. Такое пространство называется *гильбертовым* (по имени немецкого математика Д. Гильберта). *)

Гильбертово пространство является непосредственным обобщением евклидова пространства; поэтому его «геометрия» ближе, чем в случае любого другого B -пространства, подходит к евклидовой геометрии. Гильбертово пространство обладает многими такими свойствами евклидова пространства, которыми B -пространства общего вида не обладают (см., например, соотношение (2)). Это обстоятельство позволило развить функциональный анализ на основе гильбертова пространства гораздо шире и полнее, чем на основе общих нормированных пространств, благодаря чему теория гильбертова пространства выделилась в большую самостоятельную ветвь функционального анализа со своими результатами и методами, не укладывающимися в рамки общего функционального анализа, которому в основном посвящена эта книга. В связи с этим здесь и ниже гильбертово пространство служит, как правило лишь для иллюстрации фактов, относящихся к общей теории.

7.3. Конкретным примером гильбертова пространства является пространство l^2 (комплексное). Скалярное произведение в нем определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots)).$$

Норма, определенная согласно (1) через скалярное произведение

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

*) Иногда при этом требуют еще, чтобы пространство было бесконечномерным.

Абстрактное гильбертово пространство было введено Нейманом в [83].

совпадает с нормой, определенной в II.4.2, почему мы за рассматриваемым пространством сохраняем прежнее обозначение l^2 . Как было доказано, это пространство полно.

Пусть теперь $\varphi(t) > 0$ (почти везде) — суммируемая в промежутке $[a, b]$ (который может быть и бесконечным) функция. Обозначим через $L_\varphi^2(a, b)$ совокупность измеримых в промежутке $[a, b]$ функций $x(t)$, для которых интеграл

$$\int_a^b \varphi(t) |x(t)|^2 dt < \infty.$$

$L_\varphi^2(a, b)$ становится гильбертовым пространством, если положить

$$(x, y) = \int_a^b \varphi(t) [x(t) \overline{y(t)}] dt. *)$$

Норма в $L_\varphi^2(a, b)$ определяется равенством

$$\|x\| = \left[\int_a^b \varphi(t) |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Полнота этого пространства доказывается так же, как для пространств L^p (см. II.5.2). Отметим, кстати, что при $\varphi(t) \equiv 1$ пространство $L_\varphi^2(a, b)$ обращается в $L^2(a, b)$, рассмотренное выше как B -пространство.

Пространства l^2 и $L_\varphi^2(a, b)$ сепарабельны. Для l^2 это было доказано ранее, а для $L_\varphi^2(a, b)$ устанавливается, как для L^p (см. II.5.3).

Примером несепарабельного гильбертова пространства может служить совокупность H_c функций, определенных на всей числовой прямой и имеющих не более чем счетное множество значений, отличных от нуля. При этом предполагается, что

$$\sum_t |x(t)|^2 < \infty. **)$$

*) Конечность (x, y) вытекает из неравенства Буняковского:

$$\begin{aligned} |(x, y)| &\leq \int_a^b \varphi(t) |x(t) \overline{y(t)}| dt = \int_a^b \sqrt{\varphi(t)} |x(t)| \cdot \sqrt{\varphi(t)} |y(t)| dt \leq \\ &\leq \left[\int_a^b \varphi(t) |x(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \varphi(t) |y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

**) Лишь для счетного множества значений t функция $x(t)$ отлична от нуля. Таким образом, написанную сумму можно рассматривать как обычный ряд.

Скалярное произведение в H_c определим по формуле

$$(x, y) = \sum_t x(t) \overline{y(t)}.$$

Предоставляем читателю доказать полноту этого пространства, опираясь на факт полноты l^2 .

Если обозначить через x_τ элемент H_c :

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t = \tau, \\ 0 & t \neq \tau, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что $\|x_\tau - x_{\tau'}\| = \sqrt{2}$ (если $\tau \neq \tau'$), откуда вытекает, что H_c несепарабельно.

7.4. При изучении гильбертовых пространств весьма важным оказывается понятие ортогональности элементов.

Элементы x и y гильбертова пространства H называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$.

Если фиксированный элемент $x \in H$ ортогонален каждому элементу некоторого множества $E \subset H$, то говорят, что x *ортогонален* E , и пишут $x \perp E$.

Наконец, если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортогональны, эти множества называются *ортогональными* ($E_1 \perp E_2$).

Укажем несколько простых фактов, касающихся введенных понятий.

а) Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

б) Если $x \perp y_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $y_n \rightarrow y$, то $x \perp y$.

Это следует непосредственно из непрерывности скалярного произведения (см. d) 7.1).

с) Если $x \perp E$, то $x \perp \overline{\mathcal{L}(E)}$.

Для доказательства надо воспользоваться пунктами а) и б).

д) Если $x \perp E$, где E полное в H множество, т. е. если $\overline{\mathcal{L}(E)} = H$, то $x = 0$.

Действительно, тогда $x \perp H$, а следовательно, x ортогонален самому себе, т. е. $(x, x) = 0$, что равносильно $x = 0$.

е) Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству E , является подпространством пространства H , т. е. линейным замкнутым множеством. Это подпространство называется *ортогональным дополнением* множества E .

Основное значение в теории гильбертова пространства имеет

Теорема 1 (7. II). Пусть H_1 — подпространство гильбертова пространства H и H_2 — его ортогональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in H$, его можно единственным образом представить в форме

$$x = x' + x'' \quad (x' \in H_1, x'' \in H_2). \quad (3)$$

При этом элемент x' реализует расстояние от x до H_1 , т. е.

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1). \quad (*) \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим

$$d = \rho(x, H_1)$$

и найдем элементы $x_n \in H_1$ так, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

В силу соотношения (2)

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 &= \\ &= 2[\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

А так как $\frac{x_n + x_m}{2} \in H_1$, то

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq 4d^2.$$

Следовательно, из (6) с помощью (5) и этой оценки, получаем

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. В силу полноты пространства H существует $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. При этом $x' \in H_1$ (по замкнутости). Переходя к пределу в (5), найдем $\|x - x'\| \leq d$, а так как для любого элемента из H_1 в том числе и для x' должно быть $\|x - x'\| \geq d$, то

$$\|x - x'\| = d. \quad (7)$$

Докажем теперь, что элемент $x'' = x - x'$ ортогонален H_1 и поэтому принадлежит H_2 . Возьмем отличный от нулевого элемент $y \in H_1$. При любом λ имеем $x' + \lambda y \in H_1$, так что

$$\|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq d^2,$$

что можно переписать, используя (7) в форме

$$-\bar{\lambda}(x'', y) - \lambda(y, x'') + |\lambda|^2(y, y) \geq 0.$$

В частности, при $\lambda = \frac{(x'', y)}{(y, y)}$ получаем отсюда

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

т. е.

$$|(x'', y)|^2 \leq 0,$$

что может быть лишь в случае $(x'', y) = 0$, $x'' \perp y$.

*) Эта теорема в настоящем ее виде доказана Реллихом — [95].

Итак, возможность представления x в форме (3) и соотношение (4) установлены.

Докажем, что представление (3) единственно. В самом деле, если

$$x = x'_1 + x''_1 \quad (x'_1 \in H_1, x''_1 \in H_2),$$

то, сопоставив это с (3), получим

$$x' - x'_1 = x''_1 - x''.$$

Элемент, стоящий в левой части этого равенства, принадлежит H_1 , а в правой — H_2 , поэтому $x' - x'_1 \perp x''_1 - x''$. Откуда получаем $x' - x'_1 = x''_1 - x'' = 0$.

Теорема полностью доказана.

Элементы x' и x'' , однозначно определяемые элементом x , мы будем называть *проекциями* элемента x на подпространства H_1 и H_2 соответственно.

Следствие. Для того, чтобы система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) была полной в пространстве H (см. II. 2.3), необходимо и достаточно, чтобы не существовало отличного от нуля элемента, ортогонального каждому элементу системы.

Действительно, необходимость условия вытекает из предложения d) 7.4. Условие достаточно, так как если $\{x_\alpha\}$ — неполная система, то подпространство $H_1 = \overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})} \neq H$, и, следовательно, беря элемент $x \in H \setminus H_1$ и разлагая его на сумму проекций $x = x' + x''$ ($x' \in H_1$, $x'' \perp H_1$), будем иметь $x'' \neq 0$ и $x'' \perp x_\alpha$ ($\alpha \in A$), что противоречит условию.

7.5. Система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) гильбертова пространства H называется *ортогональной*, если любые два различных элемента этой системы ортогональны. Если, кроме того, норма каждого элемента x_α равна единице, то система называется *ортонормальной*.

Важным примером ортогональной системы в $L^2(a, b)$ является система тригонометрических функций: $1, \cos \frac{2\pi(t-a)}{b-a}, \sin \frac{2\pi(t-a)}{b-a}, \dots, \cos \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}, \sin \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}, \dots$. Это полная система, так как линейная оболочка данной системы — множество всех тригонометрических полиномов — плотно в $L^2(a, b)$. Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что в $L^2(a, b)$ плотно множество всех ограниченных (измеримых) функций. Далее, с помощью теоремы Лузина *) получаем, что в этом множестве будет плотным множество непрерывных периодических (т. е. принимающих равные значения на концах промежутка $[a, b]$) функций. Наконец, на основании теоремы Вейерштрасса **) заключаем, что множество тригонометрических полиномов плотно в множестве непрерывных функций.

*) Натансон-II, стр. 118.

**) Фихтенгольц, т. III, стр. 698.

Другим примером ортогональной системы в $L^2(a, b)$ является так называемая система Радемахера, состоящая из функций

$$x_n(t) = (-1)^k \left(\frac{k}{2^n} (b-a) < t-a < \frac{k+1}{2^n} (b-a); \right. \\ \left. k = 0, 1, \dots, 2^n - 1; n = 0, 1, \dots \right).$$

Эта система неполная. Действительно, функция $x(t) = (t-a)(t-b) + \frac{(b-a)^2}{6}$ ортогональна всем функциям системы (рис. 3).

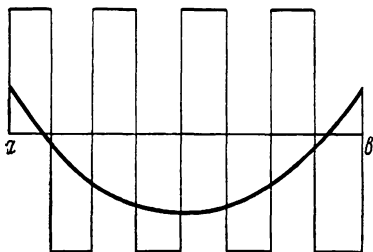


Рис. 3

В l^2 ортогональной системой будет система $\{x_n\}$ $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Ясно, что это полная система.

Ортогональной системой в H_c является совокупность $\{x_\tau\}$, где x_τ — элементы, определенные выше, в 7.3.

Если среди элементов ортогональной системы нет нулевого, то такая система линейно-независима. В самом деле, если бы существовала линейная зависимость:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{\alpha_k} = 0,$$

то, умножив скалярно обе части этого равенства на x_{α_j} , мы получили бы $\lambda_j \|x_{\alpha_j}\|^2 = 0$.

От ортогональной системы нетрудно перейти к ортонормальной, если разделить каждый элемент на его норму (предполагается, что система не содержит нулевого элемента). Сложнее осуществляется переход от произвольной системы элементов к ортонормальной. Ограничиваясь случаем счетных систем, докажем следующую теорему об ортогонализации (см. [122] и [32]).

Теорема 2 (7.11) (об ортогонализации). Пусть $\{y_n\}$ — линейно-независимая система элементов гильбертова пространства H . Существует ортонормальная система $\{x_n\}$ такая, что

$$x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} y_k \quad (\lambda_n^{(n)} \neq 0; \quad n = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Мы дадим два доказательства теоремы.

Первое доказательство. Положим

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1 \quad \left(\lambda_1^{(1)} = \frac{1}{\|y_1\|} \right)$$

и допустим, что уже построены попарно ортогональные и нормированные элементы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, связанные с $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ соотношениями (8). Обозначим через H'_n линейную оболочку элемен-

тов $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ и через $\mathbf{H}_n''$ ортогональное дополнение $\mathbf{H}_n'$. Так как $y_n \in \mathbf{H}_n$, то в разложении

$$y_n = y_n' + y_n'' \quad (y_n' \in \mathbf{H}_n', y_n'' \in \mathbf{H}_n'')$$

проекция $y_n'' \neq 0$. Обозначив

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y_n'' \quad \left(\lambda_n^{(n)} = \frac{1}{\|y_n''\|} \right),$$

будем иметь $\|x_n\| = 1$ и, поскольку $x_n \perp \mathbf{H}_n'$, а $x_k \in \mathbf{H}_n'$ ($k < n$), то $x_n \perp x_k$ ($k < n$).

Далее,

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y_n'' = \lambda_n^{(n)} y_n - \lambda_n^{(n)} y_n'.$$

Ввиду того, что $y_n' \in \mathbf{H}_n'$, имеем

$$y_n' = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} y_k.$$

Положив $\lambda_k^{(n)} = -\alpha_k^{(n)} \lambda_n^{(n)}$ ($k < n$), получим

$$x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} y_k.$$

Доказательство теоремы завершается по индукции.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку $\lambda_n^{(n)} \neq 0$, элементы y_n могут быть выражены через x_n :

$$y_n = \sum_{k=1}^n \mu_k^{(n)} x_k \quad \left(\mu_n^{(n)} = \frac{1}{\lambda_n^{(n)}}; \quad n = 1, 2, \dots \right). \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 2. Элементы x_n определяются элементами y_n не однозначно. Однако если потребовать, чтобы $\lambda_n^{(n)} > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то система $\{x_n\}$ будет единственна.

В самом деле, пусть имеются две системы $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$, удовлетворяющие поставленному требованию. Используя соотношения (8) и (9) и аналогичные им для системы $\{\tilde{x}_n\}$, мы можем выразить элементы одной системы $\{\tilde{x}_n\}$ через $\{x_n\}$, т. е. получить соотношения вида

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \beta_k^{(n)} x_k. \quad (10)$$

При этом нетрудно видеть, что коэффициент $\beta_n^{(n)}$ положителен (он равен произведению $\tilde{\lambda}_n^{(n)} \mu_n^{(n)}$, где через $\tilde{\lambda}_n^{(n)}$ обозначен соответствующий коэффициент формулы (8) для системы $\{\tilde{x}_n\}$). Отсюда ясно, что $\tilde{x}_1 = x_1$. Если уже

доказано, что $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, ..., $\tilde{x}_{n-1} = x_{n-1}$, то, умножая скалярно обе части равенства (10) на x_j , будем иметь $0 = \beta_j^{(n)}$ ($j < n$), т. е. $\tilde{x}_n = \beta_n^{(n)} x_n$. А тогда, поскольку $\|\tilde{x}_n\| = \|x_n\| = 1$, имеем $\beta_n^{(n)} = 1$; следовательно, $\tilde{x}_n = x_n$.

Второе доказательство. Введем обозначения

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = 1 \text{ (определитель Грамма)}$$

и

$$x'_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_{n-1}) & y_1 \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_{n-1}) & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_{n-1}) & y_n \end{vmatrix},$$

понимая последний определитель как сумму произведений элементов последнего столбца на соответствующие алгебраические дополнения.

Ясно, что

$$(x'_n, y_n) = \Delta_n \quad (11)$$

и

$$(x'_n, y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (12)$$

Последнее ввиду того, что в получающемся в левой части определителе будут два одинаковых столбца (k -ый и n -ый).

Если умножить (скалярно) последний столбец определителя x'_n на x'_n , то, учитывая (11) и (12), получим определитель, в последнем столбце которого все элементы, кроме последнего, будут равны нулю, а последний будет равен Δ_n . Разлагая полученный определитель по элементам последнего столбца, придем к соотношению

$$(x'_n, x'_n) = \Delta_n \Delta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку элемент $x'_n \neq 0$ (в противном случае элементы $y_1, y_2, \dots, y_n$ были бы линейно зависимы), получаем, что $\Delta_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Отметим, наконец, что элемент x'_k ($k < n$), выражаясь линейно через $y_1, y_2, \dots, y_k$, будет на основании (12) ортогонален x'_n .

Учитывая все сказанное, мы приходим к требуемой ортонормальной последовательности, если положим

$$x_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

7.6. Используем полученные результаты для построения системы ортогональных по весу полиномов.

В пространстве $L^2_\varphi(a, b)$ в качестве $\{y_n\}$ возьмем

$$y_n(t) = t^n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (14)$$

При ортогонализации этой последовательности получим последовательность $\{x_n\}$

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} t^k \quad (\lambda_n^{(n)} \neq 0, n = 0, 1, \dots),$$

причем

$$(x_m, x_n) = \int_a^b \varphi(t) x_m(t) \overline{x_n(t)} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases}$$

Полиномы $x_n(t)$ называются *ортгоналными по весу $\varphi(t)$* . Они играют большую роль в конструктивной теории функций. Поскольку система (14) полная, будет полной и система ортогональных полиномов.

Явное выражение для ортогональных полиномов может быть получено с помощью формулы (13). В этом случае

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}, \quad c_{j,k} = \int_a^b \varphi(t) t^{j+k} dt \quad (j, k = 0, 1, \dots, n),$$

так что

$$x_n(t) = \frac{x'_n(t)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} = \frac{\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,n-1} & 1 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,n-1} & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \dots & c_{n,n-1} & t^n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Из этих формул, между прочим, видно, что полиномы x_n имеют вещественные коэффициенты.

Если $\varphi(t) \equiv 1$; $a = -1$, $b = 1$, то ортогональные полиномы называются *полиномами Лежандра* и обозначаются $P_n(t)$. Можно доказать, что

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n] \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (15)$$

В случае $\varphi(t) = (1-t)^a(1+t)^b$; $a = -1$, $b = 1$ получаем полиномы Якоби:

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = k_n (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}], \quad (16)$$

где

$$k_n = (-1)^n \sqrt{2^{-(\alpha+\beta+2n+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)} \cdot \frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!}}.$$

В частности, при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ приходим к полиномам Чебышёва, часто встречающимся в различных вопросах теории функций.

При $\varphi(t) = e^{-t}$; $a = 0$, $b = \infty$ получаются полиномы Лагерра:

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t} t^n]. \quad (17)$$

Наконец, если $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $a = -\infty$, $b = \infty$ — ортогональные полиномы, которые обозначаются в этом случае $H_n(t)$, называются полиномами Эрмита.

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t^2}].^*) \quad (18)$$

7.7. Дальнейшее изложение относится главным образом к сепарабельному гильбертову пространству. Рассматривая конкретные ортогональные системы в конкретных сепарабельных пространствах, мы видим, что все они счетны. Это обстоятельство не случайно. Именно, справедлива

Теорема 3 (7. II). *Ортонормальная система $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) сепарабельного гильбертова пространства H не более чем счетна.*

Доказательство. Пусть D — счетное плотное в H множество. Для каждого x_α найдем $y_\alpha \in D$ так, что

$$\|x_\alpha - y_\alpha\| < \frac{1}{2}.$$

При этом различным элементам x_α и $x_{\alpha'}$ отвечают различные элементы y_α и $y_{\alpha'}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|y_\alpha - y_{\alpha'}\| &= \|(x_\alpha - x_{\alpha'}) + (x_{\alpha'} - y_{\alpha'}) + (y_\alpha - x_\alpha)\| \geq \\ &\geq \|x_\alpha - x_{\alpha'}\| - [\|x_{\alpha'} - y_{\alpha'}\| + \|y_\alpha - x_\alpha\|] > \sqrt{2} - 1 > 0, \end{aligned}$$

так как

$$\|x_\alpha - x_{\alpha'}\|^2 = (x_\alpha - x_{\alpha'}, x_\alpha - x_{\alpha'}) = (x_\alpha, x_\alpha) + (x_{\alpha'}, x_{\alpha'}) = 2.$$

Таким образом, множество $\{x_\alpha\}$ эквивалентно части счетного множества D , и потому само не более чем счетно.

*) Более полные сведения об ортогональных полиномах и, в частности, доказательства формул (15)–(18) читатель найдет в книге Натансон-1.

Дополнением доказанной теоремы служит следующая

Теорема 4 (7. II). Если сепарабельное гильбертово пространство H бесконечномерно, то в нем существует полная счетная ортонормальная система.

Доказательство. Исходя из счетного плотного в H множества $D = \{z_n\}$, построим линейно независимую систему $\{y_k\}$, полную в H . Для этого, считая $z_1 \neq 0$, положим $y_1 = z_1$. Далее, в качестве y_2 возьмем элемент z_{n_2} с наименьшим номером $n_2 \geq 2$ такой, что y_1 и $y_2 = z_{n_2}$ линейно независимы. Продолжая так и дальше, придем к искомой системе $\{y_k\}$. Действительно, $\{y_k\}$ — полная система, так как любой элемент z_n есть, очевидно, линейная комбинация элементов $y_j = z_{n_j}$ ($n_j < n$), так что $D \subset \mathcal{L}(\{y_k\})$ и, следовательно, $\overline{\mathcal{L}(\{y_k\})} = H$.

Применяя к системе $\{y_k\}$ процесс ортогонализации, придем к полной ортонормальной и, очевидно, счетной системе.

7.8. Пусть в гильбертовом пространстве H дана ортонормальная система $\{x_k\}$. Пусть, далее, $x \in H$. Числа

$$a_k = (x, x_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

называются *коэффициентами Фурье* элемента x по данной ортонормальной системе, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

называется *рядом Фурье* элемента x .

Образуем подпространство $H_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$, элементы которого, таким образом, суть всевозможные линейные комбинации первых n элементов данной ортонормальной системы. Имеет место

Теорема 5 (7. II). Отрезок $s_n = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ ряда Фурье элемента x есть проекция элемента x на подпространство H_n .

Доказательство. Так как

$$x = s_n + (x - s_n)$$

и $s_n \in H_n$, то достаточно доказать, что $x - s_n \perp H_n$. Но ясно, что $x - s_n \perp x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а тогда на основании пункта с) из 7.4 $x - s_n \perp H_n$. Теорема доказана.

Используя заключение теоремы 1 получаем отсюда

Следствие 1. Какой бы элемент $z = \sum_{k=1}^n a_k x_k \in H_n$ ни взять,

$$\|x - s_n\| = \rho(x, H_n) \leq \|x - z\|.$$

Далее, поскольку

$$\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geq \|s_n\|^2, \quad (19)$$

а

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2, \quad (20)$$

то справедливо и такое утверждение.

Следствие 2. *Имеет место неравенство (неравенство Бесселя):*

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (21)$$

Если для некоторого $x \in \mathbf{H}$ в (21) имеет место знак равенства, то говорят, что для x *удовлетворено уравнение замкнутости*.

Теорема 6 (7. II). *Каков бы ни был элемент $x \in \mathbf{H}$, его ряд Фурье всегда сходится, при этом сумма ряда Фурье есть проекция элемента x на подпространство $\mathbf{H}_0 = \overline{\mathcal{L}(\{x_k\})}$.*

Для того чтобы сумма ряда Фурье была равна данному элементу x , необходимо и достаточно, чтобы для этого элемента удовлетворялось уравнение замкнутости.

Доказательство. Из неравенства (21) вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Обозначая, как и раньше, через s_n частную сумму ряда Фурье, будем иметь

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

откуда и следует сходимостъ ряда Фурье.

Пусть $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Поскольку $s \in \mathbf{H}_0$ и

$$x = s + (x - s),$$

то, как и при доказательстве теоремы 5, можно ограничиться доказательством того, что $x - s \perp \mathbf{H}_0$. Это проводится опять с использованием пункта с) из 7.4.

Если, наконец, учитывая равенство (20), переписать соотношение (19) в форме

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

то без труда убедимся в справедливости второй части теоремы.

Если система $\{x_k\}$ полная, то $H_0 = H$ и проекция любого элемента $x \in H$ на H_0 совпадает с ним самим. Это приводит к такому факту.

Следствие 1. Если система $\{x_k\}$ полная, то ряд Фурье для любого $x \in H$ сходится к x .

Ортонормальная система называется *замкнутой*, если для каждого $x \in H$ удовлетворено уравнение замкнутости.

Учитывая предыдущие результаты, можно сформулировать

Следствие 2. Для того, чтобы система была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы она была полной.

Действительно, на основании теоремы 6 уравнение замкнутости удовлетворено для всех $x \in H_0$ и только для этих элементов, поэтому замкнутость системы равносильна равенству $H_0 = H$, которое, в свою очередь, означает полноту данной системы.

Замечание. Если уравнение замкнутости удовлетворено для полного в H множества E , то данная ортонормальная система замкнута.

Действительно, поскольку $H_0 \supset E$, то $H_0 = \overline{\mathcal{L}(E)} = H$.

Теорема 7 (7. II) (Рисс — Фишер). Пусть имеется числовая последовательность $\{c_k\}$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится.

Тогда существует единственный элемент $x \in H$, такой, что его коэффициенты Фурье $a_k = c_k$ ($k = 1, 2, \dots$), причем для x удовлетворено уравнение замкнутости.

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ сходится. Обозначим его сумму через x . Тогда

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m c_k x_k, x_n \right) = c_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

так как для $m \geq n$ будет $\left(\sum_{k=1}^m c_k x_k, x_n \right) = c_n$. То, что для элемента x удовлетворено уравнение замкнутости, вытекает из предыдущей теоремы.

Единственность элемента x также следует из теоремы 6, так как элемент, для которого удовлетворено уравнение замкнутости, должен быть суммой своего ряда Фурье.

Укажем еще на обобщенное уравнение замкнутости.

Пусть для элементов $x, y \in H$ удовлетворено уравнение замкнутости. Тогда, если $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — соответственные последовательности

коэффициентов Фурье этих элементов, то

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \quad (22)$$

В самом деле, на основании теоремы 6

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k;$$

поэтому

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k, \sum_{k=1}^n b_k x_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k.$$

Если рассматриваемая ортонормальная система полная, то обобщенное уравнение замкнутости удовлетворено для любых $x, y \in \mathbf{H}$.

Если в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ имеется неполная ортонормальная система $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), то в этом случае подпространство $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{H}$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{H}}$ ортогональное дополнение подпространства $\mathbf{H}_0$. Подпространство $\tilde{\mathbf{H}}$ является сепарабельным гильбертовым пространством и поэтому в нем можно выделить полную ортонормальную не более чем счетную систему $\{x_k\}$ ($k = 0, -1, -2, \dots$). Объединяя ее с имеющейся, получим систему $\{x_k\}$ ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$), которая будет полна во всем пространстве $\mathbf{H}$. Действительно, всякий элемент $y \in \mathbf{H}$, ортогональный всем x_k ($k = \dots, -1, 0, 1, \dots$), должен быть ортогонален и подпространству $\mathbf{H}_0$, т. е. должно быть $y \in \tilde{\mathbf{H}}$, а тогда, поскольку $\{x_k\}$ ($k = 0, -1, \dots$), полная в $\tilde{\mathbf{H}}$ система будет $y = 0$.

Отметим два факта из теории функций вещественной переменной, доказательства которых получаются на основании приведенных выше общих результатов.

Поскольку в пространстве $\mathbf{L}^2(a, b)$ тригонометрическая система полная, то на основании следствия 1 к теореме 6 всякая функция, суммируемая с квадратом, разлагается в ряд Фурье (тригонометрический), сходящийся в среднем (с показателем 2).

Из теоремы Рисса — Фишера и неравенства (21) вытекает также, что для того, чтобы данная измеримая функция являлась элементом пространства $\mathbf{L}^2$, необходимо и достаточно, чтобы ряд из квадратов модулей ее коэффициентов Фурье сходиллся.

Интересно, что для других классов функций доказательство подобных результатов представляет большие трудности.

7.9. В заключение докажем, что любые два сепарабельные бесконечномерные гильбертова пространства линейно изометричны (см. II. 2.7), точнее говоря, между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции и скалярное произведение (а, тем самым, и норму). Пусть $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ — пространства

указанного вида. На основании теоремы 4 существуют счетные полные ортонормальные системы $\{x_k\}$ — в $\mathbf{H}$ и $\{x'_k\}$ — в $\mathbf{H}'$. Пусть $x \in \mathbf{H}$ — произвольный элемент. Обозначим через $\{a_k\}$ последовательность коэффициентов Фурье этого элемента. Тогда по следствию 1 к теореме 6

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

причем в силу неравенства (21) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Применяя (в пространстве $\mathbf{H}'$) теорему Рисса — Фишера к последовательности $\{a_k\}$, найдем элемент $x' \in \mathbf{H}'$, имеющий те же коэффициенты Фурье, что и элемент x . При этом

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x'_k.$$

Элемент x' и соотнесем данному элементу x . Указанное соответствие удовлетворяет всем условиям из II. 2.7 (вместо равенства норм здесь нужно говорить о равенстве скалярных произведений соответствующих элементов). Не останавливаясь, вследствие ее простоты, на проверке сохранения алгебраических операций, покажем, что если $x, y \in \mathbf{H}$ и x' и y' — соответствующие им элементы из $\mathbf{H}'$, то $(x, y) = (x', y')$. Действительно, поскольку обе системы $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$ полные, для элементов x, y и, равным образом, x', y' удовлетворено обобщенное уравнение замкнутости (22), т. е.

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k,$$

где $\{a_k\}$ означает последовательность коэффициентов Фурье элемента x (и x'), а $\{b_k\}$ — элемента y (и y').

В частности, каждое сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ линейно изометрично (в указанном выше смысле) пространству $\mathbb{I}^2$. Этот результат был установлен в [83].

Отметим без доказательства аналогичный результат для произвольных гильбертовых пространств. Именно, можно доказать, что мощность полной ортонормальной системы является инвариантом пространства (размерность пространства) и что пространства одинаковой размерности линейно изометричны. По поводу доказательства этого факта см., например, П л е с с н е р.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. Основные определения

1.1. Пусть X и Y — два пространства (метрические или нормированные), и множество $\Omega \subset X$.

Если каждому $x \in \Omega$ сопоставлен элемент $y = U(x) \in Y$, то говорят, что на Ω определена *операция* U , переводящая (отображающая) Ω в Y (или из Ω в Y). Множество Ω называется *областью определения* операции U и обозначается Ω_U . Множество Δ_U всех элементов вида $y = U(x)$ называется *областью значений* операции U . *) Если $\Omega_U = X$, а $\Delta_U \subset X$, т. е. если операция U отображает X в себя, то мы будем говорить, что U — операция в X .

Операция f , областью значений которой является множество чисел, называется *функционалом* в $\Omega = \Omega_f$.

Если U — операция из $\Omega \subset X$ в Y , то через $U(E)$ ($E \subset \Omega$) мы будем обозначать множество всех элементов $y \in Y$, представимых в виде $y = U(x)$, где $x \in E$. При этом мы будем называть множество $U(E)$ *образом* множества E .

В следующих определениях выделяются наиболее важные классы операций.

а) Пусть X и Y — метрические пространства и U — операция из $\Omega \subset X$ в Y . U называется *непрерывной* в точке $x_0 \in \Omega$, если при $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in \Omega$), будет $U(x_n) \rightarrow U(x_0)$. Если U непрерывна в каждой точке множества $E \subset \Omega$, то говорят просто, что U *непрерывна на E* .

б) Если X и Y — нормированные пространства и Ω — линейное множество, содержащееся в X , то операция U из Ω в Y называется *однородной*, если

$$U(\lambda x) = \lambda U(x) \quad (x \in \Omega).$$

U называется *аддитивной*, если

$$U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2) \quad (x_1, x_2 \in \Omega).$$

*) Часто вместо $U(x)$ пишут Ux и вместо термина «операция» употребляют слово «оператор».

с) U называется *линейной* операцией, если она аддитивна и непрерывна на $\mathfrak{Q}_T$.

Отметим некоторые следствия из определений.

а) Если U — аддитивная операция из $\mathfrak{Q} \subset X$ в Y , то

$$U(0) = 0; \quad U(-x) = -U(x).$$

Действительно,

$$U(0) = U(0 + 0) = U(0) + U(0),$$

откуда $U(0) = 0$.

Далее,

$$0 = U(0) = U(x + (-x)) = U(x) + U(-x).$$

Следовательно, $U(-x) = -U(x)$.

б) Если X и Y — нормированные пространства и U — аддитивная операция из $\mathfrak{Q} \subset X$ в Y , непрерывная в некоторой точке $x_0 \in \mathfrak{Q}$, то U непрерывна на $\mathfrak{Q}$, т. е. в каждой точке множества $\mathfrak{Q}$.

В самом деле, пусть $x_n \rightarrow x$ ($x, x_n \in \mathfrak{Q}$). Так как

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)$$

и

$$x_0 + (x_n - x) \rightarrow x_0,$$

то

$$\begin{aligned} U(x_n) &= U(x_0 + (x_n - x)) + U(x - x_0) \rightarrow \\ &\rightarrow U(x_0) + U(x - x_0) = U(x). \end{aligned}$$

с) Линейная операция однородна (при условии, что пространства X и Y вещественные).

Пусть $x \in \mathfrak{Q}_T$. Из аддитивности операции U вытекает: $U(2x) = 2U(x)$ и вообще $U(px) = pU(x)$ (p — целое положительное число). Если же p — целое отрицательное, то согласно предыдущему

$$U(px) = -pU(-x) = (-p)(-U(x)) = pU(x).$$

Далее, если q — целое число,

$$U(x) = U\left(q \cdot \frac{1}{q} x\right) = qU\left(\frac{1}{q} x\right); \quad U\left(\frac{1}{q} x\right) = \frac{1}{q} U(x).$$

Поэтому $U\left(\frac{p}{q} x\right) = pU\left(\frac{1}{q} x\right) = \frac{p}{q} U(x)$ (p и q — целые).

Таким образом, установлена возможность вынесения за знак операции U рационального множителя.

Если λ — произвольное вещественное число, то, взяв последовательность рациональных чисел $r_n \rightarrow \lambda$, найдем, используя непрерывность операции U :

$$U(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(r_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n U(x) = \lambda U(x).$$

З а м е ч а н и е. Если X и Y — комплексные пространства, то одной аддитивности, очевидно, недостаточно. Надо еще добавить требование о возможности вынесения за знак операции мнимой единицы:

$$U(ix) = iU(x).$$

Впредь, говоря об аддитивных операциях в комплексных пространствах, мы всегда будем предполагать, что выполнено указанное дополнительное условие.

1.2. Укажем критерий линейности аддитивной операции.

Аддитивная операция U , переводящая множество $\mathfrak{Q}$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y , называется *ограниченной*, если существует такая постоянная C , что для всех $x \in \mathfrak{Q}$

$$\|U(x)\| \leq C\|x\|. \quad (1)$$

Теорема 1 (I.III). Для того чтобы аддитивная операция U была линейной, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.

Доказательство. Необходимость. Пусть U — линейная операция. Докажем, что

$$C_0 = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathfrak{Q}}} \|U(x)\| < \infty.$$

Если бы оказалось $C_0 = \infty$, то нашлась бы такая последовательность $\{x_n\}$ ($x_n \in \mathfrak{Q}$, $\|x_n\| = 1$), что $\lambda_n = \|U(x_n)\| \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$ ($x'_n = \frac{x_n}{\lambda_n}$). Ясно, что $x'_n \rightarrow 0$; поэтому по непрерывности U должно быть $U(x'_n) \rightarrow 0$, тогда как в действительности $\|U(x'_n)\| = 1$.

Пусть теперь $x \neq 0$ — произвольный элемент из $\mathfrak{Q}$. Полагая $x' = \frac{x}{\|x\|}$, видим, что $\|x'\| = 1$ и $x' \in \mathfrak{Q}$. Следовательно, $\|U(x')\| \leq C_0$. Но по однородности операции U (предложение с) 1.1) $U(x') = \frac{1}{\|x\|} U(x)$, так что

$$\|U(x)\| \leq C_0\|x\|$$

и (1) выполнено с $C = C_0$.

Достаточность. Из условия (1) непосредственно вытекает непрерывность операции U в точке 0 . Согласно свойству б) (1.1) U будет непрерывной в каждой точке множества $\mathfrak{Q}$.

Теорема доказана.

Покажем, что C_0 является наименьшей постоянной, удовлетворяющей неравенству (1). Действительно, если $\|x\| = 1$ ($x \in \mathfrak{Q}$), то $\|U(x)\| \leq C$ и, следовательно, $C_0 \leq C$. С другой стороны, C_0 удовлетворяет неравенству (1).

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что

$$C_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| \quad (x \in \Omega).$$

В самом деле, очевидно $C_0 \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\|$. Вместе с тем для $x \in \Omega$ ($\|x\| \leq 1, x \neq 0$) имеем $\|U(x)\| = \|x\| \left\| U\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C_0$, что приводит к противоположному неравенству.

Определяемое операцией U число C_0 называется *нормой* линейной операции U и обозначается $\|U\|$. *) Согласно сказанному выше

$$\|U\| = C_0 = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| \quad (x \in \Omega).$$

Из (1), беря там $C = C_0 = \|U\|$, получим

$$\|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|.$$

Отметим еще, что если установлено неравенство типа (1) с некоторым C , то $\|U\| \leq C$.

Обратим внимание, наконец, на простое геометрическое значение числа $\|U\|$ — это верхняя граница коэффициента растяжения вектора при преобразовании, осуществляемом операцией U .

§ 2. Некоторые функционалы и операции в конкретных пространствах

2.1. Рассмотрим следующий функционал в пространстве C :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k), \quad (1)$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — некоторая система точек промежутка $[a, b]$. Примерами таких функционалов являются: отдельное значение функции в фиксированной точке, конечные разности функции, сумма Римана, взвешенная сумма по некоторой системе узлов.

Покажем, что функционал f , определяемый равенством (1), линейен, причем

$$\|f\| = \sum_{k=1}^n |c_k|. \quad (2)$$

*) Норма операции в гильбертовом пространстве определена впервые Гильбертом (см. Г и л ь б е р т). Общее определение см. у Банаха [9a].

Понятия линейной и непрерывной операции и функционала вводились до этого многими авторами.

Аддитивность f очевидна:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \sum_{k=1}^n c_k [x_1(t_k) + x_2(t_k)] = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k x_1(t_k) + \sum_{k=1}^n c_k x_2(t_k) = f(x_1) + f(x_2). \end{aligned}$$

Далее, из неравенства

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n c_k x(t_k) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k| \|x\|$$

ясна линейность f и то, что

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Построим теперь в промежутке $[a, b]$ кусочно-линейную функцию $\bar{x}$, принимающую в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ значения

$$\bar{x}(t_k) = \operatorname{sgn} c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

линейную в промежутках $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и постоянную в промежутках $[a, t_1]$ и $[t_n, b]$.

Ясно, что $|\bar{x}(t)| \leq 1$, т. е. $\|\bar{x}\| \leq 1$. А тогда

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \operatorname{sgn} c_k = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

что вместе с имеющимся противоположным неравенством и дает (2).

2.2. Рассмотрим функционал в пространстве C , определенный равенством

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt, \quad (3)$$

где φ — данная суммируемая функция.

Примерами таких функционалов могут служить: интеграл функции по всему промежутку $[a, b]$ или по частичному промежутку, моменты функции, коэффициенты Фурье ее и т. п.

Покажем, что функционал (3) линейный и

$$\|f\| = \int_a^b |\varphi(t)| dt. \quad (4)$$

*) $\operatorname{sgn} c$ — «знак числа c » — определяется как

$$\operatorname{sgn} c = \frac{c}{|c|} \quad (c \neq 0; \operatorname{sgn} 0 = 0).$$

В случае вещественного c имеем $\operatorname{sgn} c = 1$, если $c > 0$, и $\operatorname{sgn} c = -1$, если $c < 0$.

То, что функционал f определен для всех $x \in \mathbf{C}$ (и даже для $x \in \tilde{\mathbf{M}}$) и аддитивен, — очевидно. Из неравенства

$$|f(x)| \leq \int_a^b |\varphi(t) x(t)| dt \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \int_a^b |\varphi(t)| dt = \|x\| \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

вытекает его линейность и оценка для нормы:

$$\|f\| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Устанавливая противоположное неравенство, рассмотрим сначала случай, когда функция φ непрерывна. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, чтобы колебание функции φ в каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ было меньше ε . Все частичные промежутки распределим на две группы. В первую группу отнесем промежутки $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r$ такие, что все значения функции φ в любом из этих промежутков одного знака (который может меняться от промежутка к промежутку). Остальные промежутки $\Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_s$ поместим во вторую группу. Отметим, что поскольку значения функции φ меняют знак в промежутке Δ''_k ($k = 1, 2, \dots, s$), то имеется значение, равное нулю; учитывая, что колебание функции φ в каждом частичном промежутке меньше ε , получаем отсюда

$$|\varphi(t)| < \varepsilon \quad (t \in \Delta''_k; k = 1, 2, \dots, s).$$

Определим теперь функцию $\bar{x} \in \mathbf{C}$. Для промежутков первой группы полагаем

$$\bar{x}(t) = \operatorname{sgn} \varphi(t) \quad (t \in \Delta'_j; j = 1, 2, \dots, r).$$

В остальных точках промежутка $[a, b]$ считаем функцию x линейной. При этом, если a (или b) является концом промежутка второй группы, считаем $\bar{x}(a) = 0$ (соответственно $\bar{x}(b) = 0$).

Оценим снизу величину

$$f(\bar{x}) = \int_a^b \varphi(t) \bar{x}(t) dt.$$

Принимая во внимание, что $|\bar{x}(t)| \leq 1$ ($a \leq t \leq b$), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) \bar{x}(t) dt &= \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} \varphi(t) \bar{x}(t) dt + \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} \varphi(t) \bar{x}(t) dt \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^r \int_{\Delta'_j} |\varphi(t)| dt - \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)| dt = \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2 \sum_{k=1}^s \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)| dt > \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Тем более, поскольку $\|\bar{x}\| \leq 1$,

$$\|f\| \geq f(\bar{x}) > \int_a^b |\varphi(t)| dt - 2\varepsilon(b-a).$$

Устремляя здесь $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к нужному неравенству.

Будем теперь считать φ произвольной суммируемой функцией. Так как множество всех непрерывных функций плотно в пространстве $\mathbf{L}$, можно найти непрерывную функцию $\tilde{\varphi}$ так, что

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}} = \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| dt < \varepsilon.$$

По функции $\tilde{\varphi}$ построим функцию $\bar{x} \in \mathbf{C}$ с $\|\bar{x}\| \leq 1$, как описано выше, т. е. так, что

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t) \bar{x}(t) dt \geq \int_a^b |\tilde{\varphi}(t)| dt - 2\varepsilon(b-a) = \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}} - 2\varepsilon(b-a).$$

Но

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}} \geq \|\varphi\|_{\mathbf{L}} - \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}} > \|\varphi\|_{\mathbf{L}} - \varepsilon,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \int_a^b \varphi(t) \bar{x}(t) dt = \int_a^b \tilde{\varphi}(t) \bar{x}(t) dt + \int_a^b [\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)] \bar{x}(t) dt > \\ &> \|\varphi\|_{\mathbf{L}} - \varepsilon - 2\varepsilon(b-a) - \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| dt > \|\varphi\|_{\mathbf{L}} - 2\varepsilon(b-a+1). \end{aligned}$$

Как и выше, заключаем отсюда, что

$$\|f\| \geq f(\bar{x}) > \|\varphi\|_{\mathbf{L}} - 2\varepsilon(b-a+1),$$

так что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|f\| \geq \|\varphi\|_{\mathbf{L}},$$

что и требовалось доказать.

2.3. Функционал вида (3) можно рассматривать и в пространстве $\mathbf{L}^p$ ($p > 1$). Именно докажем, что

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt, \quad (5)$$

где $\varphi \in \mathbf{L}^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), является линейным функционалом в пространстве $\mathbf{L}^p$, причем

$$\|f\| = \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} = \left[\int_a^b |\varphi(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (6)$$

Интеграл (5) определен для всех $x \in \mathbf{L}^p$. Это следует из интегрального неравенства Гёльдера (см. II. 3.3). С помощью этого же неравенства находим

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^b \varphi(t) x(t) dt \right| \leq \left[\int_a^b |\varphi(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^b |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q} \|x\|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|f\| \leq \|\varphi\|_{\mathbf{L}^q}. \quad (7)$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, рассмотрим функцию

$$\bar{x}(t) = |\varphi(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Так как

$$|\bar{x}(t)|^p = |\varphi(t)|^{p(q-1)} = |\varphi(t)|^q,$$

то $\bar{x} \in \mathbf{L}^p$, при этом

$$\|\bar{x}\| = \left[\int_a^b |\bar{x}(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_a^b |\varphi(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q} \cdot \frac{q}{p}} = [\|\varphi\|_{\mathbf{L}^q}]^{\frac{q}{p}}.$$

вследствие чего имеем

$$\begin{aligned}\|f\| &\geq f\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \int_a^b \varphi(t) \bar{x}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\|\bar{x}\|} \int_a^b |\varphi(t)|^q dt = [\|\varphi\|_{L^q}]^q \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \|\varphi\|_{L^q}.\end{aligned}$$

Вместе с (7) это и дает требуемое равенство.

Результат, установленный для $p > 1$, верен и при $p = 1$. При этом надлежит считать $L^\infty = \tilde{M}$ (ср. II. 5.4), так что

$$\|f\| = \|\varphi\|_{L^\infty} = \operatorname{vrai\,max}_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)| = Q.$$

Действительно, неравенство $\|f\| \leq Q$ очевидно. С другой стороны, взяв $\varepsilon > 0$, обозначим через e множество

$$e = \{t \in [a, b]; \varphi(t) > Q - \varepsilon\}.$$

Отметим, что $\operatorname{mes} e > 0$. Определим функцию

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \varphi(t) & t \in e, \\ 0 & t \notin e. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{x} \in L$ и $\|\bar{x}\| = \int_a^b |\bar{x}(t)| dt = \operatorname{mes} e$. Далее

$$\begin{aligned}\|f\| &\geq f\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) = \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_a^b \varphi(t) \bar{x}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_e |\varphi(t)| dt \geq \frac{1}{\operatorname{mes} e} [Q - \varepsilon] \operatorname{mes} e = Q - \varepsilon.\end{aligned}$$

Откуда, в виду произвольности ε , $\|f\| \geq Q$, что вместе с предыдущим приводит к равенству $\|f\| = Q$.

З а м е ч а н и е 1. Все проведенные выше рассуждения применимы без каких-либо изменений и в случае, когда рассматривается пространство L_T^p ($\operatorname{mes} T < \infty$; $p \geq 1$). *)

*) Впоследствии будет доказано, что функционалы, представимые в форме (5), исчерпывают множество линейных функционалов в пространстве L^p ($p \geq 1$), т. е. что (5) является общей формой линейного функционала в L^p . См. гл. VI § 2.

З а м е ч а н и е 2. Если рассматривается комплексное пространство L^p , то целесообразнее функционал (5) записывать в форме

$$f(x) = \int_a^b \overline{\varphi(t)} x(t) dt.$$

Формула (6) при этом, очевидно, сохраняется (ср. V. 1.2).

2.4. Рассмотрим интегральную операцию $y = U(x)$, заданную равенством

$$y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt, \quad (8)$$

где $K(s, t)$ — непрерывная функция. В качестве примера операций вида (8) можно привести интегралы Дирихле и Фейера. Покажем, что U — линейная операция из пространства C в C , причем

$$\|U\| = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = M. \quad (9)$$

Аддитивность операции (8) очевидна, а из неравенства

$$\|U(x)\| = \max_{a \leq s \leq b} \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right| \leq \|x\| \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = M \|x\|$$

следует ее линейность и тот факт, что $\|U\| \leq M$. Установим неравенство противоположного знака. Так как интеграл

$$\int_a^b |K(s, t)| dt$$

представляет собой непрерывную функцию от s , то существует такое $s_0 \in [a, b]$, что

$$M = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = \int_a^b |K(s_0, t)| dt.$$

Рассмотрим функционал в пространстве C типа (3) с $\varphi(t) = K(s_0, t)$, т. е.

$$f(x) = \int_a^b K(s_0, t) x(t) dt \quad (x \in C).$$

По предыдущему (см. 2.2) можно найти такой элемент $\bar{x} \in C$ с $\|\bar{x}\| \leq 1$, что

$$f(\bar{x}) \geq \|f\| - \varepsilon = \int_a^b |K(s_0, t)| dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

Полагая тогда $\bar{y} = U(\bar{x})$, имеем, очевидно,

$$\|U\| \geq \|U(\bar{x})\| = \|\bar{y}\| \geq \bar{y}(s_0) = \int_a^b K(s_0, t) \bar{x}(t) dt = f(\bar{x}) \geq M - \varepsilon$$

и ввиду произвольности ε получаем (9).

2.5. Покажем, что интегральная операция (8) может рассматриваться и как линейная операция из пространства L в L ; однако, в этом случае ([46]):

$$\|U\| = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds = M'. \quad (10)$$

Аддитивность U и здесь очевидна. Используя же теорему Фубини (Натансон-II, стр. 379) о возможности перестановки порядка интегрирования, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|U(x)\| &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right| ds \leq \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)| ds \right] |x(t)| dt \leq M' \|x\|, \end{aligned}$$

так что

$$\|U\| \leq M'.$$

Далее, как и выше, подберем $t_0 \in [a, b]$ так, чтобы

$$M' = \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(s, t)| ds = \int_a^b |K(s, t_0)| ds$$

и затем, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем, исходя из равномерной непрерывности функции $K(s, t)$, такое $\delta > 0$, что

$$|K(s', t') - K(s, t)| < \varepsilon$$

как только $|s' - s| < \delta$, $|t' - t| < \delta$. Окружим точку t_0 промежутком $d = [t_1, t_2]$ ($a \leq t_1 \leq t_0 \leq t_2 \leq b$) так, чтобы длина его была меньше δ ($t_2 - t_1 < \delta$). Положим теперь

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_2 - t_1} & t \in d \\ 0 & t \notin d \end{cases} \quad (\|\bar{x}\| = 1).$$

Обозначая $\bar{y} = U(\bar{x})$, найдем

$$\begin{aligned} \|U\| &\geq \|U(\bar{x})\| = \|\bar{y}\| = \int_a^b |\bar{y}(s)| ds = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) \bar{x}(t) dt \right| ds = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) dt \right| ds \geq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t_0) dt \right| ds - \\ &- \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left[\int_{t_1}^{t_2} |K(s, t) - K(s, t_0)| dt \right] ds = M' - \varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

что и дает (10).

Читатель без труда убедится, что если ту же операцию (8) рассматривать как операцию из пространства L в C , то

$$\|U\| = \max_{\substack{a \leq s \leq b \\ a \leq t \leq b}} |K(s, t)|.$$

2.6. Рассмотрим теперь интегральную операцию (8) как операцию из пространства L^2 в L^2 . При этом ослабим требование, накладываемое на ядро $K(s, t)$ этой операции. Именно, не предполагая его непрерывным, будем считать, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt = N^2 < \infty. \quad (11)$$

Докажем, что при этом условии выражение (8) определяет линейную операцию из L^2 в L^2 , причем

$$\|U\| \leq N. \quad (12)$$

Линейность операции (8) и оценка (12) для нормы получаются как следствие неравенства Буняковского:

$$\begin{aligned} \|U(x)\|^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right|^2 ds \leq \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \cdot \int_a^b |x(t)|^2 dt \right] ds = N^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Докажем, что в случае симметричного ядра ($K(s, t) = K(t, s)$) имеет место точное равенство

$$\|U\| = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad (13)$$

где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое значение ядра $K(s, t)$.

Если же ядро несимметрично, то норма операции U выражается более сложно, именно

$$\|U\| = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}}, \quad (14)$$

где Λ_1 — наименьшее собственное значение ядра

$$K^*(s, t) = \int_a^b K(\tau, s) K(\tau, t) d\tau.$$

Для установления равенств (13) и (14) нам придется воспользоваться некоторыми сведениями из теории интегральных уравнений. *) Как известно, интегральное уравнение с симметричным ядром имеет полную систему (нормированных) фундаментальных функций и характеристических значений: $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots$ — совокупность линейно-независимых решений однородного уравнения и тех λ , при которых однородное уравнение имеет отличные от нуля решения:

$$\omega_k(s) = \lambda_k \int_a^b K(s, t) \omega_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Согласно теореме Гильберта — Шмидта **) всякая функция, представляемая через ядро, в частности, $y(s)$ — значение операции, разлагается в сходящийся в среднем (в L^2) ряд по собственным функциям:

$$y(s) = \sum_k \frac{h_k}{\lambda_k} \omega_k(s) \quad \left(h_k = \int_a^b x(t) \omega_k(t) dt; \quad k = 1, 2, \dots \right).$$

Отсюда (ср. теорему 6 (7.11))

$$\|y\|^2 = \int_a^b |y(s)|^2 ds = \sum_k \frac{h_k^2}{\lambda_k^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_k h_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \|x\|^2.$$

Это показывает, что $\|U\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}$. Беря $\bar{x} = \omega_1$, будем иметь $\bar{y} = U(\bar{x}) = \frac{1}{\lambda_1} \bar{x}$, а потому

$$\|U\| \geq \|U(\bar{x})\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\bar{x}\| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Этим установлено (13).

*) См., например, Петровский.

**) См. там же.

Переходим к случаю произвольного ядра. Имеем, используя теорему Фубини,

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \int_a^b |y(s)|^2 ds = \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \int_a^b K(s, \tau) x(\tau) d\tau \right] ds = \\ &= \int_a^b x(\tau) d\tau \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) K(s, \tau) ds \right] x(t) dt = \\ &= \int_a^b \int_a^b K^*(t, \tau) x(t) x(\tau) dt d\tau.\end{aligned}$$

Обозначая через Λ_k , $\Omega_k(t)$ характеристические числа и фундаментальные функции ядра $K^*(t, \tau)$, найдем, пользуясь опять теоремой Гильберта — Шмидта:

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \int_a^b x(\tau) d\tau \int_a^b K^*(t, \tau) x(t) dt = \\ &= \int_a^b x(\tau) d\tau \sum_k \frac{H_k}{\Lambda_k} \Omega_k(\tau) = \sum_k \frac{H_k^2}{\Lambda_k} \leq \frac{1}{\Lambda_1} \|x\| \\ &\quad \left(H_k = \int_a^b x(t) \Omega_k(t) dt \quad k = 1, 2, \dots \right).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\|U\| \leq \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}}$; так же как в предыдущем случае, беря $\bar{x} = \Omega_1$, убеждаемся, что имеет место знак равенства, т. е. справедливо (14).

2.7. Аналогичные рассуждения позволяют определить норму операции U и в случае, когда в (8) имеется внеинтегральный член. Пусть

$$y = U(x); \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt. \quad (15)$$

Ограничимся случаем симметричного ядра. Опять применим теорему Гильберта — Шмидта, дополнив предварительно систему фундаментальных функций до полной некоторыми функциями $\omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$. Функция x будет иметь по этой системе коэффициенты Фурье, которые мы обозначим $\dots, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \dots$. У функции y будут

коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned}\eta_k &= \int_a^b y(s) \omega_k(s) ds = \\ &= \int_a^b \left[x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] \omega_k(s) ds = h_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \quad (k=1, 2, \dots), \\ \eta_k &= h_k \quad (k=0, -1, -2, \dots).\end{aligned}$$

Отметим, что во всех случаях можно пользоваться первой из этих формул, считая $\lambda_k = \infty$ для $k=0, -1, -2, \dots$. В результате получим

$$\|y\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2 \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \leq L^2 \sum |h_k|^2 = L^2 \|x\|^2,$$

где обозначено

$$L = \sup_k \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|.$$

Очевидно,

$$\|U\| = L.$$

2.8. Рассмотрим теперь операции в конечномерных пространствах. Пусть X и Y — конечномерные B -пространства размерности μ и ν соответственно. Пусть U — линейная операция, переводящая X в Y . Обозначим через e_k ($k=1, 2, \dots, \mu$) элемент пространства X , все координаты которого равны нулю, кроме k -ой, равной единице. Аналогичный смысл имеет элемент $g_k \in Y$ ($k=1, 2, \dots, \nu$). Если $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in X$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in Y$, то

$$x = \sum_{k=1}^{\mu} \xi_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\nu} \eta_k g_k.$$

Поэтому если $y = U(x)$, то

$$y = \sum_{k=1}^{\mu} \xi_k U(e_k).$$

Обозначая координаты элемента $U(e_k)$ ($k=1, 2, \dots, \mu$) через $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{\nu k}$, получим отсюда

$$y = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j g_j = \sum_{k=1}^{\mu} \xi_k \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} g_j = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \xi_k \right) g_j.$$

Следовательно, ввиду линейной независимости элементов $g_1, g_2, \dots, g_\nu$

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \xi_k \quad (j=1, 2, \dots, \nu),$$

т. е. координаты элемента $y = U(x)$ получаются из координат элемента x преобразованием с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix}.$$

Обратно, всякая матрица такого вида определяет линейную операцию из X в Y , в чем мы предоставляем убедиться читателю самостоятельно. Норма операции U зависит от того, какой метрикой мы будем пользоваться в пространствах X и Y .

а) Рассматриваем U как операцию из m_μ в m_ν (см. II. 4.3). Тогда

$$\|y\| = \|U(x)\| = \max_j |\eta_j| \leq \max_j \sum_{k=1}^{\mu} |a_{jk}| \xi_k \leq \|x\| \max_j \sum_{k=1}^{\mu} |a_{jk}|,$$

т. е.

$$\|U\| \leq \max_j \sum_{k=1}^{\mu} |a_{jk}| = L.$$

Выберем j_0 так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\mu} |a_{j_0 k}| = L,$$

и построим $\bar{x} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_\mu)$, полагая

$$\bar{\xi}_k = \operatorname{sgn} a_{j_0 k} \quad (k = 1, 2, \dots, \mu).$$

Тогда

$$\|U\| \geq \|U(\bar{x})\| = \max_j \left| \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \bar{\xi}_k \right| \geq \sum_{k=1}^{\mu} a_{j_0 k} \bar{\xi}_k = \sum_{k=1}^{\mu} |a_{j_0 k}| = L.$$

Итак,

$$\|U\| = L = \max_j \sum_{k=1}^{\mu} |a_{jk}|.$$

б) Если U рассматривать как операцию из l_μ в l_ν (см. II. 2.8), то

$$\|U\| = \max_k \sum_{j=1}^{\nu} |a_{jk}| = L'. \quad (16)$$

Действительно, то, что $\|U\| \leq L'$, очевидно. Далее, имеется такое k_0 , что

$$\sum_{j=1}^{\nu} |a_{jk_0}| = L'.$$

Достаточно теперь взять $\bar{x} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица стоит на k_0 -ом месте). Тогда

$$\|U\| \geq \|U(\bar{x})\| = \sum_{j=1}^{\nu} \left| \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \bar{x}_k \right| = \sum_{j=1}^{\nu} |a_{jk_0}| = L',$$

так что $\|U\| = L'$.

с) Рассмотрим ту же операцию, считая пространства эвклидовыми, т. е. $X = R^{\mu}$, $Y = R^{\nu}$. Тогда, если $\mu = \nu$ и матрица A симметрична,

$$\|U\| = |\lambda_1|.$$

При этом λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .

В общем случае

$$\|U\| = \sqrt{\Lambda_1},$$

где Λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A^*A (A^* — эрмитовски-сопряженная матрица)*).

Разберем сначала первый случай. Матрица A имеет вещественные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}$ и линейно независимые собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_{\nu}$, которые можно считать нормированными и попарно ортогональными. Если $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{\nu} x_{\nu}$, то

$$\begin{aligned} y &= U(x) = U(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{\nu} x_{\nu}) = \\ &= c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \dots + c_{\nu} \lambda_{\nu} x_{\nu}; \\ \|y\|^2 &= |c_1 \lambda_1|^2 + |c_2 \lambda_2|^2 + \dots + |c_{\nu} \lambda_{\nu}|^2 \leq \\ &\leq \lambda_1^2 (|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_{\nu}|^2) = \lambda_1^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

причем равенство достигается для $x = x_1$.

Замечание. Отметим наличие и иного выражения для $\|U\|$, именно

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \bar{x}_k \right) \bar{x}_j \right|.$$

В самом деле,

$$|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| = \|U(x)\| \|x\| \leq \|U\| \|x\| \quad (\|x\| = 1).$$

Но для $x = x_1$ равенство достигается. Следовательно, $\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|U\|$.

*) Элементы a_{jk}^* матрицы A^* определяются равенствами $a_{jk}^* = \bar{a}_{kj}$ ($j = 1, 2, \dots, \mu$; $k = 1, 2, \dots, \nu$). В частности, если A — вещественная матрица, то $a_{jk}^* = a_{kj}$.

Пусть теперь матрица A произвольная. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}\|U\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sum_{j=1}^{\nu} \left(\sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \xi_k \sum_{s=1}^{\mu} \bar{a}_{js} \bar{\xi}_s \right) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sum_{s=1}^{\mu} \left[\sum_{k=1}^{\mu} \left(\sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} a_{sj}^* \right) \xi_k \right] \bar{\xi}_s = \sup_{\|x\|=1} (A^* A x, x) = \Lambda_1,\end{aligned}$$

где, в соответствии со сказанным в замечании, Λ_1 есть наибольшее собственное значение матрицы $A^* A$.

При $\nu = 1$ операция U превращается в функционал. Матрица A вырождается в этом случае в однострочечную. Изменяя обозначения, можно сказать, что всякий линейный функционал f в μ -мерном пространстве X определяется системой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu})$ из μ чисел:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\mu} \varphi_k \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mu}) \in X). \quad (17)$$

Так как и, наоборот, любая система чисел $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu})$ определяет по формуле (17) некоторый линейный функционал в X , то можно отождествить функционал f с определяющим его набором и писать

$$f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu}). \quad (18)$$

Норма функционала (18) в различных конкретных пространствах определяется следующим образом:

$$X = m_{\mu} \quad \|f\| = \sum_{k=1}^{\mu} |\varphi_k|, \quad (19)$$

$$X = l_{\mu} \quad \|f\| = \max_k |\varphi_k|, \quad (20)$$

$$X = R^{\mu} \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\mu} |\varphi_k|^2}. \quad (21)$$

Замечание. Если X — комплексное пространство, то целесообразнее записывать формулу (17) в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\mu} \bar{\varphi}_k \xi_k,$$

по-прежнему отождествляя f с системой $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu})$. (Ср. замечание 2 в 2.3.)

§ 3. Линейные функционалы и операции в гильбертовом пространстве

3.1. Оператор *) в сепарабельном гильбертовом пространстве допускает матричное представление, подобное матричному представлению операций в конечномерных пространствах (см. III. 2.8).

Действительно, пусть U — оператор в сепарабельном (бесконечномерном) гильбертовом пространстве H . Возьмем произвольную полную ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Каждый элемент $x \in H$ может быть представлен в форме

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k,$$

где $c_k = (x, x_k)$ — коэффициенты Фурье элемента x . Поэтому на основании непрерывности оператора U

$$y = Ux = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Ux_k.$$

Откуда, сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей, найдем

$$d_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k, \quad (1)$$

где d_j — коэффициенты Фурье элемента y , а a_{jk} — коэффициенты Фурье элемента Ux_k .

Итак, последовательность коэффициентов Фурье элемента $y = Ux$ получается из последовательности коэффициентов Фурье элемента x посредством преобразования матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, как и в конечномерном случае, оператор U допускает матричное представление.

Следует, однако, иметь в виду, что в отличие от конечномерного случая отнюдь не всякая матрица типа (2) определяет линейный оператор. Необходимым и достаточным условием этого является

*) Когда речь идет о гильбертовом пространстве, мы будем пользоваться термином „оператор“ и обозначением Ux . Ср. примечание на стр. 96.

существование такой постоянной C , что при любых $m, n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^m |c_k|^2, \quad (3)$$

каковы бы ни были $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Необходимость этого условия почти очевидна. Беря в качестве x элемент, коэффициенты Фурье которого, начиная с $(m+1)$ -го, равны нулю, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} c_k \right|^2 = \\ &= \|y\|^2 = \|Ux\|^2 \leq \|U\|^2 \|x\|^2 = \|U\|^2 \sum_{k=1}^m |c_k|^2, \end{aligned}$$

откуда видно, что в качестве C можно взять $\|U\|$.

Наоборот, если соблюдено неравенство (3), то, устремляя в нем m и затем n к бесконечности, получим

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = C^2 \|x\|^2.$$

Высказанный признак затруднителен для проверки, в связи с чем мы укажем более простое достаточное условие, которое сильно сужает класс операторов. Именно, если

$$D^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty,$$

то матрица (2) определяет по формулам (1) линейный оператор в H . Действительно,

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|x\|^2,$$

откуда вытекает ограниченность оператора U и оценка $\|U\| \leq D$.

Отметим еще, что матричное представление оператора U зависит от выбора ортонормальной системы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, при изменении которой изменяется и матрица (2), представляющая данный оператор U . Вопрос о том, при каких условиях две матрицы типа (2) определяют один и тот же оператор, представляет большие трудности, и мы не будем его исследовать, отсылая читателя к специальным монографиям. *)

3.2. Выясним теперь общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

*) См., например, А х и е з е р и Г л а з м а н.

Рассматривая в пространстве $\mathbf{H}$ скалярное произведение (x, y) с фиксированным $y \in \mathbf{H}$, мы без труда убеждаемся, что оно представляет собой линейный функционал. Действительно, пусть

$$f(x) = (x, y). \quad (4)$$

Аддитивность и однородность функционала f есть просто аксиома 2 пространства со скалярным произведением, а ограниченность f является следствием неравенства Коши — Буняковского:

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

на основании которого можно заключить, что

$$\|f\| \leq \|y\|. \quad (5)$$

Докажем, что функционалами вида (4) исчерпываются все линейные функционалы в $\mathbf{H}$, причем в (5) имеет место знак равенства.

Теорема 1 (3. III). *Каков бы ни был линейный функционал f в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, существует элемент $y \in \mathbf{H}$, однозначно определяемый функционалом f , такой, что при каждом $x \in \mathbf{H}$ имеет место (4). При этом справедливо равенство*

$$\|f\| = \|y\|. \quad (6)$$

Доказательство. Установим сначала существование элемента y . Обозначим через $\mathbf{H}_0$ множество тех элементов $x \in \mathbf{H}$, для которых $f(x) = 0$. Вследствие линейности функционала f это множество является подпространством. Если при этом $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$, то можно принять $y = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{H}$. Пусть $y_0 \in \bar{\mathbf{H}}_0$. Представим y_0 в форме

$$y_0 = y' + y'' \quad (y' \in \mathbf{H}_0, y'' \perp \mathbf{H}_0)$$

(теорема 1 (7. II)). Ясно, что $y'' \neq 0$, $f(y'') \neq 0$, поэтому можно считать $f(y'') = 1$. Возьмем произвольный элемент $x \in \mathbf{H}$ и обозначим $f(x) = \alpha$. Элемент $x' = x - \alpha y'' \in \mathbf{H}_0$, так как

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Поэтому

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y''),$$

так что

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right),$$

и можно принять $y = \frac{y''}{(y'', y'')}$.

Итак, существование элемента y доказано.

Единственность этого элемента устанавливается совсем просто. Действительно, если для всех $x \in H$

$$(x, y) = (x, y_1),$$

то $(x, y - y_1) = 0$ и, следовательно, $y - y_1 \perp H$, что возможно лишь в случае $y = y_1$.

Далее,

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|,$$

что вместе с (5) дает равенство (6). *)

Теорема полностью доказана.

В частности, в пространстве L^2 общей формой линейного функционала будет

$$f(x) = (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \quad (x, y \in L^2).$$

В пространстве l^2

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k} \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in l^2).$$

Общая форма функционала в пространстве L^2 указана Фреше [1096]; для абстрактного гильбертова пространства — в сепарабельном случае — Нейманом [83], в общем случае — Реллихом [95].

3.3 Пусть U линейный (ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим функционал

$$f(x) = (Ux, y),$$

где y — фиксированный элемент из H . Очевидно, f — аддитивный функционал, а так как

$$|f(x)| = |(Ux, y)| \leq \|Ux\| \|y\| \leq \|U\| \|x\| \|y\|,$$

то функционал f ограниченный, причем

$$\|f\| \leq \|U\| \|y\|. \quad (7)$$

Поэтому по теореме 1 существует элемент $y^* \in H$ такой, что

$$f(x) = (x, y^*) \quad (x \in H),$$

т. е.

$$(Ux, y) = (x, y^*) \quad (x \in H). \quad (8)$$

Элемент y^* однозначно определяется функционалом f и, следовательно, в конечном счете элементом y . Таким образом, сопоставляя элементу y элемент y^* , мы получаем оператор в H . Этот оператор

*) Если $y = 0$, то (6) следует из (4) непосредственно.

обозначается U^* и называется *сопряженным к U* . Заменяя в (8) y^* на U^*y , получим соотношение, определяющее сопряженный оператор:

$$(Ux, y) = (x, U^*y) \quad (x, y \in \mathbf{H}).$$

Оператор U^* аддитивен, так как, складывая соотношения

$$(Ux, y_1) = (x, U^*y_1),$$

$$(Ux, y_2) = (x, U^*y_2),$$

которые выполняются для всех $x \in \mathbf{H}$, получим

$$(Ux, y_1 + y_2) = (x, U^*y_1 + U^*y_2),$$

откуда

$$U^*(y_1 + y_2) = U^*y_1 + U^*y_2.$$

Аналогично

$$(Ux, iy) = -i(Ux, y) = -i(x, U^*y) = (x, iU^*y) \quad (x, y \in \mathbf{H}),$$

откуда

$$U^*(iy) = iU^*y.$$

Далее, поскольку $\|f\| = \|y^*\|$, то неравенство (7), переписанное в форме

$$\|y^*\| = \|U^*y\| \leq \|U\| \|y\|,$$

показывает ограниченность оператора U^* , причем $\|U^*\| \leq \|U\|$.

Нетрудно видеть, что оператор $U^{**} = (U^*)^*$ совпадает с U . В самом деле, для всех $x, y \in \mathbf{H}$ имеют место равенства

$$(U^*x, y) = (x, U^{**}y)$$

и

$$(U^*x, y) = (x, Uy),$$

откуда $(x, U^{**}y) = (x, Uy)$, так что $U^{**}y = Uy$ при любом $y \in \mathbf{H}$.

Отмеченное обстоятельство позволяет установить равенство норм операторов U и U^* . Действительно, пользуясь уже доказанным неравенством, получим $\|U\| = \|U^{**}\| \leq \|U^*\|$, что вместе с предыдущим и приводит к равенству $\|U^*\| = \|U\|$.

Оператор U , совпадающий со своим сопряженным, называется *самосопряженным*. Самосопряженный оператор характеризуется равенством

$$(Ux, y) = (x, Uy) \quad (x, y \in \mathbf{H}).$$

Самосопряженные операторы играют основную роль в теории операторов в гильбертовом пространстве, так как наиболее глубокие факты этой теории относятся как раз к самосопряженным операторам. При этом оказывается возможным рассматривать и неограниченные операторы.

Ниже (см. главу IX) понятие сопряженного оператора будет обобщено на случай линейных операций в произвольных B -пространствах. Однако, при этом сопряженный оператор будет определен, вообще говоря, в другом пространстве, поэтому понятие самосопряженного оператора не может быть перенесено на общий случай.

Пусть $H = L^2$ и U есть интегральный оператор, определенный в III. 2.6, т. е. $y = Ux$ означает

$$y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt, \quad \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < +\infty \right). \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что сопряженный оператор U^* также является интегральным. Именно, если $y^* = U^*y$, то

$$y^*(s) = \int_a^b K^*(s, t) y(t) dt \quad (K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}). \quad (10)$$

Действительно, для любого $x \in L^2$ должно быть

$$(Ux, y) = (x, y^*),$$

т. е.

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] \overline{y(s)} ds = \int_a^b x(t) \overline{y^*(t)} dt.$$

Следовательно,

$$\int_a^b x(t) \left[y^*(t) - \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds \right] dt = 0,$$

откуда ввиду произвольности x получаем

$$y^*(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds,$$

что с точностью до обозначений совпадает с (10).

Оператор (9) будет самосопряженным, если ядро $K(s, t)$ комплексно симметрично, т. е. если

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}.$$

Пусть теперь оператор U определяется матрицей (2). Обозначая коэффициенты Фурье элемента y через $d_1, d_2, \dots$, будем иметь

$$(Ux, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right) \bar{d}_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_k \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_{jk}} d_j = (x, y^*),$$

где y^* — элемент, коэффициенты Фурье которого суть

$$d_j^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^* d_k \quad (j = 1, 2, \dots; a_{jk}^* = \bar{a}_{kj}).$$

Поскольку $y^* = U^* y$, то это значит, что оператор U^* определяется матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1k}^* & \dots \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2k}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}^* & a_{j2}^* & \dots & a_{jk}^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

эрмитовски-сопряженной с матрицей (2). В частности, $U^* = U$ означает $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

3.4. Важный класс операторов в гильбертовом пространстве образуют так называемые операторы проектирования, или проекторы.

Пусть H_0 — подпространство гильбертова пространства H . Согласно теореме 1 (7. II) каждому $x \in H$ однозначно соответствует его проекция на подпространство H_0 . Тем самым в H определен оператор $P = P_{H_0}$, который называется *оператором проектирования*, или *проектором* (на подпространство H_0).

Отметим очевидные свойства проекторов.

- а) Каков бы ни был $x \in H$, элементы Px и $x - Px$ ортогональны.
- б) $x \in H_0$ эквивалентно $Px = x$.
- с) $x \perp H_0$ эквивалентно $Px = 0$.

Далее, так как $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$, то $\|Px\| \leq \|x\|$, откуда $\|P\| \leq 1$. Если H_0 не сводится к одному нулевому элементу, то, взяв $\bar{x} \in H_0$ с $\|\bar{x}\| = 1$, получим $\|P\| \geq \|P\bar{x}\| = \|\bar{x}\| = 1$. Так что установлено

- д) $\|P\| = 1$.

Класс проекторов характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2 (3. III). Для того чтобы линейный оператор P в H был проектором, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) P был самосопряженным оператором;
- 2) для каждого $x \in H$ выполнялось равенство $P(Px) = Px$.

Доказательство. Необходимость. Пусть P — проектор на подпространство H_0 . Возьмем произвольные $x, y \in H$ и представим их в форме

$$\begin{aligned} x &= x' + x'' & (x' &= Px \in H_0, \quad x'' \perp H_0), \\ y &= y' + y'' & (y' &= Py \in H_0, \quad y'' \perp H_0). \end{aligned}$$

Имеем тогда

$$(Px, y) = (x', y' + y'') = (x', y') = (x' + x'', y') = (x, Py),$$

откуда следует самосопряженность оператора P .

Далее, с помощью b)

$$P(Px) = Px' = x' = Px,$$

что доказывает необходимость второго условия.

Достаточность. Пусть P — линейный оператор, удовлетворяющий обоим условиям теоремы. Обозначим через H_0 множество всех таких $x \in H$, для которых $Px = x$. Без труда проверяется, что H_0 является подпространством. Докажем, что P — проектор на H_0 . В самом деле, возьмем произвольный $x \in H_0$ и представим его в форме $x = Px + (x - Px)$. Надо доказать, что $Px \in H_0$, $x - Px \perp H_0$.

Первое очевидно, так как $P(Px) = Px$. Если, далее, $u \in H_0$, то $Pu = u$ и, следовательно,

$$(x - Px, u) = (x, u) - (Px, u) = (x, u) - (x, Pu) = 0;$$

таким образом, $x - Px \perp H_0$, и доказательство теоремы закончено. Чтобы получить удобное матричное представление проектирующего оператора P , следует выбрать ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots$ так, чтобы при каждом $k = 1, 2, \dots$ было либо $x_k \in H_0$, либо $x_k \perp H_0$.*)

При таком выборе будет

$$a_{jk} = (Px_k, x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ 0 & j = k \quad x_k \perp H_0, \\ 1 & j = k \quad x_k \in H_0. \end{cases}$$

Таким образом, все элементы матрицы (2), представляющей проектор P , равны нулю, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, которые могут равняться единице.

Дальнейшие теоремы о проекторах см. в главе V.

Сопряженные операторы и проекторы введены в случае сепарабельного гильбертова пространства — в [83], в общем случае — в [95].

*) Это достигается таким путем: выбираются ортонормальные системы в H_0 и в ортогональном дополнении к H_0 , полные в каждом из подпространств. Эти системы объединяются затем в одну. (Ср. II.7.8.)

ГЛАВА IV

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛОВ

§ 1. Распространение линейных операций

1.1. Исследуя ту или иную операцию, естественно пытаться расширить область ее определения до возможных пределов, с тем, однако, чтобы новая операция, заданная в расширенной области, обладала некоторыми определенными свойствами: например, была бы непрерывной, аддитивной, линейной и т. д. Поскольку полнее всего изучены линейные операции, то наибольший интерес представляет последний случай.

Условимся в обозначениях. Пусть U_0 и U — две операции, переводящие соответственно множества $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}$ пространства X в пространство Y . Если $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$ и для $x \in \mathcal{Q}_0$ имеет место $U(x) = U_0(x)$, то U называется *распространением* (или *продолжением*) операции U_0 . При этом пишут $U_0 \subset U$.

Теорема 1 (I. IV)*. Пусть X и Y — нормированные пространства и U_0 — операция из $\mathcal{Q} \subset X$ в Y . Для того чтобы U_0 допускала линейное распространение U на множество $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная C , что

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|, \quad (1)$$

каковы бы ни были совокупности элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $\mathcal{Q}$ и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Доказательство. Необходимость. Если распространение U существует, то, поскольку элемент $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$ (см. II.1.5),

$$U(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k).$$

*) См. [97в] и [116].

Но по линейности операции U имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) \right\| = \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\| = \|U\| \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|,$$

т. е. (1) выполнено при $C = \|U\|$.

Достаточность. Из (1) сразу же следует, что если линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна нулевому элементу

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0, \text{ то и } \sum_{k=1}^n \alpha_k U_0(x_k) = 0.$$

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in \mathcal{L}(\Omega)$. Согласно II.1.5. x может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \quad (x_k \in \Omega; k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Положим

$$U(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k). \quad (3)$$

Докажем, что, несмотря на возможную многозначность представления (2), значение операции (3) определяется элементом x однозначно.

Действительно, если $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda'_k x_k$, *) то $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) x_k = 0$.

Следовательно, как было отмечено выше, $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda'_k) U_0(x_k) = 0$.

Стало быть,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda'_k U_0(x_k).$$

Аддитивность операции U без труда проверяется. В самом деле если $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, а $y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$, то $x + y = \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k) x_k$, и

$$\begin{aligned} U(x + y) &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k) U_0(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_0(x_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \mu_k U_0(x_k) = U(x) + U(y). \end{aligned}$$

*) Считая элементы x_k в обеих суммах одинаковыми, мы не уменьшаем общности, так как в каждой сумме можно приписать слагаемые с недостающими x_k с нулевыми коэффициентами.

Из (1) вытекает ограниченность операции U , так как

$$\|U(x)\| \leq C\|x\| \quad (x \in L(\Omega)).$$

Очевидно также, что U есть распространение операции U_0 .

Теорема полностью доказана.

1.2. Следующая теорема устанавливает возможность распространения линейной операции с данного множества на его замыкание.

Теорема 2 (I. IV) (о распространении по непрерывности). Пусть X и Y — нормированные пространства, причем Y — полное. Всякая линейная операция U_0 из $\Omega \subset X$ в Y допускает единственное линейное распространение U на замыкание $\bar{\Omega}$ множества Ω , при этом $\|U\| = \|U_0\|$.

Доказательство. Пусть $x \in \bar{\Omega}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ элементов из Ω , сходящаяся к x . Рассмотрим в пространстве Y последовательность $\{U_0(x_n)\}$. Так как $\|U_0(x_n) - U_0(x_m)\| \leq \|U_0\| \|x_n - x_m\|$, то она сходится в себе, поэтому вследствие полноты пространства Y существует $\lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n)$. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. В самом деле, если $x'_n \in \Omega$ и $x'_n \rightarrow x$, то

$$\|U_0(x'_n) - U_0(x_n)\| \leq \|U_0\| \|x'_n - x_n\| \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n)$.

Положим теперь

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_0(x_n).$$

Аддитивность операции U очевидна, а переход к пределу в неравенстве $\|U_0(x_n)\| \leq \|U_0\| \|x_n\|$ дает $\|U(x)\| \leq \|U_0\| \|x\|$, т. е. ограниченность операции U , и неравенство $\|U\| \leq \|U_0\|$. Так как, с другой стороны,

$$\|U\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in \bar{\Omega}}} \|U(x)\| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in \Omega}} \|U_0(x)\| = \|U_0\|,$$

то $\|U\| = \|U_0\|$.

Если, наконец, $V \supset U_0$ — линейная операция из $\bar{\Omega}$ в Y , то из соотношения $U_0(x_n) = V(x_n)$ ($x_n \in \Omega$; $x_n \rightarrow x$) в силу линейности операции V предельным переходом получаем $U(x) = V(x)$, т. е. операции U и V совпадают.

Теорема доказана.

Построенная в теореме операция U называется *замыканием* операции U_0 .

Следствие. Если линейная операция U , отображающая нормированное пространство X в B -пространство Y , обращается в нуль на плотном в X множестве, то $U(x) = 0$ для любого $x \in X$.

1.3. Если линейная операция U_0 определена на плотном в пространстве X множестве $\mathcal{Q}$, то по теореме 2 ее можно распространить на все X с сохранением линейности (и даже нормы). Если, однако, отбросить условие плотности $\mathcal{Q}$ в X , то, вообще говоря, такое распространение оказывается невозможным.

Вопрос о существовании продолжения операции U_0 , имеющем ту же норму, что и $\bar{U}_0$, решается в зависимости от свойств пространства образов — Y .

Для удобства дальнейших формулировок введем определения: систему множеств $\mathfrak{A} = \{A\}$ будем называть *сцепленной*, если каждая пара множеств из этой системы имеет непустое пересечение.

Будем говорить, что нормированное пространство Y есть *пространство типа $\mathfrak{M}$* , если Y является нормированным пространством, каждое сцепленное семейство замкнутых сфер которого имеет непустое пересечение.

Простейшим примером пространства типа $\mathfrak{M}$ является числовая прямая (вещественная). Действительно, замкнутая сфера в этом пространстве представляет собой замкнутый промежуток. Рассмотрим поэтому сцепленное множество $\{[a_\xi, b_\xi]\}$ ($\xi \in \mathfrak{E}$) замкнутых промежутков и проверим, что это множество имеет непустое пересечение. Фиксируем для этого некоторое $\xi_0 \in \mathfrak{E}$. Поскольку промежутки $[a_\xi, b_\xi]$ и $[a_{\xi_0}, b_{\xi_0}]$ имеют общие точки, каково бы ни было $\xi \in \mathfrak{E}$, то

$$a_{\xi_0} \leq b_\xi \quad (\xi \in \mathfrak{E}).$$

Следовательно,

$$a_{\xi_0} \leq \inf_{\xi \in \mathfrak{E}} b_\xi.$$

А так как $\xi_0 \in \mathfrak{E}$ произвольно, то отсюда

$$\bar{a} = \sup_{\xi \in \mathfrak{E}} a_\xi \leq \inf_{\xi \in \mathfrak{E}} b_\xi = \bar{b}.$$

Таким образом, любая точка промежутка $[\bar{a}, \bar{b}]$ входит в каждый из промежутков $[a_\xi, b_\xi]$, что и доказывает утверждение.

Аналогичными рассуждениями, которые мы предоставляем читателю, доказывается, что вещественные пространства M_T и $\tilde{M}_T$ также являются пространствами типа $\mathfrak{M}$.

Отметим, что комплексная плоскость, рассматриваемая как нормированное пространство (комплексное), не является пространством типа $\mathfrak{M}$, в чем проще всего убедиться с помощью чертежа (рис. 4).

Класс пространств типа $\mathfrak{M}$ является довольно узким. Читатель может убедиться, что, кроме пространств M_T и $\tilde{M}_T$, ни одно из

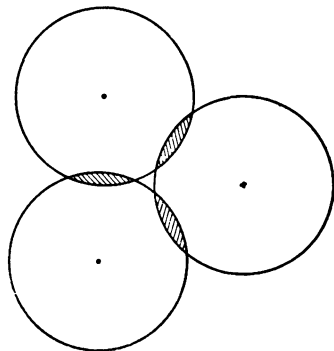


Рис. 4

рассмотренных выше конкретных нормированных пространств не является пространством типа $\mathfrak{M}$. *)

Укажем, наконец, что всякое пространство Y типа $\mathfrak{M}$ полно.

Действительно, пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства Y . Обозначим

$$r_n = \sup_{m \geq n} \|y_m - y_n\|$$

и рассмотрим семейство замкнутых сфер $\{\bar{K}_{r_n}(y_n)\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Это сцепленное семейство, так как при $m > n$

$$\|y_m - y_n\| \leq r_n$$

и, следовательно, $y_m \in \bar{K}_{r_n}(y_n) \cap \bar{K}_{r_m}(y_m)$. Если Y — пространство типа $\mathfrak{M}$, то существует элемент $y \in Y$, входящий в каждую из сфер $\bar{K}_{r_n}(y_n)$, т. е. имеем

$$\|y - y_n\| \leq r_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и, поскольку $r_n \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow y$. Полнота Y проверена.

Следующие ниже основные теоремы 3 и 4 доказаны Нахбином [89]. В этой же работе дается характеристика пространств типа $\mathfrak{M}$ с точки зрения теории полуупорядоченных пространств. Уточнение этой характеристики дано Келли [52]. По поводу распространения линейных операций см. также [2а, б], [44а] и монографию Канторович, Вулих, Пинскер.

Теорема 3 (1. IV). Пусть X — нормированное пространство, а X_0 — линейное множество, содержащееся в X . **) Пусть, далее, U_0 — линейная операция, отображающая X_0 в пространство Y типа $\mathfrak{M}$. Тогда существует распространение U операции U_0 , отображающее X в Y , причем $\|U\| = \|U_0\|$.

Доказательство. Пусть X_0 — линейное подмножество пространства X . Элементарным расширением линейного множества X_0 назовем линейное множество X_1 , состоящее из всех элементов вида

$$x' = \lambda x_1 + x \quad (x \in X_0), \quad (4)$$

где x_1 — данный элемент из X .

Докажем, что при выполнении условий теоремы всякая линейная операция U_0 , переводящая $X_0 \subset X$ в Y , допускает линейное распро-

*) Числовая прямая является частным случаем пространства M_T . Именно, если T состоит из одного элемента.

**) Имея в виду теорему 2 и полноту пространства Y , можно считать, что X_0 — замкнутое множество, т. е. подпространство пространства X .

странение U_1 с сохранением нормы на любое элементарное расширение X_1 множества X_0 . *)

Очевидно, если операция U_1 существует, она полностью определяется указанием элемента $y_0 = U_1(x_1)$. Так как норма распространенной операции должна остаться неизменной, то для этого элемента выполняется соотношение:

$$\|y_0 - U_0(x)\| = \|U_1(x_1) - U_1(x)\| \leq \|U_1\| \|x_1 - x\| = \|U_0\| \|x_1 - x\|.$$

Таким образом, необходимым условием существования операции U_1 является наличие общей точки у всех замкнутых сфер $K^{(x)} = \bar{K}_r(y)$ с центром в точке $y = U_0(x)$ и радиусом $r = r_x = \|U_0\| \|x_1 - x\|$.

Докажем, что это условие является также достаточным. Действительно, обозначив через $\mathfrak{K}$ совокупность всех сфер рассмотренного вида, предположим, что имеется точка y_0 , принадлежащая всем сферам семейства $\mathfrak{K}$. Положим

$$U_1(x_1) = y_0.$$

При этом для $x' \in X_1$ в соответствии с (4)

$$U_1(x') = \lambda U_1(x_1) + U_1(x) = \lambda y_0 + U_0(x).$$

Отсюда в виду однозначности представления (4) следует аддитивность (и однородность) операции U_1 , а так как в силу условия (при $\lambda \neq 0$)

$$\begin{aligned} \|U_1(x')\| &= |\lambda| \|y_0 + U_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)\| \leq r_{-\frac{x}{\lambda}} \cdot |\lambda| = |\lambda| \|U_0\| \|x_1 + \frac{x}{\lambda}\| = \\ &= \|U_0\| \|x'\|, \end{aligned}$$

то U_1 — линейная операция, причем $\|U_1\| \leq \|U_0\|$. Обратное неравенство, очевидно, поэтому окончательно $\|U_1\| = \|U_0\|$.

Итак, надо доказать лишь, что сферы $K^{(x)}$ семейства $\mathfrak{K}$ имеют непустое пересечение, для чего, принимая во внимание условия теоремы, достаточно проверить, что $\mathfrak{K}$ — сцепленное семейство.

Для этого возьмем две произвольные сферы $K^{(x'_1)}$ и $K^{(x'_2)}$ из $\mathfrak{K}$. Имеем

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r_{x'_1} + r_{x'_2} = \|U_0\| [\|x_1 - x'_1\| + \|x_1 - x'_2\|] \geq \\ &\geq \|U_0\| \|(x_1 - x'_1) - (x_1 - x'_2)\| \geq \|U_0\| \|x'_1 - x'_2\| = \|y'_1 - y'_2\|, \end{aligned}$$

*) Речь идет о собственном расширении, т. е. когда $x_1 \in \bar{X}_0$. В этом случае, как нетрудно видеть, представление (4) единственно.

т. е. сумма радиусов не меньше расстояния между центрами сфер, следовательно, сферы $K(x_1)$ и $K(x_2)$ пересекаются, *) а это ввиду их произвольности и означает, что семейство $\mathfrak{R}$ сцепленное.

Дальнейшие рассуждения проведем сначала для случая, когда пространство X сепарабельно. Пусть D — счетное плотное в X множество. Выберем из него элементы, не входящие в X_0 , и перенумеруем их; пусть это будет

$$x_1, x_2, \dots^{**}) \quad (5)$$

«Присоединим» к линейному множеству X_0 элемент x_1 , т. е. образуем элементарное расширение X_1 линейного множества X_0 с помощью элемента x_1 .

Выше мы построили операцию U_1 , определенную на X_1 при этом так, что

$$U_1 \supset U_0 \quad \|U_1\| = \|U_0\|.$$

Допустим, что уже построены линейные множества $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n$ и линейные операции $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n$ (U_k есть операция из X_k в Y) так, что каждое из X_k является элементарным расширением X_{k-1} ($k = 1, 2, \dots, n$) и

$$\|U_n\| = \|U_{n-1}\| = \dots = \|U_0\|.$$

Возможны два случая:

1) $X_n = X$. Тогда операция U_n обладает требуемыми свойствами и доказательство закончено.

2) $X_n \neq X$. Тогда среди элементов (5) найдется не входящий в X_n . Обозначим первый из элементов такого рода через x_{k_n} и «присоединим» его к X_n . Расширенное линейное множество обозначим через X_{n+1} . Распространяя U_n на X_{n+1} , построим линейную операцию U_{n+1} , переводящую X_{n+1} в Y и имеющую ту же норму, что и операция U_n .

Таким образом, либо после конечного числа шагов мы построим требуемое распространение, либо придем к последовательности линейных множеств $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ и операций $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$, переводящих X_n в Y соответственно и таких, что

$$\|U_0\| = \|U_1\| = \dots = \|U_n\| = \dots$$

При этом каждый элемент $\bar{x}$ из $\bar{D}$ входит в одно из множеств X_n . То же самое можно сказать об элементах линейной оболочки $\mathcal{L}(D)$ множества D .

*) Если $\bar{K}_{r_1}(y_1)$ и $\bar{K}_{r_2}(y_2)$ — две замкнутые сферы пространства Y и $r_1 + r_2 \geq \|y_1 - y_2\|$, то их пересечение не пусто; например, элемент $\frac{r_2}{r_1 + r_2} y_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} y_2 \in \bar{K}_{r_1}(y_1) \cap \bar{K}_{r_2}(y_2)$.

**) Предполагается, что элементы (5) существуют. В противном случае достаточно применить теорему 2.

Пусть $x \in \mathcal{L}(D)$. В силу только что отмеченного при некотором n будет $x \in X_n$. Положим

$$U^{(0)}(x) = U_n(x). \quad (6)$$

Определение $U^{(0)}(x)$ не зависит от того, как выбрано n в равенстве (6), так как, если $x \in X_m$ и $x \in X_n$, то при $m < n$ будет $U_m \subset U_n$, следовательно,

$$U_m(x) = U_n(x).$$

Операция $U^{(0)}$, определенная равенством (6), аддитивна. В самом деле, если $x', x'' \in \mathcal{L}(D)$, причем $x' \in X_m$, а $x'' \in X_n$, то, предполагая $m \leq n$, будем иметь $x' + x'' \in X_n$ и, следовательно,

$$U^{(0)}(x' + x'') = U_n(x' + x'') = U_n(x') + U_n(x'') = U^{(0)}(x') + U^{(0)}(x'').$$

Кроме того,

$$\|U^{(0)}(x)\| = \|U_n(x)\| \leq \|U_n\| \|x\| = \|U_0\| \|x\|.$$

Таким образом, $U^{(0)}$ — линейная операция и $\|U^{(0)}\| \leq \|U_0\|$. Наконец, очевидно $U^{(0)} \supset U_0$ и потому, учитывая предыдущее неравенство, имеем $\|U^{(0)}\| = \|U_0\|$.

Применяя к операции $U^{(0)}$ теорему 2 о распространении по непрерывности, приходим к требуемой операции U . Действительно, областью определения $\mathcal{Q}_U$ операции U является замыкание $\overline{\mathcal{L}(D)}$ множества $\mathcal{L}(D)$, т. е. так как D плотно в X , $\mathcal{Q}_U = X$. Далее, $U \supset U^{(0)} \supset U_0$, при этом $\|U\| = \|U^{(0)}\| = \|U_0\|$.

Этим завершается доказательство теоремы в случае сепарабельного пространства X .

Для доказательства теоремы в общем случае воспользуемся леммой Цорна (1.5.7). Обозначим через A совокупность всевозможных линейных операций, являющихся распространением (с сохранением нормы) операции U_0 . В A введем частичную упорядоченность. Именно, для $V', V'' \in A$ будем считать $V' \prec V''$, если $V' \subset V''$. Ясно, что при таком определении удовлетворены все требования, предъявляемые к частичной упорядоченности. Проверим соблюдение условия леммы Цорна. Пусть A_0 — упорядоченная (полностью) часть множества A . Положим

$$\tilde{X} = \bigcup_{V \in A_0} \mathcal{Q}_V.$$

Поскольку из двух множеств, образующих указанное объединение, одно обязательно содержится в другом, то $\tilde{X}$ — линейное множество. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \tilde{X}$. Существует $V' \in A_0$ такая, что $x \in \mathcal{Q}_{V'}$. Определим

$$\tilde{V}(x) = V'(x).$$

Это определение не зависит от выбора операции V' , так как если $x \in \mathcal{Q}_{V''}$, то ввиду того, что либо $V' \prec V''$, либо $V'' \prec V'$ будет $V'(x) = V''(x)$. Так же

легко установить, что $\tilde{V}$ — линейная операция, причем $\|\tilde{V}\| = \|U_0\|$. Далее, очевидно, $\tilde{V}$ является распространением любой операции $V \in A_0$ и, следовательно, распространением операции U_0 . Таким образом, $\tilde{V} \in A$ и $V < \tilde{V}$ ($V \in A_0$). Применяя лемму Цорна, мы найдем операцию U — максимальный элемент в A . Операция U искомая, так как если бы $\Omega_U \neq X$, то нашлось бы элементарное расширение множества Ω_U , более широкое, чем Ω_U , и по доказанному ранее на него можно было бы распространить операцию U с сохранением нормы. Обозначая полученное распространение через U_1 , мы имели бы $U_1 \in A$ и $U < U_1$, что невозможно, поскольку $U \neq U_1$.

Теорема полностью доказана.

1.4. Условие возможности распространения линейной операции, сформулированное в теореме 3, является и необходимым. Именно, справедлива

Теорема 4 (I.IV). Пусть вещественное пространство Y таково, что какое бы вещественное нормированное пространство X ни взять, линейная операция U_0 , отображающая подпространство $X_0 \subset X$ в Y , допускает линейное распространение U (с сохранением нормы) на все X . Тогда Y — пространство типа $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Допустим, что Y не является пространством типа $\mathfrak{M}$. Тогда найдется сцепленное семейство $\mathfrak{K}_0$ замкнутых сфер, пересечение которых пусто. Пусть y' — центр одной из сфер семейства $\mathfrak{K}_0$ и r' — радиус указанной сферы. Для произвольной точки $y \in Y$ построим сферу $\bar{K}_{r_y}(y)$, где

$$r_y = r' + \|y - y'\|.$$

Очевидно, $\bar{K}_{r_y}(y) \supset \bar{K}_{r'}(y')$, так что, присоединяя к семейству $\mathfrak{K}_0$ всевозможные сферы $\bar{K}_{r_y}(y)$ ($y \in Y$), мы получим сцепленное семейство $\mathfrak{K}$, причем по-прежнему пересечение всех сфер этого семейства пусто.

Снова рассмотрим произвольный элемент $y \in Y$ и выделим из $\mathfrak{K}$ все сферы с центром в y . Радиусы этих сфер образуют числовое множество $\{r_y^{(\xi)}\}$ ($\xi \in \Xi_y$). Положим

$$r_0(y) = \inf_{\xi \in \Xi_y} r_y^{(\xi)}. \quad (7)$$

Так как любые две сферы семейства $\mathfrak{K}$ пересекаются, то расстояние между центрами этих сфер не превосходит суммы их радиусов, т. е.

$$r_{y_1}^{(\xi_1)} + r_{y_2}^{(\xi_2)} \geq \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in Y; \quad \xi_1 \in \Xi_{y_1}, \quad \xi_2 \in \Xi_{y_2}).$$

Переходя в левой части к точным нижним границам, получим отсюда

$$r_0(y_1) + r_0(y_2) \geq \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in Y). \quad (8)$$

Отметим еще одно свойство функционала r_0 . Именно, каков бы ни был элемент $y_0 \in Y$, неравенство

$$\|y - y_0\| \leq r_0(y) \quad (9)$$

не может выполняться для любого элемента $y \in Y$.

Действительно, в противном случае точка y_0 входила бы во все сферы семейства $\mathfrak{K}$, чего на самом деле быть не может.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность функционалов r , заданных на Y и удовлетворяющих условиям: $r(y) \leq r_0(y)$ для всех $y \in Y$ и

$$r(y_1) + r(y_2) \geq \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in Y). \quad (10)$$

В множестве $\mathfrak{R}$ введем частичную упорядоченность, полагая $r_1 < r_2$, если $r_1(y) \leq r_2(y)$ для всех $y \in Y$. Докажем, что $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна (1.5.7). Рассмотрим полностью упорядоченное множество $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}$ и определим

$$r'(y) = \inf_{r \in \mathfrak{R}_0} r(y).$$

По $\varepsilon > 0$ найдем $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}_0$ так, чтобы $r'(y_i) \geq r_i(y_i) - \varepsilon$ ($i = 1, 2$), где y_1, y_2 — фиксированные элементы из Y . Можно считать, что $r_1 < r_2$. При этом предположении

$$r'(y_1) + r'(y_2) \geq r_1(y_1) + r_2(y_2) - 2\varepsilon \geq r_1(y_1) + r_1(y_2) - 2\varepsilon \geq \|y_1 - y_2\| - 2\varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем отсюда, что функционал r' удовлетворяет условию (10), а так как очевидно $r' < r_0$, то $r' \in \mathfrak{R}$. На основании леммы Цорна в множестве $\mathfrak{R}$ имеются минимальные элементы. Обозначим один из них через ρ . Функционал ρ обладает свойствами:

$$\rho(y_1) + \rho(y_2) \geq \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in Y), \quad (11)$$

$$\rho(y) > 0 \quad (y \in Y), \quad (12)$$

$$|\rho(y_1) - \rho(y_2)| \leq \|y_1 - y_2\| \quad (y_1, y_2 \in Y), \quad (13)$$

$$\rho(\lambda y_1 + \mu y_2) \leq \lambda \rho(y_1) + \mu \rho(y_2) \quad (\lambda + \mu = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0; y_1, y_2 \in Y). \quad (14)$$

Действительно, $\rho \in \mathfrak{R}$, т. е. для ρ соблюдено условие (10), или, что то же самое, условие (11). Если, далее, допустить, что $\rho(y_0) \leq 0$ для некоторого $y_0 \in Y$, то согласно (11) для произвольного $y \in Y$ можно написать $\|y - y_0\| \leq \rho(y) + \rho(y_0) \leq \rho(y)$. Так как $\rho(y) \leq r_0(y)$, то тем более $\|y - y_0\| \leq r_0(y)$, что, как отмечалось, невозможно. Этим установлена справедливость соотношения (12).

Приступим к доказательству (13) и (14). Положим, фиксируя $y \in Y$,

$$h(y) = \max [0; \sup_{y' \in Y} (\|y - y'\| - \rho(y'))]. \quad (15)$$

Так как по (11) $\rho(y) \geq \|y - y'\| - \rho(y')$, то $h(y) \leq \max [0; \rho(y)] = \rho(y)$. С другой стороны, определив на Y функционал φ :

$$\varphi(y) = h(y), \quad \varphi(z) = \rho(z) \quad (z \neq y, z \in Y),$$

мы видим, что ($z \neq y$)

$$\varphi(y) + \varphi(z) = h(y) + \rho(z) \geq \|y - z\| - \rho(z) + \rho(z) = \|y - z\|.$$

Отсюда ясно, что функционал φ удовлетворяет условию (10), а так как $\varphi(z) \leq \rho(z) \leq r_0(z)$ для всех $z \in Y$, то $\varphi \in \mathfrak{R}$, и вследствие минимальности функционала ρ должно быть $\varphi = \rho$. В частности, $h(y) = \varphi(y) = \rho(y)$. Таким образом, на основании (12) $h(y) > 0$ и в силу (15)

$$\rho(y) = \sup_{y' \in Y} (\|y - y'\| - \rho(y')). \quad (16)$$

Если $y_1, y_2 \in Y$ — произвольные элементы, то

$$\rho(y_1) + \rho(y') \geq \|y_1 - y'\| \geq \|y_2 - y'\| - \|y_1 - y_2\|$$

и, следовательно,

$$\rho(y_1) + \|y_1 - y_2\| \geq \|y_2 - y'\| - \rho(y')$$

при любом $y' \in Y$. Но тогда

$$\rho(y_1) + \|y_1 - y_2\| \geq \sup_{y' \in Y} (\|y_2 - y'\| - \rho(y')) = \rho(y_2).$$

Отсюда находим

$$\rho(y_2) - \rho(y_1) \leq \|y_1 - y_2\|.$$

А поменяв местами y_1 и y_2 , получим

$$\rho(y_1) - \rho(y_2) \leq \|y_1 - y_2\|,$$

что вместе с предыдущим неравенством эквивалентно (13).

Обозначим теперь $z = \lambda y_1 + \mu y_2$ ($\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$). Имеем, используя (11)

$$\begin{aligned} \|y' - z\| &= \|\lambda(y' - y_1) + \mu(y' - y_2)\| \leq \lambda\|y' - y_1\| + \mu\|y' - y_2\| \leq \\ &\leq \rho(y') + \lambda\rho(y_1) + \mu\rho(y_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|z - y'\| - \rho(y') \leq \lambda\rho(y_1) + \mu\rho(y_2).$$

Переходя в левой части к точной верхней границе по всем $y' \in Y$, получим на основании (16)

$$\rho(z) \leq \lambda\rho(y_1) + \mu\rho(y_2),$$

а это и есть (14).

Рассмотрим теперь множество X , элементами которого являются всевозможные пары (α, y) , где α — вещественное число, а $y \in Y$. Линеаризуем множество X , полагая

$$\begin{aligned} (\alpha_1, y_1) + (\alpha_2, y_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2, y_1 + y_2). \\ \lambda(\alpha, y) &= (\lambda\alpha, \lambda y). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при таком определении алгебраических операций X становится линейным множеством. При этом роль нулевого элемента будет играть пара $(0, 0)$.

Действия в X над элементами вида $(0, y)$ идентичны действиям над соответствующими элементами y в пространстве Y , что позволяет отождествить множество X_0 таких элементов с Y , т. е. считать, что $Y \subset X$. Положив $x_0 = (1, 0)$, мы можем любой элемент $x = (\alpha, y) \in X$ представить в форме

$$x = \alpha x_0 + y. \quad (17)$$

Докажем, что X будет нормированным пространством, если для $x = (\alpha, y)$ определить норму равенством

$$\|x\| = \begin{cases} \|y\| & \alpha = 0, \\ |\alpha| \rho\left(-\frac{y}{\alpha}\right) & \alpha \neq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Проверим выполнение аксиом нормированного пространства. Аксиома 1 является следствием (12). Однородность нормы (аксиома 2) также легко проверяется на основе определения (18). Остается доказать неравенство треугольника.

Взяв $x_1 = (\alpha_1, y_1)$ и $x_2 = (\alpha_2, y_2)$, разберем несколько случаев:

I. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда $x_1, x_2 \in Y$, и неравенство треугольника выполнено, поскольку оно имеет место в Y .

II. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$. Согласно (13) имеем

$$\rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_2}\right) - \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right) \leq \left\| -\frac{y_1 + y_2}{\alpha_2} + \frac{y_2}{\alpha_2} \right\| = \frac{1}{|\alpha_2|} \|y_1\|.$$

Отсюда

$$|\alpha_2| \rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_2}\right) \leq \|y_1\| + |\alpha_2| \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right).$$

В силу (18) это означает $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.

III. $\alpha_1 \alpha_2 > 0$. Положим для определенности $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Тогда, вследствие (14), можно написать

$$\rho\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right)\right) \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right),$$

откуда

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \leq \alpha_1 \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + \alpha_2 \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right),$$

т. е. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.

IV. $\alpha_1 \alpha_2 < 0, \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Будем считать для определенности $|\alpha_1| > |\alpha_2| > 0$. В этом случае в соответствии с (13) можно написать

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \left[\rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) - \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) \right] \leq |\alpha_1 + \alpha_2| \left\| \frac{\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} \right\| = \left\| \frac{\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1}{\alpha_1} \right\|. \quad (19)$$

С другой стороны, из (11) вытекает

$$|\alpha_2| \left[\rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right) \right] \geq \left\| \frac{\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1}{\alpha_1} \right\|.$$

Сопоставляя это с (19), находим

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \left[\rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) - \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) \right] \leq |\alpha_2| \left[\rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right) \right],$$

а отсюда получаем

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \rho\left(-\frac{y_1 + y_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \leq |\alpha_1| \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha_1}\right) + |\alpha_2| \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha_2}\right),$$

что опять приводит нас к неравенству треугольника: $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.

V. $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$. Считая $\alpha_1 = \alpha > 0$, можно написать на основании (11)

$$\alpha \left[\rho\left(-\frac{y_1}{\alpha}\right) + \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha}\right) \right] \geq \alpha \left\| \frac{y_1 + y_2}{\alpha} \right\| = \|y_1 + y_2\|,$$

но

$$\|x_1 + x_2\| = \|y_1 + y_2\|; \quad \|x_1\| = \alpha \rho\left(-\frac{y_1}{\alpha}\right); \quad \|x_2\| = -\alpha \rho\left(-\frac{y_2}{\alpha}\right).$$

Таким образом, и в этом случае неравенство треугольника доказано.

Рассмотрим теперь операцию U_0 , переводящую $X_0 = Y \subset X$ в пространство Y и определенную следующим образом:

$$U_0(x) = y \quad (x = (0, y)).$$

Очевидно, $\|U_0\| = 1$.

Допустим, что существует такое распространение $U \supset U_0$, заданное на всем X , что $\|U\| = \|U_0\| = 1$. Обозначим $y_0 = U(x_0)$. Каков бы ни был $x \in X$, элемент $U(x) \in Y$, поэтому $U(U(x)) = U(x)$ и, следовательно,

$$\|U(x) - y_0\| = \|U(U(x) - x_0)\| \leq \|U(x) - x_0\|. \quad (20)$$

Когда x пробегает пространство X , элемент $U(x)$ пробегает все пространство Y . А тогда (20) можно записать в форме

$$\|y - y_0\| \leq \|y - x_0\| \quad (y \in Y).$$

Но, согласно (17) и (18),

$$\|y - x_0\| = \|x_0 - y\| = \|(1, -y)\| = 1 \cdot \rho\left(-\frac{y}{-1}\right) = \rho(y).$$

Следовательно,

$$\|y - y_0\| \leq \rho(y).$$

Это неравенство должно выполняться для каждого $y \in Y$, тем более должно выполняться для каждого $y \in Y$ неравенство (9), так как $\rho(y) \leq r_0(y)$, а это, как было указано, невозможно.

Итак, предположение о возможности распространения операции U_0 с сохранением нормы привело к противоречию.

Теорема полностью доказана.

К задаче о распространении линейной операции можно подойти и с несколько иной точки зрения. Пусть X — данное нормированное пространство, X_0 — произвольное его подпространство и Y — произвольное B -пространство. Пусть U_0 — линейная операция, отображающая X_0 в Y . Для того, чтобы существовала линейная операция $U \supset U_0$, $\|U\| = \|U_0\|$, отображающая X в Y , необходимо и достаточно, чтобы X было унитарным пространством (см. II.7.1). Этот результат установлен в [44a].

§ 2. Теоремы о распространении функционалов и их применение

2.1. Поскольку функционал есть частный случай операции, то к нему применимы теоремы предыдущего параграфа. Требуемая в теореме 2 (1. IV) полнота пространства Y при рассмотрении функционала всегда имеет место, так как в этом случае роль Y играет пространство чисел. Далее, в IV.1.3. было показано, что числовая прямая есть пространство типа $\mathfrak{M}$. Таким образом, к вещественным функционалам применима теорема 3 (1. IV), т. е. имеет место следующая важная теорема о распространении линейного функционала.

Теорема 1 (2. IV). (Хан — Банах). Пусть X — вещественное нормированное пространство и f_0 — линейный функционал, заданный на $X_0 \subset X$. Тогда существует линейный функционал f , заданный на всем X и такой, что $f(x) = f_0(x)$ ($x \in X_0$) и $\|f\| = \|f_0\|$.

2.2. Теорема 1 имеет ряд важных следствий. Однако прежде, чем формулировать соответствующие результаты, условимся в дальнейшем изложении понимать под X нормированное пространство, а в случае, когда речь идет о функционале или вообще об операции, считать их линейными и заданными на всем X . Только отступления от этого соглашения будут оговариваться.

Важнейшим следствием теоремы о распространении функционала является приводимая ниже теорема о достаточном числе функционалов, в которой устанавливается существование функционала, значение которого на любом наперед заданном элементе отлично от нуля.

Теорема 2 (2.IV). *Каков бы ни был отличный от нулевого элемент $x_0 \in X$, существует такой функционал f , что*

$$\|f\| = 1; f(x_0) = \|x_0\|.$$

т. е. на элементе x_0 реализуется знак равенства в нормативном неравенстве для функционала f : $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$.

Доказательство. Обозначим через X_0 множество всех элементов из X вида λx_0 . Ясно, что X_0 — подпространство X . Определим на X_0 функционал f_0 :

$$f_0(x) = \lambda \|x_0\| \quad (x = \lambda x_0 \in X_0).$$

Очевидно, f_0 — линейный функционал. При этом

$$|f_0(x)| = \lambda \|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|x\|, \text{ так что } \|f_0\| = 1.$$

Распространяя по теореме 1 f_0 на все X , получим требуемый функционал.

Замечание. Иногда теорему о достаточном числе функционалов удобнее формулировать иначе. Именно, в условиях теоремы существует такой функционал $\tilde{f}$, что

$$\|\tilde{f}\| = \frac{1}{\|x_0\|}; \quad \tilde{f}(x_0) = 1.$$

В самом деле, достаточно взять

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|x_0\|} f(x),$$

где f — функционал, построенный выше.

Выясним геометрический смысл теоремы о достаточном числе функционалов.

Плоскостью (или **гиперплоскостью**) в пространстве X будем называть множество L точек, удовлетворяющих условию: $f(x) = c$, где f — произвольный фиксированный функционал, а c — вещественная постоянная. Если для всех точек некоторого множества E имеем $f(x) \leq c$ (или $f(x) \geq c$), то будем говорить, что E лежит по одну сторону от плоскости L . Плоскость L называется **опорной** к множеству E в точке $x_0 \in E$, если E лежит по одну сторону от L и $x_0 \in L$.

Из теоремы о достаточном числе функционалов следует, что, какова бы ни была замкнутая сфера K ($\|x\| \leq r$) и точка x_0 на поверхности ее ($\|x_0\| = r$), существует опорная плоскость к K в точке x_0 — она определяется уравнением $f(x) = r$, где f — построенный в теореме функционал. Действительно, для $x \in K$ будет $f(x) \leq \|f\| \|x\| \leq r$ и, кроме того, $f(x_0) = \|x_0\| = r$.

Обратно, из приведенного геометрического факта может быть выведена теорема о достаточном числе функционалов.

Укажем на некоторые следствия теоремы о достаточном числе функционалов.

Следствие 1. Если $f(x) = 0$, каков бы ни был функционал f , то $x = 0$.

Следствие 2. Если равенство

$$f(x_1) = f(x_2)$$

имеет место для любого функционала f , то $x_1 = x_2$.

Следствие 3. Если для каждого функционала f с $\|f\| = 1$ выполнено неравенство

$$|f(x_0)| \leq C,$$

причем C не зависит от f , то $\|x_0\| \leq C$.

В самом деле, если бы $\|x_0\| > C$, то нашелся бы функционал f с нормой, равной единице, такой, что $f(x_0) = \|x_0\| > C$.

2.3. Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3 (2.IV). Пусть $\mathfrak{Q}$ — линейное множество, содержащееся в X и $x_0 \in X$ — элемент, расстояние которого от $\mathfrak{Q}$ равно $d > 0$ ($\rho(x_0, \mathfrak{Q}) = d$). Тогда существует такой функционал f , что

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathfrak{Q}); \quad \|f\| = 1, \quad f(x_0) = d.$$

Доказательство. Обозначим через X_0 элементарное расширение множества $\mathfrak{Q}$, полученное присоединением к $\mathfrak{Q}$ элемента x_0 . Так как $x_0 \notin \mathfrak{Q}$, то представление $x \in X_0$ в форме

$$x = \lambda x_0 + x' \quad (x' \in \mathfrak{Q})$$

единственно. Положим для $x \in X_0$

$$f_0(x) = \lambda d.$$

Ясно, что f_0 — аддитивный функционал. При этом $f_0(x_0) = d$ и $f_0(x) = 0$ для $x \in \mathfrak{Q}$. Далее,

$$\|x\| = \|\lambda x_0 + x'\| = |\lambda| \left\| x_0 + \frac{x'}{\lambda} \right\| \geq |\lambda| \rho(x_0, \mathfrak{Q}) = |\lambda| d = |f_0(x)|.$$

Поэтому функционал f_0 ограниченный, и $\|f_0\| \leq 1$. Чтобы получить противоположное неравенство, подберем $x' \in \mathfrak{Q}$ так, что $\|x_0 - x'\| < d + \varepsilon$. Тогда

$$d = f_0(x_0) = f_0(x_0 - x') \leq \|f_0\| \|x_0 - x'\| < \|f_0\| (d + \varepsilon),$$

откуда

$$\|f_0\| > \frac{d}{d + \varepsilon},$$

и ввиду произвольности ε будет $\|f_0\| = 1$.

Применяя к f_0 теорему о распространении функционала, мы и получим функционал f с требуемыми свойствами.

Замечание 1. И здесь, как и в теореме 2, иногда удобнее использовать другую формулировку, которая получается, если вместо f рассмотреть функционал $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{d} f(x).$$

Функционал $\tilde{f}$ обладает свойствами:

$$\tilde{f}(x) = 0 \quad (x \in \mathfrak{Q}); \quad \|\tilde{f}\| = \frac{1}{d}; \quad \tilde{f}(x_0) = 1.$$

Замечание 2. Как уже отмечалось, теорема о достаточном числе функционалов является частным случаем теоремы 3. Именно, если $\mathfrak{Q} = \{0\}$, то $\rho(x_0, \mathfrak{Q}) = \|x_0\|$.

2.4. Укажем на некоторые факты, вытекающие из доказанной теоремы.

Теорема 4 (2.IV). Пусть $E \subset X$ — произвольное множество. Для того, чтобы элемент $x_0 \in X$ принадлежал линейному замыканию множества E , необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$f(x_0) = 0 \quad (1)$$

выполнялось для каждого функционала, обращающегося в нуль на множестве E .

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_0 \in \overline{\mathcal{L}(E)}$. Это означает, что x_0 можно представить в форме предела последовательности линейных комбинаций элементов из E : $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)}$ ($x_k^{(n)} \in E$). Если f — функционал, обращающийся в нуль на множестве E , то по аддитивности и однородности его $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = 0$ и, следовательно, в силу непрерывности f : $f(x_0) = 0$.

Достаточность. Если бы оказалось $x_0 \notin \overline{\mathcal{L}(E)}$, то по теореме 3 нашелся бы функционал f такой, что на $\overline{\mathcal{L}(E)}$ было бы $f(x) = 0$ и в то же время $f(x_0) = d = \rho(x_0, \overline{\mathcal{L}(E)}) > 0$, что противоречит условию теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что множество E полно (т. е. $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$) тогда и только тогда, когда всякий функционал, обращающийся на нем в нуль, равен нулю тождественно.

Множество, обладающее последним свойством, называется *фундаментальным*. Выведенное предложение утверждает, таким образом, что полнота и фундаментальность множества E означают одно и то же.

2.5. Дадим еще одно применение теоремы 3. Будем говорить, что система элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) допускает биортогонализацию, если существует такая система функционалов $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), что

$$f_{\alpha'}(x_\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha' \neq \alpha, \\ 1 & \alpha' = \alpha. \end{cases}$$

Теорема 5 (2. IV). Для того, чтобы система $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) допускала биортогонализацию, необходимо и достаточно, чтобы она была минимальной, т. е. чтобы ни один из элементов x_α не принадлежал линейному замыканию совокупности остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_\alpha\}$ — система, допускающая биортогонализацию. Если при некотором α_0 оказалось бы

$$x_{\alpha_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_{\alpha_k} \quad (\alpha_k \neq \alpha_0),$$

то

$$f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} f_{\alpha_0}(x_{\alpha_k}) = 0.$$

Тогда как в действительности $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = 1$.

Достаточность. Пусть теперь $\{x_\alpha\}$ — минимальная система. Обозначим через $X_{\alpha'}$ линейное замыкание совокупности элементов $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \neq \alpha'$). Так как $x_{\alpha'} \notin X_{\alpha'}$, а $X_{\alpha'}$ — замкнутое линейное множество, то по теореме 3 (точнее, по замечанию к ней) найдется функционал $f_{\alpha'}$, обращающийся в нуль на $X_{\alpha'}$ (т. е. $f_{\alpha'}(x_\alpha) = 0$ при $\alpha \neq \alpha'$) и такой, что $f_{\alpha'}(x_{\alpha'}) = 1$. Семейство функционалов $\{f_{\alpha'}\}$ удовлетворяет требованиям определения, т. е. система $\{x_\alpha\}$ допускает биортогонализацию.

Замечание. Всякая конечная система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимых элементов минимальна. Действительно, $x_j \notin \mathcal{L}(\{x_k\})$ ($k \neq j$) в силу линейной независимости, а по замкнутости конечномерного линейного множества x_j не принадлежит и его замыканию.

Из этого замечания следует, что для всякой конечной системы линейно независимых элементов существует система функционалов, биортогональная к ней.

Теорема о распространении линейного функционала доказана Ханом [113]. По существу имеется у Банаха в [96]. Следствия из теоремы о распространении линейного функционала указаны в монографии Банаха I. Теорема о биортогонализации — для случая пространства L^2 — в [70].

2.6. Теорема 1 (о распространении функционала) не переносится автоматически на случай, когда рассматриваемое пространство комплексное. Действительно, как было показано в IV. 1.3, пространство комплексных чисел не удовлетворяет условию теоремы 3 (1. IV) (не является пространством типа $\mathfrak{M}$). Вследствие этого для функционалов с комплексными значениями теорема, аналогичная теореме Хана — Банаха, не верна, если говорить о вещественном пространстве X . Однако, рассматривая такие функционалы, мы обычно и пространство, в котором они определены, считаем комплексным. При этом условии теорема может быть полностью сохранена.

Теорема 6 (2. IV). * Пусть Z — комплексное нормированное пространство, и f_0 — комплексно-значный линейный функционал, заданный на $Z_0 \subset Z$. Существует линейный функционал $f \supset f_0$, заданный на всем Z и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что всякое комплексное линейное множество можно рассматривать и как вещественное. Действительно, раз для элементов этого множества определено умножение на комплексные числа, то тем самым определено и умножение на вещественные числа. Ясно, что аксиомы линейного множества при этом будут выполнены. Точно так же комплексное нормированное пространство можно рассматривать и как вещественное.

После этого замечания рассмотрим функционал φ_0 , заданный на Z_0 следующим образом:

$$\varphi_0(z) = \operatorname{Re} f_0(z) \quad (z \in Z_0).$$

Легко проверить, что φ_0 будет линейным (вещественным) функционалом. Действительно, если $z_1, z_2 \in Z_0$, то

$$\begin{aligned} \varphi_0(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re} f_0(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} [f_0(z_1) + f_0(z_2)] = \\ &= \operatorname{Re} f_0(z_1) + \operatorname{Re} f_0(z_2) = \varphi_0(z_1) + \varphi_0(z_2). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$|\varphi_0(z)| = |\operatorname{Re} f_0(z)| \leq |f_0(z)| \leq \|f_0\| \|z\|.$$

Из этого соотношения попутно получаем

$$\|\varphi_0\| \leq \|f_0\|. \quad (2)$$

Если Z_0 рассматривать как вещественное линейное множество в вещественном же нормированном пространстве Z , то по теореме Хана — Банаха функционал φ_0 допускает распространение с сохранением нормы на все пространство Z . Обозначим это распространение через φ и положим для $z \in Z$

$$f(z) = \varphi(z) - i\varphi(iz). \quad (3)$$

Докажем, что функционал f — требуемый.

В самом деле, f , очевидно, аддитивный функционал, **) а так как

$$|f(z)| \leq |\varphi(z)| + |\varphi(iz)| \leq \|\varphi\| [\|z\| + \|iz\|] \leq 2\|\varphi_0\| \|z\|,$$

то f — линейный.

Дадим более точную оценку для нормы f . Пусть $z_0 \in Z$ — такой элемент, что $\|z_0\| = 1$ и

$$\|f\| \leq |f(z_0)| + \varepsilon. \quad (4)$$

*) См. [103] и [14].

**) В смысле замечания из III.1.1.

Предполагая $\|f\| \neq 0$, мы можем считать, что $f(z_0) \neq 0$. Обозначим тогда $\theta = \operatorname{sgn} f(z_0)$ и $z_1 = \bar{\theta} z_0$. Очевидно $\|z_1\| = 1$ и

$$f(z_1) = f(\bar{\theta} z_0) = \bar{\theta} f(z_0) = \frac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|} \cdot f(z_0) = |f(z_0)| \quad (5)$$

вещественно.

Так как, очевидно,

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} f(z),$$

то $\varphi(z_1) = f(z_1)$. Но $\varphi(z_1) \leq \| \varphi \| \| z_1 \| = \| \varphi \|$. Сопоставляя это с (4) и (5), получим $\|f\| \leq \| \varphi \| + \varepsilon$. Учитывая произвольность ε и принимая во внимание (2), находим окончательно

$$\|f\| = \| \varphi \|.$$

Для того чтобы завершить доказательство, достаточно установить, что $f \supset f_0$. С этой целью покажем, что f_0 выражается через φ_0 таким же образом, как f через φ .

Действительно, если $f_0(z) = \sigma + \tau i$, то $f_0(iz) = if_0(z) = -\tau + \sigma i$, так что $-\tau = \operatorname{Re} f_0(iz) = \varphi_0(iz)$. Таким образом, поскольку $\sigma = \operatorname{Re} f_0(z) = \varphi_0(z)$,

$$f_0(z) = \varphi_0(z) - i\varphi_0(iz).$$

З а м е ч а н и е. Благодаря этой теореме все изложенное выше для вещественных пространств переносится и на комплексные пространства.

В частности, применяя теорему 5 (о биортогонализации) к гильбертову пространству и учитывая общую форму линейного функционала в гильбертовом пространстве (см. III. 3.2), мы приходим к следующему результату.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов гильбертова пространства H . Для того чтобы в H существовала последовательность $\{y_n\}$, биортогональная к данной, т. е. такая, что

$$(x_m, y_n) = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n, \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была минимальной.

2.7. Здесь мы докажем аналог теоремы Хана — Банаха для случая произвольных линейных множеств (см. Б а н а х-1).

Функционал p (вообще говоря, неаддитивный), заданный на линейном множестве X , называется *полуаддитивным*, если для любой пары элементов $x_1, x_2 \in X$

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2).$$

Функционал p называется *положительно-однородным*, если для $\lambda \geq 0$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

Справедлива

Теорема 7(2. IV). Пусть в вещественном линейном множестве X задан полуаддитивный положительно-однородный функционал p , и пусть f_0 — аддитивный и однородный функционал, заданный на линейном множестве $X_0 \subset X$ и удовлетворяющий там условию

$$f_0(x) \leq p(x). \quad (6)$$

Тогда существует аддитивный и однородный функционал f , определенный на всем X , совпадающий с f_0 на X_0 и удовлетворяющий на X условию:

$$f(x) \leq p(x). \quad (7)$$

Доказательство. Очевидно, достаточно уметь распространить функционал, заданный на некотором линейном множестве $\tilde{X} \subset X$ на элементарное расширение X' этого множества, чтобы, применяя лемму Цорна, получить распространение на все X . Поэтому можно считать, что X есть элементарное расширение множества X_0 , т. е. считать, что каждый элемент $x \in X$ может быть представлен в форме

$$x = \lambda x_0 + x' \quad (x' \in X_0). \quad (8)$$

Если $x', x'' \in X_0$, то с помощью (6) находим

$$f_0(x') + f_0(x'') = f_0(x' + x'') \leq p(x_0 + x') + (-x_0 + x'') \leq p(x_0 + x') + p(-x_0 + x''),$$

откуда

$$f_0(x'') - p(-x_0 + x'') \leq -f(x') + p(x_0 + x'),$$

и, следовательно, поскольку x' и x'' здесь произвольны,

$$A = \sup_{x'' \in X_0} [f_0(x'') - p(-x_0 + x'')] \leq \inf_{x' \in X_0} [-f_0(x') + p(x_0 + x')] = B.$$

Пусть $A \leq t_0 \leq B$. Определим на X функционал f формулой

$$f(x) = \lambda t_0 + f_0(x') \quad (x = \lambda x_0 + x', \quad x' \in X_0).$$

Ясно, что f — аддитивный и однородный функционал, причем $f \supset f_0$. Покажем, что имеет место (7). Будем считать, что в представлении (8) $\lambda \neq 0$. Допустим $\lambda > 0$. Тогда

$$f(x) = \lambda t_0 + f_0(x') \leq \lambda B + f_0(x') \leq \lambda \left[-f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right) + p\left(x_0 + \frac{x'}{\lambda}\right) \right] + f_0(x') = -f_0(x') + p(\lambda x_0 + x') + f_0(x') = p(x).$$

Точно также (с использованием неравенства $t_0 \geq A$) исчерпывается случай $\lambda < 0$.

Теорема доказана.

Следствие. Если функционал p удовлетворяет условиям теоремы, то существует аддитивный и однородный функционал f , заданный на X и такой, что

$$f(x) \leq p(x). \quad (9)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно на множестве $X_0 = \{0\}$ рассмотреть функционал f_0 ($f_0(0) = 0$) и затем применить к нему теорему.

Отметим, что f удовлетворяет соотношению

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x). \quad (10)$$

Действительно, из (9):

$$f(x) = -f(-x) \geq -p(-x).$$

З а м е ч а н и е. Теорема Хана — Банаха может быть получена из доказанной выше. В самом деле, если X — нормированное пространство, а функционал f_0 — линейный, то, взяв $p(x) = \|f_0\| \|x\|$ (очевидно, p обладает требуемыми свойствами), получим с помощью теоремы 7 аддитивный и однородный функционал f . Из неравенства (10), которое в данном случае приобретает вид:

$$-\|f_0\| \|x\| \leq f(x) \leq \|f_0\| \|x\|,$$

вытекает, что f — линейный, и $\|f\| \leq \|f_0\|$. Из этого, как обычно, заключаем о равенстве $\|f\| = \|f_0\|$.

2.8. Теорема 7 находит себе изящное применение в теории интеграла и теории меры. *)

Поставим следующую задачу: связать с каждой ограниченной периодической (периода 1) функцией $x(t)$ «интеграл» по промежутку $[0, 1]$ —

число $\int_0^1 x(t) dt$ так, чтобы были выполнены условия:

$$1) \int_0^1 [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dt = \alpha \int_0^1 x_1(t) dt + \beta \int_0^1 x_2(t) dt \quad (\alpha, \beta — \text{числовые коэффициенты});$$

$$2) \text{ если } x(t) \geq 0 \text{ в } [0, 1], \text{ то } \int_0^1 x(t) dt \geq 0;$$

$$3) \int_0^1 x(t + t_0) dt = \int_0^1 x(t) dt \quad (t_0 — \text{любое вещественное});$$

$$4) \int_0^1 x(1-t) dt = \int_0^1 x(t) dt;$$

$$5) \text{ если } x_0(t) \equiv 1, \text{ то } \int_0^1 x_0(t) dt = 1.$$

Теорема 8 (2. IV). *Поставленная задача имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Обозначим через M множество всех ограниченных периодических (периода 1) функций. Ясно, что M — линейное множество.

Пусть $x \in M$, и $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольный набор вещественных чисел. Обозначим

$$\pi(x; a_1, a_2, \dots, a_n) = \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t + a_k)$$

и положим

$$p(x) = \inf \pi(x; a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным конечным наборам чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Докажем, что p удовлетворяет условиям теоремы 7. Очевидно, в доказательстве нуждается только полуаддитивность p .

*) См. Б а н а х-1. Без использования теоремы 7 в [96].

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — такие совокупности чисел, что $\pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) < p(x_1) + \varepsilon$ и $\pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) < p(x_2) + \varepsilon$.

Обозначим $\gamma_{j,k} = \alpha_j + \beta_k$. Тогда, с одной стороны,

$$p(x_1 + x_2) \leq \pi(x_1 + x_2; \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{m,n}). \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \pi(x_1 + x_2; \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{m,n}) = \\ &= \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} [x_1(t + \gamma_{j,k}) + x_2(t + \gamma_{j,k})] \leq \\ & \leq \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_1(t + \gamma_{j,k}) + \\ & + \frac{1}{mn} \sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j,k} x_2(t + \gamma_{j,k}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sup \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_1(t + \beta_k + \alpha_j) + \\ & + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_2(t + \alpha_j + \beta_k) = \pi(x_1; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) + \\ & + \pi(x_2; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) < p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Сопоставляя это с (11) и учитывая произвольность ε , получим

$$p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2).$$

Пусть f — функционал, существование которого утверждается в следствии из теоремы 7.

Если $x(t) \geq 0$, то $p(x) \geq 0$, $p(-x) \leq 0$, откуда на основании (10) $f(x) \geq 0$.

Далее, если положить $x'(t) = x(t + t_0) - x(t)$, то, взяв $a_k = (k-1)t_0$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$), получим

$$\begin{aligned} p(x') & \leq \pi(x'; a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sup_{-\infty < t < \infty} [x(t + \frac{n+1}{n+1}t_0) - x(t)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $p(x') \leq 0$, и точно так же $p(-x') \leq 0$. Отсюда, снова на основании (10), $f(x') = 0$.

Наконец, если $x_0(t) \equiv 1$, то, очевидно, $p(x_0) = 1$; $p(-x_0) = -1$. А тогда $f(x_0) = 1$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно положить

$$\int_0^1 x(t) dt = \frac{1}{2} [f(x) + f(\tilde{x})] \quad (\tilde{x}(t) = x(1-t)). \quad (12)$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно доказать, что построенный интеграл совпадает с интегралом Римана всякий раз, когда последний существует. По отношению к интегралу Лебега этого, вообще говоря, сказать нельзя. Однако, функционал f может быть выбран таким образом, что интеграл (12) для всякой измеримой функции совпадает с лебеговым.

С помощью обобщенного интеграла (12) можно построить обобщенную меру для множеств промежутка $E_0 = [0, 1]$. Именно, справедлива

Теорема 9 (2. IV). Каждому множеству $e \subset E_0 = [0, 1]$ может быть соотнесено число $\mu(e)$ — «мера» множества e — так, что будут выполнены условия:

1) $\mu(e_1 \cup e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$, если $e_1 \cap e_2 = \Lambda$;

2) $\mu(e) \geq 0$;

3) если e_1 конгруентно e_2 , то $\mu(e_1) = \mu(e_2)$;

4) $\mu(E_0) = 1$.

Доказательство. Пусть $x_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset E_0$. Если положить

$$\mu(e) = \int_0^1 x_e(t) dt,$$

то свойства 1) — 4) без труда получаются из свойств обобщенного интеграла.

З а м е ч а н и е. Обобщенная мера, удовлетворяющая условиям 1) — 4), может быть определена и для всех подмножеств квадрата $[0, 1; 0, 1]$.

Следует, однако, отметить, что эта задача для трехмерного куба уже не имеет решения. *)

2.9. Аналогично обобщенному интегралу может быть определен обобщенный предел — для любой ограниченной последовательности.

Рассмотрим пространство $\mathbf{m}$ ограниченных последовательностей. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbf{m}$. Обозначим

$$\pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_{n+n_j},$$

и

$$p(x) = \inf \pi(x; n_1, n_2, \dots, n_k),$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным совокупностям натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Как и в доказательстве теоремы 8, можно установить, что p полуаддитивный и положительно-однородный функционал. Следовательно, существует аддитивный и однородный функционал f , удовлетворяющий условию (10). Если положить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x),$$

то, рассуждая так же как и при доказательстве теоремы 8, можно установить следующие свойства найденного функционала:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha \xi'_n + \beta \xi''_n] = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \xi''_n;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq 0, \quad \text{если } \xi_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^{(0)} = 1, \quad \text{если } \xi_n^{(0)} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$5) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n.$$

Из последнего соотношения явствует, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, то должно быть $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Принимая, кроме того, во внимание остальные четыре свойства числа $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, естественно называть это число *обобщенным пределом* (Банаха) последовательности $\{\xi_n\}$.

* Доказательство см. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1950, стр. 277.

Г Л А В А V

ПРОСТРАНСТВА ОПЕРАЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛОВ

§ 1. Пространство операций и сопряженное пространство

1.1. Рассмотрим два нормированных пространства X и Y и совокупность всевозможных линейных операций, переводящих пространство X в Y . Эту совокупность мы будем обозначать символом $[X \rightarrow Y]$. В множестве $[X \rightarrow Y]$ определим алгебраические операции.

Пусть $U_1, U_2 \in [X \rightarrow Y]$. По определению $U = U_1 + U_2$ есть операция из X в Y :

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) \quad (x \in X).$$

Очевидно, U — аддитивная операция. Кроме того,

$$\|U(x)\| \leq \|U_1(x)\| + \|U_2(x)\| \leq (\|U_1\| + \|U_2\|)\|x\|.$$

Следовательно, $U \in [X \rightarrow Y]$ и

$$\|U\| \leq \|U_1\| + \|U_2\|.$$

Далее, $\tilde{U} = \lambda U$ (λ — числовой множитель, $U \in [X \rightarrow Y]$) означает:

$$\tilde{U}(x) = \lambda U(x) \quad (x \in X). \quad (1)$$

Без труда проверяем, что $\tilde{U} \in [X \rightarrow Y]$ и

$$\|\tilde{U}\| = \|\lambda U\| = |\lambda| \|U\|.$$

Предоставляем читателю проверить, что при таком определении алгебраических операций будут удовлетворены все аксиомы линейного множества. Отметим только, что роль нулевого элемента в $[X \rightarrow Y]$ будет играть операция $U_0 = 0$, тождественно равная нулю:

$$U_0(x) = 0 \quad (x \in X).$$

Ясно, что $\|U_0\| = 0$ и что $\|U\| = 0$ влечет $U = 0$.

Последнее обстоятельство вместе с предыдущим показывает, что множество $[X \rightarrow Y]$ является нормированным пространством. *)

*) При этом норма элемента $U \in [X \rightarrow Y]$ есть определенная в III.1.2. норма линейной операции U

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|.$$

Докажем, что если Y — пространство образов — полное, то будет полным и пространство $[X \rightarrow Y]$.

В самом деле, пусть $\{U_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства $[X \rightarrow Y]$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, будем иметь

$$\|U_m - U_n\| < \varepsilon \quad (m, n \geq N_\varepsilon),$$

т. е. для любого $x \in X$

$$\|U_m(x) - U_n(x)\| < \varepsilon \|x\|, \quad (2)$$

откуда следует, что последовательность $\{U_n(x)\}$ элементов пространства Y сходится в себе, и поэтому, в силу полноты пространства Y , существует

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \quad (x \in X).$$

Ясно, что операция U , таким образом определенная, аддитивна. Переходя к пределу при $m \rightarrow 0$ в неравенстве (2), получим

$$\|U(x) - U_n(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U_m(x) - U_n(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (n \geq N_\varepsilon), \quad (3)$$

т. е. операция V :

$$V(x) = U(x) - U_n(x) \quad (x \in X)$$

является элементом пространства $[X \rightarrow Y]$. Тогда и $U = V + U_n \in [X \rightarrow Y]$. При этом из (3) следует

$$\|U - U_n\| \leq \varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon),$$

что и означает, что $U_n \rightarrow U$ в пространстве $[X \rightarrow Y]$.

Изложенное выше приводит к следующей теореме.

Теорема 1 (1. V). Если в множестве $[X \rightarrow Y]$ всех линейных операций из нормированного пространства X в B -пространство Y ввести алгебраические операции и норму, как указано выше, то оно становится B -пространством.

1.2. Ввиду того, что пространство R вещественных (или комплексных) чисел — полное, множество всех линейных функционалов, заданных в пространстве X , является согласно теореме 1 B -пространством, это пространство обозначается X^* и называется сопряженным к X . В обозначениях предыдущего номера $X^* = [X \rightarrow R]$.

Замечание. Если рассматриваемое пространство X комплексное, то умножение на комплексные числа в X^* определяется формулой

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} \cdot f(x) \quad (f \in X^*, x \in X). \quad (4)$$

Формула (1) сохраняется для операций (не являющихся функционалами) и в комплексном случае.

Чтобы оправдать целесообразность такого определения, рассмотрим функционалы в гильбертовом пространстве H . Теорема об общей

форме линейного функционала в гильбертовом пространстве (III. 3.2.) дает основание для отождествления функционала $f \in \mathbf{H}^*$ с определяющим его элементом $y \in \mathbf{H}$

$$f(x) = (x, y) \quad (x \in \mathbf{H}). \quad (5)$$

При этом, если f_1 определяется элементом y_1 , а f_2 — элементом y_2 , то, очевидно, $f_1 + f_2$ определяется элементом $y_1 + y_2$. Благодаря тому, что λf определяется формулой (4), то же можно сказать про функционал λf и элемент λy . Действительно,

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x) = \overline{\lambda} (x, y) = (x, \lambda y). \quad (6)$$

Поскольку, кроме того, $\|f\| = \|y\|$, то сказанное дает право отождествить пространство $\mathbf{H}^*$ функционалов f с пространством $\mathbf{H}$ элементов y , — они линейно изометричны.

Возвратимся к общему случаю. Поскольку $\mathbf{X}^*$, в свою очередь, является нормированным пространством, имеет смысл говорить о пространстве $\mathbf{X}^{**} = (\mathbf{X}^*)^*$, сопряженном к $\mathbf{X}^*$, — это есть совокупность всех линейных функционалов в $\mathbf{X}^*$. Точно так же можно рассматривать пространство $\mathbf{X}^{***}$ и т. д.

Пусть x_0 — фиксированный элемент вещественного нормированного пространства $\mathbf{X}$. Рассмотрим выражение

$$X_{x_0}(f) = f(x_0) \quad (f \in \mathbf{X}^*). \quad (7)$$

Ясно, что

$$|X_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|x_0\| \|f\|. \quad (8)$$

Отсюда следует, что X_{x_0} есть линейный функционал в $\mathbf{X}^*$, т. е. элемент пространства $\mathbf{X}^{**}$. Обозначим через $\mathbf{X}_0^{**}$ совокупность всех функционалов в $\mathbf{X}^*$, имеющих вид (7), и докажем следующую важную теорему.

Теорема 2 (1. V). Пусть $\mathbf{X}$ — B -пространство. Тогда $\mathbf{X}_0^{**}$ является подпространством пространства $\mathbf{X}^{**}$. При этом

$$X_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = \lambda_1 X_{x_1} + \lambda_2 X_{x_2}; \quad \|X_x\| = \|x\| \quad (9)$$

и $X_x \in \mathbf{X}_0^{**}$ однозначно определяет элемент $x \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Мы докажем сначала соотношения (9). Первое доказывается без всякого труда. Действительно,

$$\begin{aligned} X_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(f) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \\ &= \lambda_1 X_{x_1}(f) + \lambda_2 X_{x_2}(f) = (\lambda_1 X_{x_1} + \lambda_2 X_{x_2})(f). \end{aligned}$$

Для установления второго заметим прежде всего, что из (8) следует $\|X_{x_0}\| \leq \|x_0\|$. С другой стороны, по теореме о достаточном числе функционалов (теорема 2 (2. IV)) существует функционал f_0 с $\|f_0\| = 1$ такой, что $f_0(x_0) = \|x_0\|$. А тогда $X_{x_0}(f_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|$, откуда $\|X_{x_0}\| \geq \|x_0\|$. Вместе с предыдущим это дает $\|X_{x_0}\| = \|x_0\|$.

Учитывая сказанное в II. 2.7, заключаем отсюда о том, что соответствие $x \longleftrightarrow X_x$ осуществляет линейную изометрию пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_0^{**}$.

Остается заметить теперь, что $\mathbf{X}_0^{**}$, будучи линейно изометрично полному пространству, само полно и, следовательно, замкнуто в $\mathbf{X}^{**}$, т. е. является его подпространством.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если $\mathbf{X}$ — комплексное пространство, то функционал X_{x_0} следует определить так:

$$X_{x_0}(f) = \overline{f(x_0)} \quad (f \in \mathbf{X}^*). *$$

Читатель без труда убедится, что заключения теоремы 2 справедливы и в этом случае.

1.3. Проиллюстрируем доказанный выше факт на примере конечномерных пространств. Пусть $\mathbf{X}$ — конечномерное пространство (размерности μ). Пусть $f \in \mathbf{X}^*$. Как было установлено в III. 2.8, функционал f можно отождествить с системой μ чисел: $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu)$. При этом ясно, что

$$\begin{aligned} \lambda f &= (\lambda \varphi_1, \lambda \varphi_2, \dots, \lambda \varphi_\mu), ** \\ f_1 + f_2 &= (\varphi'_1 + \varphi''_1, \varphi'_2 + \varphi''_2, \dots, \varphi'_\mu + \varphi''_\mu), \\ (f_1 = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_\mu), f_2 = (\varphi''_1, \varphi''_2, \dots, \varphi''_\mu)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{X}^*$ также является конечномерным пространством той же размерности, что и $\mathbf{X}$.

Возьмем функционал $X \in \mathbf{X}^{**}$. В соответствии со сказанным он определяется некоторой совокупностью чисел $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu)$ так, что

$$X(f) = \sum_{k=1}^{\mu} \xi_k \varphi_k \quad (f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu) \in \mathbf{X}^*).$$

Отсюда

$$X = X_{x_0},$$

где $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu)$. Итак, в рассмотренном случае $\mathbf{X}^{**} = \mathbf{X}_0^{**}$. Так, взяв $\mathbf{X} = \mathbf{m}_\mu$ согласно формуле (18) из III. 2.8, будем иметь $\mathbf{X}^* = \mathbf{l}_\mu$ и, следовательно, по формуле (19) отсюда же — $\mathbf{X}^{**} = \mathbf{m}_\mu$.

Как мы увидим дальше, тот факт, что пространство $\mathbf{X}^{**}$ исчерпывается функционалами X_x ($x \in \mathbf{X}$), имеет место далеко не всегда.

*) Если сохранить формулу (7), то функционал X_{x_0} не будет однороден.

**) Эта формула сохраняется и в случае, когда $\mathbf{X}$ — комплексное пространство. Действительно (см. замечание в III. 2.8),

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda f(x)} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{\mu} \overline{\varphi_k} \xi_k = \sum_{k=1}^{\mu} \overline{(\lambda \varphi_k)} \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in \mathbf{X}).$$

Пространство X , для которого $X^{**} = X_0^{**}$, называется *рефлексивным* (или *регулярным*).

Рефлексивное пространство линейно изометрично, таким образом, своему второму сопряженному. Поскольку соответствие, осуществляющее изометрию, имеет в данном случае специальный вид (элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $X_x \in X^{**}$), наличия линейной изометрии между пространствами X и X^{**} недостаточно, чтобы заключить о рефлексивности пространства X . И в действительности существуют пространства, линейно изометричные своему второму сопряженному, но не рефлексивные (см. [39]).

В главе XI мы еще вернемся к вопросам, связанным с понятием сопряженного пространства, и, в частности, к рефлексивным пространствам, а пока предоставляем читателю доказать, опираясь на теорему 1 (3.III) об общей форме линейного функционала в гильбертовом пространстве, что гильбертово пространство, как и конечномерное, рефлексивно.

1.4. В IV. 2.5 было установлено, что для совокупности $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимых элементов нормированного пространства X существует биортогональная ей совокупность линейных функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Иногда нужно решить обратную задачу: по заданной совокупности линейно независимых линейных функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$ требуется определить биортогональную ей систему элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Решение этой задачи сводится к указанной выше, если данное пространство X рефлексивно. Действительно, по доказанному можно найти функционалы $X_1, X_2, \dots, X_n \in X^{**}$ так, что

$$X_k(f_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Но в рефлексивном пространстве каждый из функционалов X_k имеет вид X_{x_k} , где $x_k \in X$, в связи с чем (11) переходит в (10).

Оказывается, впрочем, что требование рефлексивности не лежит в основе дела, и поставленная задача имеет решение в гораздо более общем случае.

Рассмотрим произвольное линейное множество X и совокупность X' всевозможных аддитивных и однородных функционалов в X . Множество X' линеаризуем естественным образом.

Теорема 3 (I.V). Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n \in X'$ линейно независимы. Существует совокупность элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, биортогональная данной системе функционалов. Иначе говоря, для систем $\{f_k\}$ и $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) выполнены соотношения (10).

Доказательство. Существование требуемой системы докажем по индукции. Если $n=1$, то, поскольку $f_1 \neq 0$, найдется $x_1 \in X$ так, что $f_1(x_1)=1$. Элемент x_1 и образует искомую систему. Рассмотрим случай, когда $n > 1$. Предположим, что биортогональную систему элементов можно построить, если число функционалов меньше n . Докажем в этом предположении существование такого элемента $x_1 \in X$, что

$$f_1(x_1)=1, \quad f_2(x_1)=\dots=f_n(x_1)=0. \quad (12)$$

Для этого рассмотрим систему элементов $x'_2, \dots, x'_n \in X$, биортогональную по отношению к функционалам $f_2, \dots, f_n$. Для каждого $x \in X$ имеет место представление

$$x = \sum_{k=2}^n \alpha_k x'_k + x'; \quad (13)$$

где x' — такой элемент, что $f_2(x') = \dots = f_n(x') = 0$. Действительно, полагая

$$\alpha_k = f_k(x) \quad (k=2, \dots, n), \quad (14)$$

будем иметь для элемента $x' = x - \sum_{k=2}^n \alpha_k x'_k$

$$f_j(x') = f_j(x) - \sum_{k=2}^n \alpha_k f_j(x'_k) = \alpha_j - \alpha_j = 0 \quad (j=2, \dots, n).$$

Отметим, что коэффициенты α_k определяются элементом x однозначно; чтобы убедиться в этом, достаточно применить к обеим частям (13) функционал f_j ($j=2, \dots, n$).

Предположим теперь, что элемента $x_1 \in X$, удовлетворяющего (12), не существует. Это означает, что для $x' \in X$, для которого $f_2(x') = \dots = f_n(x') = 0$, также и $f_1(x') = 0$. Учитывая это обстоятельство, а также (14), получаем из (13) для произвольного $x \in X$:

$$f_1(x) = \sum_{k=2}^n \alpha_k f_1(x'_k) + f_1(x') = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(x),$$

где обозначено $\lambda_k = f_1(x'_k)$ ($k=2, \dots, n$). Таким образом,

$f_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$, что противоречит линейной независимости функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$. Итак, элемент x_1 существует. Подобным же образом доказывается существование элементов $x_2, \dots, x_n \in X$ таких, что

$$f_k(x_k)=1, \quad f_j(x_k)=0 \quad (j \neq k; j=1, 2, \dots, n; k=2, \dots, n),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Изложенное в настоящем параграфе по существу содержится в монографии Банаха-И.

Понятие рефлексивности (под названием «регулярность») введено А. И. Плеснером (см. Люстерник).

§ 2. Кольцо операций

2.1. Линейные операции можно не только складывать, но и перемножать. Пусть X , Y и Z — три нормированных пространства, а U и V — линейные операции из X в Y и Y в Z соответственно ($U \in [X \rightarrow Y]$, $V \in [Y \rightarrow Z]$). Под *произведением* операций V и U мы будем понимать операцию $W = VU$ из X в Z , определяемую следующим образом:

$$W(x) = V(U(x)) \quad (x \in X). \quad *)$$

Так как

$$\begin{aligned} W(x_1 + x_2) &= V(U(x_1 + x_2)) = V(U(x_1) + U(x_2)) = \\ &= V(U(x_1)) + V(U(x_2)) = W(x_1) + W(x_2) \end{aligned}$$

и

$$\|W(x)\| = \|V(U(x))\| \leq \|V\| \|U(x)\| \leq \|U\| \|V\| \|x\|,$$

то W — линейная операция, причем

$$\|W\| = \|VU\| \leq \|V\| \|U\|. \quad (1)$$

Если X , Y , Z — конечномерные пространства (размерности μ , ν , π соответственно) и A , B , C — матрицы, определяющие соответствующие операции U , V , W , то $C = BA$. Действительно, $z = W(x)$ означает

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\mu} c_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots, \pi; x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mu}), z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\pi})).$$

С другой стороны, $z = V(y)$, где $y = U(x)$, т. е.

$$\zeta_j = \sum_{m=1}^{\nu} b_{jm} \eta_m; \quad \eta_m = \sum_{k=1}^{\mu} a_{mk} \xi_k$$

$$(j = 1, 2, \dots, \pi; m = 1, 2, \dots, \nu; y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu})).$$

Сопоставляя это с предыдущим и учитывая произвольность элемента x , получим

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{\nu} b_{jm} a_{mk} \quad (j = 1, 2, \dots, \pi; k = 1, 2, \dots, \mu),$$

что и требовалось доказать.

Как известно из алгебры, произведение двух матриц может быть матрицей, все элементы которой равны нулю, несмотря на то, что

*) Это определение имеет смысл и для нелинейных операций.

матрицы-сомножители отличны от нуля. Это обстоятельство показывает, что в (1) неравенство не может быть заменено равенством даже в случае конечномерных пространств.

Однако, ряд свойств произведения чисел сохраняется и для операций. Укажем, например, опуская очевидные доказательства, на дистрибутивность и ассоциативность умножения. Далее, существуют операции, играющие роль единицы при умножении чисел. Однако, в отличие от числового умножения здесь имеются две «единицы» — левая и правая. Так, операция $I \in [X \rightarrow X]$, осуществляющая тождественное преобразование в X :

$$I(x) = x \quad (x \in X), \quad (2)$$

будет правой единицей:

$$UI = U,$$

а аналогичная операция I_1 в Y — левой единицей:

$$I_1U = U.$$

Следует особо подчеркнуть отсутствие коммутативности при умножении операций. Более того, операция UV , вообще говоря, и не определена, поэтому равенство $UV = VU$ лишено содержания. Но даже когда UV имеет смысл (а это будет, очевидно, в случае $Z = X$), операции VU и UV определены в разных пространствах — первая в X , вторая в Y .

В связи с этим вопрос о перестановочности операций U и V может ставиться лишь тогда, когда $X = Y = Z$, т. е. когда обе операции суть операции в одном и том же пространстве X , иными словами, являются элементами пространства $[X \rightarrow X]$.

Однако, и в этом случае равенство $UV = VU$ для произвольных операций $U, V \in [X \rightarrow X]$ не имеет места, если только X не одномерное пространство.

2.2. Среди пространств $[X \rightarrow Y]$ пространство линейных операций, переводящих X в себя — $[X \rightarrow X]$ — занимает особое место, так как только в нем произведение любых двух элементов имеет смысл.

Система, для элементов которой определены два действия: сложение и умножение, подчиненных обычным законам действий над числами (за исключением коммутативности и обратимости для умножения), называется *кольцом*. Если умножение определено для элементов нормированного пространства, то последнее называется *нормированным кольцом*. При этом, чтобы связать операцию умножения с метрикой пространства, требуют непрерывность произведения.

Таким образом, пространство $[X \rightarrow X]$ является нормированным кольцом (непрерывность произведения следует из неравенства (1)). *)

*) Теорией нормированных колец мы будем заниматься лишь в связи с пространством $[X \rightarrow X]$. Читателя, желающего ближе познакомиться с нормированными кольцами, мы отсылаем к книге М. А. Наймарка (см. Наймарк-II).

В нормированном кольце, в частности в пространстве $[X \rightarrow X]$, могут быть определены степени любого элемента. Пусть $U \in [X \rightarrow X]$. По определению

$$U^0 = I, \quad U^n = U^{n-1}U \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где I — тождественная операция в X (см. (2)).

Так как это определение ничем не отличается от соответствующего определения для чисел, то для любых целых положительных m и n

$$U^m U^n = U^{m+n},$$

откуда следует, что все степени одной и той же операции U перестановочны между собой.

Далее, применяя последовательно неравенство (1), найдем

$$\|U^n\| \leq \|U\|^n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

При этом знак равенства, вообще говоря, не имеет места.

Будем считать в дальнейшем пространство X полным. Тогда по теореме 1 (1. V) будет полным и пространство $[X \rightarrow X]$. В этом предположении рассмотрим «геометрическую прогрессию»:

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots \quad (4)$$

Выясним, при каких условиях этот ряд сходится. Из (3) непосредственно вытекает, что сходимость во всяком случае имеет место, когда

$$\|U\| < 1, \quad (5)$$

так как тогда ряд (4) мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$1 + \|U\| + \|U\|^2 + \dots + \|U\|^n + \dots$$

и, следовательно, ввиду полноты пространства $[X \rightarrow X]$, сходится (см. II. 2.5). Однако в отличие от числового случая условие (5) не является необходимым для сходимости ряда (3).

Теорема 1 (2. V). *Какова бы ни была операция U , существует*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = c_U.$$

При этом, если $c_U < 1$, то ряд (4) сходится, если же $c_U > 1$ — расходится.

Доказательство. Обозначим

$$a = \inf_n \sqrt[n]{\|U^n\|}$$

и докажем, что $c_U = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = a$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем m так, чтобы

$$\sqrt[m]{\|U^m\|} < a + \varepsilon.$$

Пусть, далее

$$M = \max [1, \|U\|, \dots, \|U^{m-1}\|].$$

Рассмотрим произвольное n ; представим его в форме $n = k_n m + l_n$ ($0 \leq l_n \leq m-1$). При этом на основании (3)

$$\sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \sqrt[n]{\|U^{l_n}\| \|U^m\|^{k_n}} \leq M^{\frac{1}{n}} \|U^m\|^{\frac{k_n}{n}} < M^{\frac{1}{n}} (a + \varepsilon)^{\frac{n-l_n}{n}}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{n}} (a + \varepsilon)^{\frac{n-l_n}{n}} = a + \varepsilon,$$

то найдется N_ε такое, что

$$M^{\frac{1}{n}} (a + \varepsilon)^{\frac{n-l_n}{n}} < a + 2\varepsilon \quad (n \geq N_\varepsilon).$$

Следовательно, для $n \geq N_\varepsilon$

$$a \leq \sqrt[n]{\|U^n\|} < a + 2\varepsilon,$$

откуда и следует существование $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} = a$.

Сходимость (в случае $c_U < 1$) или расходимость (в случае $c_U > 1$) ряда (4) получается теперь с помощью применения признака сходимости Коши к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \|U^n\|$. *)

Следствие. Для того чтобы ряд (4) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы при некотором k было

$$\|U^k\| < 1. \quad (6)$$

Действительно, если ряд (4) сходится, то $\|U^n\| \rightarrow 0$ и потому (6) выполнено при достаточно большом k . Наоборот, если (6) имеет место, то, $c_U = \inf_n \sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \sqrt[k]{\|U^k\|} < 1$, и, следовательно, ряд (4) сходится.

2.3. Рассмотрим вопрос об обращении действия умножения операций. Пусть имеется аддитивная и однородная операция U , отображающая нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Будем говорить, что операция U имеет обратную

*) Фихтенгольц, т. II, стр. 320.

(или иначе, *обратима*), если существует операция V , отображающая Y в X и такая, что

$$VU = I_X, \quad UV = I_Y, \quad (7)$$

где I_X , соответственно I_Y , есть операция, осуществляющая тождественное преобразование пространства X соответственно пространства Y . *) Операция V называется *обратной* по отношению к U и обозначается $V = U^{-1}$.

Непосредственно из определения следует, что обратная операция U^{-1} так же, как и данная, аддитивна и однородна. В самом деле, если $y_1, y_2 \in Y$, то в силу второго из соотношений (7)

$$y_k = U(x_k) \quad (x_k = V(y_k), \quad k = 1, 2).$$

Поэтому на основании первого из соотношений (7), будем иметь

$$V(y_1 + y_2) = V(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = V(y_1) + V(y_2).$$

Аналогично доказывается однородность операции U^{-1} .

Далее, из определения следует, что операция U является обратной по отношению к U^{-1} , т. е. $(U^{-1})^{-1} = U$.

Высказанное определение обратной операции носит формальный характер. Чтобы выяснить его сущность, докажем, что если существует обратная операция U^{-1} , то операция U осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на пространство Y .

Действительно, возьмем $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$). Если бы оказалось, что $U(x_1) = U(x_2)$, то по первому из соотношений (7), мы имели бы

$$x_1 = VU(x_1) = VU(x_2) = x_2.$$

Далее, каждый $y \in Y$ является образом некоторого $x \in X$ (и такой x по доказанному может быть только один). Именно, в качестве x следует взять элемент $x = V(y)$. Тогда на основании второго из соотношений (7)

$$U(x) = UV(y) = y.$$

Наоборот, пусть операция U осуществляет взаимно-однозначное отображение X на Y . Сопоставим элементу $y \in Y$ его прообраз, т. е. такой элемент $x \in X$, что $U(x) = y$. Это приводит к операции V , отображающей Y на X . Нетрудно проверить, что V — аддитивная и однородная операция, причем $V = U^{-1}$.

В самом деле, соотношения $x = V(y)$ и $y = U(x)$ эквивалентны, поэтому

$$VU(x) = V(y) = x; \quad UV(y) = U(x) = y.$$

*) В дальнейшем мы будем использовать обозначения I_X, I_Y и т. п., не оговаривая их каждый раз. Значок, указывающий на пространство, в котором определена операция, мы иногда будем опускать в случаях, когда это не сможет вызвать недоразумений.

Из сказанного, между прочим, вытекает, что обратная операция, если она существует, может быть только одна.

Изложенное позволяет рассмотреть понятие обратной операции еще с одной точки зрения. Пусть имеется уравнение

$$U(x) = y, \quad (8)$$

где y — произвольный, но фиксированный элемент из Y , а x — искомый элемент пространства X .

Ясно, что если существует обратная операция U^{-1} , то уравнение (8) имеет единственное решение при любом $y \in Y$, причем это решение есть $x = U^{-1}(y)$.

Факт однозначной разрешимости уравнения (8) еще не обеспечивает существования линейной обратной операции U^{-1} .

Теорема 2 (2.V). Пусть уравнение (8) имеет решение при любом $y \in Y$ и пусть существует положительное число m такое, что при каждом $x \in X$

$$\|U(x)\| \geq m\|x\|. \quad (9)$$

Тогда операция U имеет линейную обратную U^{-1} , причем

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{m}. \quad (10)$$

Доказательство. Очевидно, отображение, осуществляемое операцией U , взаимно-однозначно, так как если $x_1 \neq x_2$, то

$$\|U(x_1) - U(x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\| > 0.$$

Кроме того, из разрешимости уравнения (8) при любом $y \in Y$ следует, что $U(X) = Y$.

Таким образом, как показано выше, существует аддитивная и однородная операция $V = U^{-1}$. Так как $x = V(y)$ означает $y = U(x)$, то из (9) получаем

$$\|y\| \geq m\|V(y)\| \quad (y \in Y)$$

или

$$\|U^{-1}(y)\| = \|V(y)\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \quad (y \in Y). \quad (11)$$

Иначе говоря, U^{-1} — ограниченная и, следовательно, линейная операция. Оценка (10) получается непосредственно из (11).

Замечание. Условия теоремы являются также и необходимыми для существования линейной обратной операции U^{-1} .

Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго условия легко проверяется, если взять $m = \frac{1}{\|U^{-1}\|}$.

В качестве иллюстрации доказанной теоремы рассмотрим операцию U в L^2 , определенную в III. 2.7:

$$y = U(x); \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt.$$

(ядро $K(s, t)$ предполагается симметричным).

Считая, что λ не является характеристическим значением ядра, мы на основании известных фактов теории интегральных уравнений можем заключить, что уравнение (8) имеет в данном случае решение при любом $y \in L^2$ (см. Петровский). Далее, в III. 2.7 было показано (мы используем прежние обозначения), что

$$\|y\|^2 = \|U(x)\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\|U(x)\|^2 \geq m^2 \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 = m^2 \|x\|^2,$$

где

$$m = \inf \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right| \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

а через λ_k обозначены характеристические значения ядра $K(s, t)$ (при $k=0, -1, -2, \dots$ надо считать $\lambda_k = \infty$). Так как $\lambda_k \neq \lambda$ и $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $m > 0$. Следовательно, существует линейная операция U^{-1} , причем

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{m} = \sup \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right| \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

2.4. Сохраняя лишь одно из соотношений (7), мы приходим к понятию левой, соответственно правой, обратной операции. Точнее говоря, операция V_l называется *левой обратной* по отношению к операции U , если

$$V_l U = I_x.$$

Аналогично операция V_r называется *правой обратной* по отношению к операции U , если

$$U V_r = I_y.$$

Левую обратную операцию мы будем обозначать символом U_l^{-1} , правую U_r^{-1} ; при этом значки иногда будут опускаться, когда из контекста ясно, о какой обратной операции идет речь.

Наличие левой или правой обратной операции позволяет сделать некоторые заключения о разрешимости уравнения (8).

Именно, если существует левая обратная операция U_l^{-1} , то решение уравнения (8), если оно существует, единственно. Иными сло-

вами, если имеется левая обратная операция, то U осуществляет взаимно-однозначное отображение X на $U(X)$. Действительно, при проверке этого обстоятельства в случае существования обратной операции мы использовали лишь первое из соотношений (7), которое имеет место и для левой обратной.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, множество $U(X)$ не совпадает с Y и, таким образом, операция U_l^{-1} определена не на всем Y .

Аналогично можно убедиться, что существование правой обратной операции влечет разрешимость (но, вообще говоря, не однозначную) уравнения (8) при любом $y \in Y$ (решением будет $x = U_r^{-1}(y)$), т. е. в этом случае $U(X) = Y$.

В противоположность обратной левая и правая обратные операции в общем случае не единственны. Однако, как следует из сказанного выше, если существует левая обратная U_l^{-1} и правая обратная U_r^{-1} , то они равны между собой; при этом существует обратная $U^{-1} = U_l^{-1} = U_r^{-1}$. В связи с этим мы иногда будем называть обратную операцию *двусторонней* обратной.

В заключение отметим, что для существования линейной левой обратной необходимо и достаточно, чтобы операция U удовлетворяла условию (9).

2.5. Случай, когда $Y = X$, интересен тем, что если существует линейная обратная по отношению к данной операции $U \in [X \rightarrow X]$, то она является элементом того же пространства $[X \rightarrow X]$.

Соображения, высказанные в 2.2 по поводу ряда (4)

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots,$$

приводят к следующей теореме (см. [95]).

Теорема 3 (2.V) (Банах). Пусть X — B -пространство и $U \in [X \rightarrow X]$. Тогда, если

$$\|U\| \leq q < 1, \quad (12)$$

то операция $I - U$ имеет линейную обратную, причем

$$\|(I - U)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}. \quad (13)$$

Доказательство. В 2.2 было показано, что ряд (4) при условии теоремы, т. е. при условии (5), сходится. Обозначим через V сумму этого ряда. Имеем

$$\begin{aligned} V(I - U) &= (I + U + \dots + U^n + \dots)(I - U) = \\ &= (I + U + \dots + U^n + \dots) - \\ &\quad - (U + U^2 + \dots + U^{n+1} + \dots) = I, \end{aligned} \quad (14)$$

и, аналогично,

$$(I - U)V = I. \quad (15)$$

Таким образом, $V = (I - U)^{-1}$.

Далее, в силу (3)

$$\begin{aligned} \|V\| &\leq \|I\| + \|U\| + \dots + \|U^n\| + \dots \leq \\ &\leq 1 + q + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

что и дает оценку (13).

З а м е ч а н и е. Так как соотношения (14) и (15) выполнены всегда, когда ряд (4) сходится, то в соответствии с теоремой 1 и следствием из нее линейная операция $(I - U)^{-1}$ будет существовать и тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} < 1, \quad (16)$$

или если при некотором $k = 1, 2, \dots$

$$\sqrt[k]{\|U^k\|} < 1. \quad (17)$$

2.6. Теорема Банаха показывает, что операция $I - U$, мало отличающаяся от тождественной операции I , имеющей линейную обратную ($I^{-1} = I$), сама имеет линейную обратную. Этот факт поддается обобщению.

Теорема 4 (2. V). Пусть $U_0 \in [X \rightarrow Y]$, где X и Y — два B -пространства, и пусть существует $U_0^{-1} \in [Y \rightarrow X]$. Тогда, если операция $U \in [X \rightarrow Y]$ удовлетворяет условию

$$\|U\| < \frac{1}{\|U_0^{-1}\|}, \quad (18)$$

то операция $V = U_0 + U$ имеет линейную обратную V^{-1} , причем

$$\|V^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\| \|U\|}.$$

Доказательство. Рассмотрим операцию

$$W = U_0^{-1}V = I_X + U_0^{-1}U.$$

Так как

$$\|U_0^{-1}U\| \leq \|U_0^{-1}\| \|U\| < 1,$$

то по теореме Банаха операция W имеет линейную обратную W^{-1} . При этом

$$\|W^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}\| \|U\|}. \quad (19)$$

Имеем далее

$$U_0^{-1}VW^{-1} = I_X,$$

откуда

$$VW^{-1} = U_0$$

и, следовательно,

$$VW^{-1}U_0^{-1} = I_Y.$$

С другой стороны,

$$W^{-1}U_0^{-1}V = I_X.$$

Последние два равенства позволяют заключить, что операция $W^{-1}U_0^{-1}$ является линейной обратной по отношению к операции V .

Из равенства $V^{-1} = W^{-1}U_0^{-1}$ с помощью (19) получаем оценку

$$\|V^{-1}\| \leq \|W^{-1}\| \|U_0^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\| \|U\|}.$$

§ 3. Метод последовательных приближений

3.1. Рассмотрим уравнение

$$x - U(x) = y, \quad (1)$$

где U — линейная операция в B -пространстве X , y — данный и x — искомый элементы пространства X .

Одним из распространенных методов нахождения решения уравнения (1) является так называемый *метод последовательных приближений*, который состоит в том, что, задавшись произвольным элементом $x_0 \in X$ — *начальным приближением*, — строят, исходя из него, последовательность $\{x_n\}$ *приближенных решений*

$$x_{n+1} = y + U(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2)$$

Если при этом получается сходящаяся последовательность, пределом которой является решение рассматриваемого уравнения, то говорят, что процесс последовательных приближений для уравнения (1), начатый с элемента x_0 , *сходится* (к решению уравнения (1)). Поскольку U — линейная операция, из одного факта сходимости последовательности $\{x_n\}$ вытекает, что $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ есть решение уравнения (1). Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношении (2).

Вопрос о сходимости процесса последовательных приближений для уравнения (1) оказывается связанным со сходимостью ряда

$$I + U + \dots + U^n + \dots \quad (3)$$

сумма которого (в случае сходимости) есть $(I - U)^{-1}$ (см. замечание к теореме Банаха — теореме 3 (2. V)).

Теорема 1 (3. V). Если ряд (3) сходится, то, каково бы ни было начальное приближение x_0 , процесс последовательных при-

ближений для уравнения (10) сходится к единственному решению x^* уравнения (1). При этом имеет место оценка

$$\|x^* - x_n\| \leq \|(I - U)^{-1}\| \|U^n\| \|x_1 - x_0\| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

В частности, если выполнено условие теоремы Банаха, эта оценка может быть заменена оценкой

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Применяя последовательно формулу (2), найдем

$$x_n = y + U(y) + \dots + U^{n-1}(y) + U^n(x_0) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Отсюда ясно, что если ряд (3) сходится, то, поскольку в этом случае $U^n(x_0) \rightarrow 0$, существует

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} U^k(y) = (I - U)^{-1}(y).$$

Так как x^* есть, очевидно, решение уравнения (1), то этим доказана первая часть теоремы.

Чтобы получить оценку (4), заменим в равенстве (5) x_0 на x^* . Тогда, как это ясно из формулы (2), $x_n = x^*$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$x^* = y + U(y) + \dots + U^{n-1}(y) + U^n(x^*) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Вычитая из него равенство (5) и переходя к нормам, получим

$$\|x^* - x_n\| \leq \|U^n\| \|x^* - x_0\| \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Обозначим $\tilde{x} = x^* - x_0$. Принимая во внимание, что x^* есть решение уравнения (1), и, следовательно, $x^* - U(x^*) = y$, будем иметь

$$\begin{aligned} (I - U)(\tilde{x}) &= \tilde{x} - U(\tilde{x}) = x^* - U(x^*) - x_0 + U(x_0) = \\ &= y + U(x_0) - x_0 = x_1 - x_0; \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\tilde{x} = (I - U)^{-1}(x_1 - x_0).$$

Используя это в (6), придем к требуемой оценке.

3.2. Теорема 1 имеет многообразные применения. Остановимся на некоторых из них.

Пусть сначала X n -мерное пространство. Линейная операция $U \in [X \rightarrow X]$ определяется в этом случае квадратной матрицей

$A = (a_{jk})$ и уравнение (1) может быть записано в развернутой форме в виде системы уравнений:

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \xi_k = \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu}), \\ y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu})). \quad (7)$$

Последовательные приближения $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{\nu}^{(n)})$ ($n = 0, 1, \dots$) к решению находятся по формулам

$$\xi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk} \xi_k^{(n)} + \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, \nu; \quad n = 0, 1, \dots).$$

Условие (12) предыдущего параграфа, обеспечивающее сходимость процесса последовательных приближений к решению, зависит от принятой в X нормировки. Так, если $X = m_{\nu}$, то, поскольку в этом случае (см. III. 2.8.)

$$\|U\| = \max_j \sum_{k=1}^{\nu} |a_{jk}|,$$

будем иметь, что, при условии

$$\sum_{k=1}^{\nu} |a_{jk}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu), \quad (8)$$

существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j^*$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$), причем $\xi_1 = \xi_1^*, \xi_2 = \xi_2^*, \dots, \xi_{\nu} = \xi_{\nu}^*$ является решением (единственным) системы (16).

Принимая $X = l_{\nu}$, получаем другое условие

$$\sum_{j=1}^{\nu} |a_{jk}| < 1 \quad (k = 1, 2, \dots, \nu). \quad (9)$$

Наконец, взяв $X = R^{\nu}$, в силу имеющейся в этом случае оценки

$$\|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

приходим к условию

$$\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} |a_{jk}|^2 < 1. \quad (10)$$

Любопытно отметить, что если матрица A симметричная и $X = R^{\nu}$, условие $\|U\| < 1$ не только достаточно, но и необходимо для сходимости процесса последовательных приближений.

В самом деле, как было показано в III. 2.8, в данном случае

$$\|U\| = |\lambda_1|,$$

где λ_1 — наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы A . Беря в качестве y в системе (7) собственный вектор, отвечающий λ_1 , и полагая $x_0 = 0$ получим

$$x_1 = y; \quad x_2 = U(x_1) + y = (\lambda_1 + 1)y; \quad \dots;$$

$$x_{n+1} = U(x_n) + y = (\lambda_1^n + \dots + \lambda_1 + 1)y \quad (n = 1, 2, \dots)$$

откуда и следует, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{\xi_j^{(n)}\}$ не имеет предела, если $|\lambda_1| \geq 1$ ($\eta_j \neq 0$).

Таким образом, когда матрица A симметрична, процесс последовательных приближений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A меньше единицы по абсолютной величине.

В главе XIII будет доказан общий результат, из которого справедливость указанного выше факта следует и без предположения о симметрии матрицы A . Предоставляем читателю проверить это обстоятельство непосредственно.

Укажем еще на оценки наибольшего по модулю собственного значения λ_1 произвольной матрицы A . Обозначив через $x_1 \in X$ собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1 будем иметь $U(x_1) = \lambda_1 x_1$ и, следовательно,

$$|\lambda_1| \|x_1\| = \|U(x_1)\| \leq \|U\| \|x_1\|$$

т. е.

$$|\lambda_1| \leq \|U\|.$$

Принимая за X пространство m , получим отсюда

$$|\lambda_1| \leq \max_j \sum_{k=1}^v |a_{jk}|.$$

Взяв $X = l$, приходим к оценке

$$|\lambda_1| \leq \max_k \sum_{j=1}^v |a_{jk}|.$$

Наконец, если $X = R^n$, то

$$|\lambda_1| \leq \|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3.3. Перейдем к изучению бесконечных систем. Рассмотрим систему уравнений

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Мы будем называть *решением* системы такую числовую последовательность $\{\xi_j^*\}$, что при $\xi_j = \xi_j^*$ ряды в левой части (12) сходятся и все уравнения (11) обращаются в тождества.

Системы такого рода встречаются при исследовании граничных задач для уравнений математической физики и интегральных уравнений. *)

Предположим сначала, что бесконечная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

системы (11) удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1. \quad (12)$$

При этом, как было указано в III. 3.1 матрица A определяет линейную операцию U в пространстве l^2 :

$$z = U(x)$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots; x = (\xi_1, \xi_2, \dots), z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)).$$

Условие (12) дает

$$\|U\| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < 1,$$

поэтому к системе (11), записанной в форме одного уравнения вида (1)

$$x - U(x) = y \quad (x = \xi_1, \xi_2, \dots, y = (\eta_1, \eta_2, \dots)),$$

применима теорема 1, на основании которой для каждого $y \in l^2$ существует единственное (в пространстве l^2) решение $x^* = \{\xi_k^*\}$, ко-

*) По поводу бесконечных систем см. [456]. Литература по бесконечным системам имеется в книге Канторович и Крылов и в работе [117].

торое может быть получено методом последовательных приближений

$$\xi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k^{(n)} + \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^* - \xi_j^{(n)}|^2 = 0$$

($\{\xi_k^{(0)}\}$ — произвольная последовательность из l^2).

Заменим теперь условие (12) более слабым:

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty. \quad (13)$$

Хотя и при этом условии матрица A определяет в l^2 линейную операцию U , но неравенство $\|U\| < 1$, вообще говоря, уже не выполняется, в связи с чем теорема 1 неприменима.

Покажем, что исследование системы (11) при условии (13) сводится к исследованию конечной системы (мы предполагаем, что последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей является элементом пространства l^2).

Найдем такое n_0 , что

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1.$$

Закрепим первые n_0 неизвестных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}$ и рассмотрим систему

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j + \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk} \xi_k \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots). \quad (14)$$

Поскольку

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk} \xi_k|^2 = |\xi_k|^2 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leq |\xi_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |a_{js}|^2 < \infty$$

$$(k = 1, 2, \dots, n_0),$$

то последовательность правых частей системы (14) входит в l^2 , поэтому на основании сказанного выше, рассмотренная система имеет единственное решение $\tilde{\xi}_{n_0+1}, \tilde{\xi}_{n_0+2}, \dots$ в l^2 , зависящее от зафиксированных значений $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}$. Выясним характер этой зависимости. Для этого рассмотрим системы

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = a_{js} \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n_0)$$

и

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = \eta_j \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots),$$

решения которых (единственные, как уже отмечалось) обозначим $\{c_{ks}\}$ и $\{\tilde{\eta}_{jk}\}$ ($k = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n_0$) соответственно. Таким образом, имеют место равенства

$$c_{js} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} c_{ks} = a_{js} \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n_0), \quad (15)$$

$$\tilde{\eta}_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \tilde{\eta}_k = \eta_j \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots). \quad (16)$$

Умножая первые равенства на ξ_s , суммируя и складывая с последним, получим соотношение

$$\left(\tilde{\eta}_j + \sum_{s=1}^{n_0} c_{js} \xi_s \right) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \left(\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks} \xi_s \right) = \eta_j + \sum_{s=1}^{n_0} a_{js} \xi_s$$

$$(j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots),$$

откуда вытекает, что последовательность $\left\{ \tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks} \xi_s \right\}$ является решением системы (14), поэтому ввиду единственности последнего

$$\tilde{\xi}_k = \tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks} \xi_s \quad (k = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots).$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: данная система (11) равносильна системе

$$\left. \begin{aligned} \xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k &= \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n_0) \\ \xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k &= \tilde{\eta}_j \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Подставим в первую группу уравнений вместо ξ_k с $k > n_0$ выражения, полученные для них из второй группы:

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk} \xi_k - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \left(\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} a_{ks} \xi_s \right) = \eta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n_0) \quad (18)$$

или, если обозначить (ср. с (15) и (16))

$$c_{jk} = a_{jk} + \sum_{s=n_0+1}^{\infty} a_{js} c_{sk}, \quad \tilde{\eta}_j = \eta_j + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \tilde{\eta}_k \quad (j, k = 1, 2, \dots, n_0, *)$$

*) Так как ряды $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |a_{js}|^2$, $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |c_{sk}|^2$ и $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\tilde{\eta}_k|^2$ сходятся, то сходятся и ряды, стоящие в правой части.

то уравнения (18) можно переписать в форме

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n_0). \quad (19)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения второй группы из системы (17)

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j \quad (j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots), \quad (20)$$

получим бесконечную систему, эквивалентную данной системе (11).

Решение построенной системы может быть осуществлено в два приема: во-первых, из конечной системы (19) находим значения первых n_0 неизвестных; во-вторых, подставляя их в уравнения (20), определяем значения остальных неизвестных.

Так как второй шаг осуществим всегда, когда осуществим первый, то таким образом установлено, что решение бесконечной системы (11) сводится к решению конечной системы (19).

С помощью этого обстоятельства можно показать, что система (11) при условии (13) обладает всеми свойствами конечных систем. Поскольку в главе XIII мы придем к этому результату из других, общих, соображений, здесь мы укажем лишь на одно такое свойство: если однородная система, соответствующая (11) (т. е. получающаяся из (11) при $\eta_1 = \eta_2 = \dots = 0$), имеет в $\mathbb{I}^2$ единственное решение (очевидно, нулевое), то данная система (11) имеет единственное решение, какова бы ни была последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей.

Действительно, если система (11) однородная, то будет однородной и система (19), а так как для конечных систем высказанное утверждение справедливо, то неоднородная система (19) имеет единственное решение, откуда и следует доказываемый результат.

Предоставляем читателю проверить, что однородная система (11) имеет конечное число линейно независимых решений, а также вывести условия разрешимости неоднородной системы в случае, когда это число больше нуля.

3.4. Предположим теперь, что матрица A удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq 1 - \rho \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где $\rho > 0$.

Система (11), удовлетворяющая этому условию, называется *вполне регулярной*.

Введем в пространстве $\mathbf{m}$ операцию U :

$$z = U(x)$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots; x = (\xi_1, \xi_2, \dots), z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)).$$

Поскольку вследствие (21)

$$|\zeta_j| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| |\xi_k| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq (1 - \rho) \|x\| \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (22)$$

$z = U(x)$ имеет смысл при любом $x \in \mathfrak{m}$ и является элементом пространства $\mathfrak{m}$. При этом

$$\|z\| = \|U(x)\| \leq (1 - \rho) \|x\|.$$

Отсюда, принимая во внимание очевидную аддитивность операции U , заключаем, что U — линейная операция в $\mathfrak{m}$ и

$$\|U\| \leq 1 - \rho. \quad (23)$$

Как и в 3.3 систему (11) можно записать теперь в виде одного уравнения типа (1):

$$x - U(x) = y \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)). \quad (24)$$

Неравенство (23) обеспечивает применимость к уравнению (24) теоремы 1, на основании которой это уравнение имеет при любом $y \in \mathfrak{m}$ единственное решение (в пространстве $\mathfrak{m}$), которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Таким образом, вполне регулярная система имеет единственное ограниченное решение, какова бы ни была ограниченная последовательность $\{\eta_j\}$ правых частей.

Замечание. В высказанном предложении гарантируется единственность ограниченного решения вполне регулярной системы. При этом не исключено, что система имеет еще и неограниченные решения. Так, система

$$\xi_j - \frac{1}{j+1} \xi_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

имеет бесконечно много решений

$$\xi_1 = a, \xi_2 = 2a, \dots, \xi_k = k! a, \dots,$$

где a — произвольная постоянная. Однако, если $a \neq 0$, все эти решения неограничены.

Аналогичное замечание можно сделать и по поводу систем, рассмотренных в 3.3.

Если рассмотреть системы, для которых существует такое n_0 и M , что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}| \leq 1 - \rho; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M \quad (j = 1, 2, \dots; \rho > 0),$$

то для них можно высказать все, что было установлено в 3.3 для систем, удовлетворяющих условию (13), при этом рассуждения переносятся без каких-либо существенных изменений.

3.5. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s),$$

предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывным.

Вводя интегральную операцию U в пространстве C или в пространстве L^2 (см. III.2.4 или III.2.6), мы можем записать интегральное уравнение в виде

$$x - \lambda U(x) = y. \quad (25)$$

Если

$$|\lambda| < \frac{1}{\|U\|}, \quad (26)$$

то по теореме 3 (2. V) операция $I - \lambda U$ имеет линейную обратную

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \dots + \lambda^n U^n + \dots$$

Следовательно, единственное решение x^* уравнения (25) имеет вид

$$x^* = (I - \lambda U)^{-1}(y) = y + \lambda U(y) + \lambda^2 U^2(y) + \dots + \lambda^n U^n(y) + \dots \quad (27)$$

Этот ряд называется *рядом Неймана*.

Покажем, что операции U^n , так же как и U , суть интегральные. Действительно, $v = U^2(x)$ означает $v = U(z)$, где $z = U(x)$, т. е.

$$v(s) = \int_a^b K(s, t) z(t) dt; \quad z(t) = \int_a^b K(t, u) x(u) du.$$

Откуда

$$\begin{aligned} v(s) &= \int_a^b K(s, t) \left[\int_a^b K(t, u) x(u) du \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) K(t, u) dt \right] x(u) du = \\ &= \int_a^b K_2(s, u) x(u) du \quad \left(K_2(s, u) = \int_a^b K(s, t) K(t, u) dt \right). \end{aligned}$$

По индукции можно доказать, что $v = U^n(x)$ означает

$$v(s) = \int_a^b K_n(s, u) x(u) du \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где $K_n(s, u)$ определяются из рекуррентного соотношения

$$K_n(s, u) = \int_a^b K_{n-1}(s, t) K(t, u) dt \quad (n = 2, 3, \dots),$$

раскрыв которое, получаем

$$K_n(s, u) = \int_a^b \dots \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_{n-1}, u) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}.$$

Функции $K_n(s, u)$ называются *повторными ядрами*.

Ряд Неймана может быть записан теперь в развернутой форме:

$$\begin{aligned} x^*(s) = & y(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(s, t) y(t) dt + \dots \\ & \dots + \lambda^n \int_a^b K_n(s, t) y(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Характер сходимости этого ряда зависит от того, в каком пространстве мы рассматриваем операцию U .

Условия сходимости ряда Неймана получаются из (26), если заменить там $\|U\|$ ее выражением. Так, если рассматривается пространство C , то (см. III.2.4)

$$\|U\| = \max_s \int_a^b |K(s, t)| dt \leq M(b-a) \quad \left(M = \max_{s, t} |K(s, t)| \right),$$

и условие (26) приобретает вид

$$|\lambda| < \frac{1}{\max_s \int_a^b |K(s, t)| dt},$$

или, проще,

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

В случае пространства L^2 имеется оценка (см. III.2.6).

$$\|U\| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, достаточным условием сходимости (в L^2) ряда Неймана будет

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Если ядро $K(s, t)$ симметричное, то в III.2.6 было указано точное равенство

$$\|U\| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое значение ядра $K(s, t)$. Поэтому в случае симметричного ядра сходимость ряда Неймана (опять в L^2) будет иметь место для

$$|\lambda| < |\lambda_1|.$$

Точно так же, как и в 3.2 для конечных систем здесь можно проверить, что при $|\lambda| \geq |\lambda_1|$ ряд Неймана уже не будет сходиться при любом $y \in L^2$. Таким образом, в этом случае условие (26) не только достаточно, но и необходимо для сходимости ряда Неймана.

Аналогичным путем с помощью неравенства $|\lambda_1| \geq \frac{1}{\|U\|}$ получаются оценки (снизу) наименьшего по модулю характеристического значения ядра:

$$|\lambda_1| \geq \frac{1}{\max_s \int_a^b |K(s, t)| dt} \geq \frac{1}{M(b-a)},$$

$$|\lambda_1| \geq \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Отметим в заключение следующее обстоятельство. В силу замечания к теореме Банаха (V. 2.5) сходимость ряда Неймана будет иметь место и тогда, когда при некотором $n = 1, 2, \dots$

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt[n]{\|U^n\|}},$$

т. е. (в пространстве C)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\max_s \int_a^b |K_n(s, t)| dt \right]^{\frac{1}{n}}},$$

или (в пространстве L^2)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int_a^b \int_a^b |K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2n}}}.$$

§ 4. Кольцо операторов в гильбертовом пространстве

4.1. Рассмотрим более подробно кольцо $[H \rightarrow H]$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H . Выясним сначала как связана операция перехода к сопряженному оператору с алгебраическими операциями кольца. Имеют место следующие предложения:

$$a) [U_1 + U_2]^* = U_1^* + U_2^*. \quad (1)$$

В самом деле, для любых $x, y \in H$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} ([U_1 + U_2] x, y) &= (x, [U_1 + U_2]^* y), \\ (U_1 x, y) &= (x, U_1^* y), \\ (U_2 x, y) &= (x, U_2^* y). \end{aligned}$$

Складывая второе и третье, найдем

$$([U_1 + U_2] x, y) = (x, U_1^* y + U_2^* y) = (x, [U_1^* + U_2^*] y),$$

откуда ввиду произвольности x

$$[U_1 + U_2]^* y = [U_1^* + U_2^*] y,$$

что и означает (1).

$$b) [\lambda U]^* = \bar{\lambda} U^*. \quad (2)$$

Имеем

$$([\lambda U] x, y) = (x, [\lambda U]^* y) \quad (x, y \in H). \quad (3)$$

Но $[\lambda U] x = \lambda Ux$, поэтому

$$([\lambda U] x, y) = \lambda (Ux, y) = \lambda (x, U^* y) = (x, [\bar{\lambda} U^*] y).$$

Сравнивая это с (3), получаем (2).

$$c) [U_1 U_2]^* = U_2^* U_1^*. \quad (4)$$

Действительно,

$$([U_1 U_2] x, y) = (x, [U_1 U_2]^* y). \quad (x, y \in H).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} ([U_1 U_2] x, y) &= (U_1 (U_2 x), y) = (U_2 x, U_1^* y) = \\ &= (x, U_2^* (U_1^* y)) = (x, [U_2^* U_1^*] y). \end{aligned}$$

Рассуждая, как и выше, получим (4).

d) Если оператор U имеет линейный обратный U^{-1} , то сопряженный оператор U^* также имеет линейный обратный, причем

$$(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*. \quad (5)$$

В самом деле, так как $U^{-1}U = UU^{-1} = I$, то на основании пункта c)

$$U^*(U^{-1})^* = (U^{-1})^* U^* = I^* = I.$$

Отсюда и следует справедливость утверждения.

В случае, когда операторы U_1 и U_2 — самосопряженные предложения а) — с) — приводят к следующим результатам:

д) Если λ, μ — вещественные числа, то оператор $\lambda U_1 + \mu U_2$ — самосопряженный.

е) Произведение $U_1 U_2$ будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $U_1 U_2 = U_2 U_1$, т. е. когда U_1 и U_2 перестановочны.

Действительно, поскольку U_1, U_2 — самосопряженные операторы, на основании пункта с)

$$[U_1 U_2]^* = U_2 U_1,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Пусть имеется последовательность операторов $\{U_n\}$ и оператор U . Будем говорить, что последовательность $\{U_n\}$ *слабо сходится* к U , если для любых $x, y \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n x, y) = (U x, y).$$

Ясно, что предел слабо сходящейся последовательности самосопряженных операторов есть самосопряженный оператор.

Точно так же, если $U_n x \rightarrow U x$ при любом $x \in \mathbf{H}$ (в этом случае мы будем говорить, что последовательность операторов $\{U_n\}$ *сходится к оператору U на $\mathbf{H}$*), и U_n — самосопряженные операторы, то и U самосопряженный.

И, наконец, если $U_n \rightarrow U$ в пространстве $[\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}]$, то самосопряженность операторов U_n также влечет самосопряженность оператора U .

Оба последних результата становятся очевидными, если заметить, что в обоих случаях последовательность $\{U_n\}$ слабо сходится к оператору U .

4.2. Оператор U в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ называется *положительным* ($U \geq 0$), если

$$(U x, x) \geq 0$$

для любого $x \in \mathbf{H}$.

Нетрудно проверить, что положительный оператор — самосопряженный. Действительно, пусть $(U x, x)$ вещественно при любом $x \in \mathbf{H}$. Так как

$$\begin{aligned} (U x, y) &= \frac{1}{4} \{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + \\ &+ i[(U(x+iy), x+iy) - (U(x-iy), x-iy)]\} \end{aligned}$$

и выражения в скобках вещественны, то, поменяв местами x и y , будем иметь

$$\begin{aligned}(Uy, x) &= \frac{1}{4} \{[(U(y+x), y+x) - (U(y-x), y-x)] + \\ &+ i[(U(y+xi), y+xi) - (U(y-xi), y-xi)]\} = \\ &= \frac{1}{4} \{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] - \\ &- i[(U(x+yi), x+yi) - (U(x-yi), x-yi)]\} = \overline{(Ux, y)}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(Ux, y) = \overline{(Uy, x)} = (x, Uy),$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. По существу мы доказали, что оператор U , для которого выражение (Ux, x) вещественно для любого $x \in H$, самосопряженный. Нетрудно видеть, что это условие и необходимо для того, чтобы U был самосопряженным оператором.

Будем говорить, что оператор U_1 *больше* оператора U_2 ($U_1 \geq U_2$), если разность $U_1 - U_2$ — положительный оператор.

Отметим, что оператор U^*U (или UU^*) будет положительным, каков бы ни был оператор U . В самом деле,

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) \geq 0.$$

В частности, если $U^* = U$, т. е. если U самосопряженный, то $U^2 \geq 0$.

Также ясно, что сумма положительных операторов является положительным оператором.

Отметим еще, что линейная комбинация положительных операторов с вещественными неотрицательными коэффициентами будет снова положительным оператором.

Далее, любая степень U^n положительного оператора U является положительным оператором. Действительно, если $n = 2m$ — четное, *) то

$$(U^n x, x) = (U^m x, U^m x) = \|U^m x\|^2 \geq 0 \quad (x \in H).$$

Если же $n = 2m + 1$ — нечетное, то

$$(U^n x, x) = (U(U^m x), U^m x) = (Uy, y) \geq 0 \quad (x \in H, y = U^m x).$$

Из сказанного вытекает, что линейная комбинация степеней положительного оператора U с неотрицательными коэффициентами, т. е. оператор вида

$$\varphi(U) = a_0 U^n + a_1 U^{n-1} + \dots + a_n I \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \geq 0)$$

будет положительным оператором. Оператор $\varphi(U)$ мы будем называть *операторным полиномом* от U .

*) Если $n = 0$ и, следовательно, $U^0 = I$, то утверждение, очевидно, также верно.

Пусть U — положительный оператор. Справедливо неравенство

$$|(Ux, y)|^2 \leq (Ux, x)(Uy, y) \quad (x, y \in H), \quad (6)$$

которое является обобщением неравенства Буняковского (последнее получается из (6), если $U = I$). Доказательство неравенства (6) почти дословно повторяет доказательство неравенства Буняковского, приведенное в II.7.1, в связи с чем мы предоставляем его читателю.

4.3. Основываясь на неравенстве (6), докажем своеобразную «теорему о пределе монотонной последовательности».

Теорема 1 (4. V). Пусть имеется возрастающая последовательность $\{U_n\}$ самосопряженных операторов. Тогда, если $\sup_n \|U_n\| = A < \infty$, то существует линейный оператор U такой, что для любого $x \in H$

$$Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x,$$

при этом

$$\|U\| \leq A. \quad (7)$$

Доказательство. Возьмем $m \geq n$. Оператор $U_m - U_n$ положительный, поэтому для любого $x \in H$

$$(U_m x, x) - (U_n x, x) = ((U_m - U_n)x, x) \geq 0,$$

т. е. числовая последовательность $\{(U_n x, x)\}$ возрастающая. Так как

$$|(U_n x, x)| \leq \|U_n x\| \|x\| \leq A \|x\|^2, \quad (8)$$

то существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n x, x)$.

Далее, применяя неравенство (6) к оператору $U_m - U_n$ ($m \geq n$), можем написать, учитывая (8)

$$\begin{aligned} |(U_m x - U_n x, y)|^2 &\leq [(U_m x, x) - (U_n x, x)][(U_m y, y) - (U_n y, y)] \leq \\ &\leq 2A \|y\|^2 [(U_m x, x) - (U_n x, x)]. \end{aligned}$$

Положим здесь

$$y = U_m x - U_n x.$$

Это приводит к соотношению

$$\|U_m x - U_n x\|^2 \leq 2A [(U_m x, x) - (U_n x, x)] \quad (x \in H).$$

Выражение в правой части по доказанному стремится к нулю при $m, n \rightarrow \infty$. Следовательно, существует

$$Ux = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x.$$

Оператор U , так определенный, аддитивен и однороден. А так как

$$\|U_n x\| \leq \|U_n\| \|x\| \leq A \|x\|,$$

то в пределе

$$\|Ux\| \leq A \|x\|,$$

т. е. U — ограниченный оператор и $\|U\| \leq A$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема, разумеется, справедлива и для убывающей последовательности операторов.

4.4. Пусть имеется положительный оператор U . Положительный оператор V называется *квадратным корнем* из оператора U , если

$$V^2 = U. \text{ При этом обозначают } V = \sqrt{U} \text{ или } V = U^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2 (4.V). Пусть U — положительный оператор. Существует единственный квадратный корень $V = \sqrt{U}$ из оператора U . При этом V перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|U\| \leq 1$. Положим $U_0 = I - U$. Оператор U_0 — положительный, так как

$$(U_0 x, x) = (x, x) - (Ux, x) \geq \|x\|^2 - \|U\| \|x\|^2 \geq 0 \quad (x \in H).$$

В силу (6) имеем

$$|(U_0 x, y)|^2 \leq (U_0 x, x) (U_0 y, y) \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

При $y = U_0 x$ мы приходим к неравенству

$$\|U_0 x\| \leq \|x\|.$$

Таким образом,

$$\|U_0\| \leq 1. \quad (9)$$

Определим последовательность операторов $\{V_n\}$, полагая

$$V_1 = 0, \quad V_{n+1} = \frac{1}{2} (U_0 + V_n^2) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Учитывая оценку (9), без труда можно проверить по индукции, что

$$\|V_n\| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Установим теперь, что операторы V_n и $V_{n+1} - V_n$ являются операторными полиномами от U_0 с неотрицательными коэффициентами. Для $n = 1$ это очевидно. Далее, поскольку действия с операторными полиномами производятся по тем же правилам, что и для обычных полиномов, из формулы (10) вытекает, что если V_n есть операторный полином от U_0 с неотрицательными коэффициентами, то таким

же полиномом будет и V_{n+1} . Если, опять воспользовавшись формулой (10), записать

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{2}(U_0 + V_n^2) - \frac{1}{2}(U_0 + V_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(V_n^2 - V_{n-1}^2) = \\ &= \frac{1}{2}(V_n + V_{n-1})(V_n - V_{n-1}), \end{aligned}$$

то, предполагая уже доказанным, что $V_n - V_{n-1}$ есть операторный полином с неотрицательными коэффициентами, и учитывая, что $V_n + V_{n-1}$ по доказанному является таким полиномом, получим, что оператор $V_{n+1} - V_n$, будучи произведением операторных полиномов от U_0 с неотрицательными коэффициентами, сам будет операторным полиномом от U_0 с неотрицательными коэффициентами.

Используя факт положительности операторного полинома с неотрицательными коэффициентами (см. 4.2), можно заключить, что $V_n \geq 0$ и $V_{n+1} - V_n \geq 0$. Иначе говоря, последовательность $\{V_n\}$ возрастающая и V_n , будучи положительными, будут также и самосопряженными. Так как по (11) последовательность $\{V_n\}$ ограничена, то на основании теоремы 1 существует оператор V_0 такой, что

$$V_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n x.$$

При этом, поскольку V_n положительные операторы, V_0 также положителен, а вследствие (11)

$$\|V_0\| \leq 1. \quad (12)$$

Пусть оператор $\bar{U}$ перестановочен с оператором U и, следовательно, с U_0 . Операторы V_n также, очевидно, перестановочны с $\bar{U}$, а тогда

$$\bar{U}V_0 x = \bar{U} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} V_n x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}V_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \bar{U} x = V_0 \bar{U} x \quad (x \in \mathbf{H}),$$

т. е. V_0 перестановочен с $\bar{U}$. В частности, V_0 перестановочен с любым из операторов V_n . Отсюда $V_0^2 - V_n^2 = (V_0 + V_n)(V_0 - V_n)$ и поэтому

$$\|V_0^2 x - V_n^2 x\| \leq \|V_0 + V_n\| \|V_0 x - V_n x\| \leq 2 \|V_0 x - V_n x\| \rightarrow 0 \quad (x \in \mathbf{H}),$$

так что

$$V_0^2 x = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^2 x \quad (x \in \mathbf{H}).$$

Переходя в соотношении

$$V_{n+1} x = \frac{1}{2}(U_0 x + V_0^2 x) \quad (n = 1, 2, \dots; \quad x \in \mathbf{H})$$

к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем

$$V_0 x = \frac{1}{2}(U_0 x + V_0^2 x) \quad (x \in \mathbf{H}).$$

Следовательно, полагая $V = I - V_0$, будем иметь

$$V^2 = I - 2V_0 + V_0^2 = [I - 2V_0] + [2V_0 - U_0] = I - U_0 = U.$$

Учитывая (12), мы докажем положительность оператора V так же, как в свое время доказали положительность оператора U_0 . Таким образом, $V = \sqrt{U}$.

Заметим еще, что V , так же как и V_0 , перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

Докажем теперь единственность квадратного корня. Пусть V' — квадратный корень из U . Так как

$$UV' = V'^3 = V'U,$$

то V' перестановочен с U и, следовательно, V также перестановочен с V' . Возьмем произвольный $x \in \mathbf{H}$ и обозначим $y = V'x - Vx$. Имеем

$$(V'y, y) + (Vy, y) = ([V' + V][V' - V]x, y) = ([V'^2 - V^2]x, y) = ([U - U]x, y) = 0.$$

Следовательно, поскольку $(Vy, y) \geq 0$ и $(V'y, y) \geq 0$,

$$(Vy, y) = (V'y, y) = 0.$$

Обозначим через W какой-нибудь квадратный корень из V . Так как

$$\|Wy\|^2 = (Wy, Wy) = (W^2y, y) = (Vy, y) = 0,$$

то $Wy = 0$ и тем более $Vy = W(Wy) = 0$. Аналогично $V'y = 0$. Но тогда

$$\|V'x - Vx\|^2 = ([V' - V]^2x, x) = ([V' - V]y, x) = 0,$$

и $V'x = Vx$ для любого $x \in \mathbf{H}$. Следовательно, $V' = V$.

Теорема полностью доказана. *)

Следствие. Если U_1 и U_2 — положительные перестановочные между собой операторы, то их произведение также положительный оператор.

Действительно, оператор $\sqrt{U_2} = V$ перестановочен с U_1 , поэтому $(U_1 U_2 x, x) = (U_1 V^2 x, x) = (V U_1 V x, x) = (U_1 (Vx), Vx) \geq 0$ ($x \in \mathbf{H}$).

4.5. В случае, когда U самосопряженный оператор, теорема 1 (2. V) об области сходимости ряда

$$I + U + \dots + U^n + \dots \quad (13)$$

упрощается.

*) Приведенное доказательство принадлежит Виссеру [23] (существование) и Сёкефальви-Надю (единственность). См. Рисс и Сёкефальви-Надь.

Теорема 3 (4.V). Если U — самосопряженный оператор, то для сходимости ряда (13) необходимо и достаточно, чтобы $\|U\| < 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\|U^2\| = \|U\|^2. \quad (14)$$

Действительно,

$$\|U\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|^2}{\|x\|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{(U^2x, x)}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|U^2x\|}{\|x\|} = \|U^2\|,$$

а противоположное неравенство $\|U^2\| \leq \|U\|^2$ выполнено для любого оператора U .

Из (14) следует

$$\|U^{2^m}\| = \|U\|^{2^m} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

и

$$c_U = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|U^{2^m}\|^{\frac{1}{2^m}} = \|U\|. \quad (16)$$

Учитывая результат теоремы 1 (2.V) и соотношение (16), достаточно проверить, что ряд (13) расходится, если $c_U = \|U\| = 1$. Но в этом случае согласно (15)

$$\|U^{2^m}\| = 1 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

и общий член ряда (13) не стремится к нулю.

4.6. В нормированном кольце $\{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}\}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ большую роль играет семейство проекторов (III. 3.4). Как будет показано в гл. IX, § 5, любой самосопряженный оператор может быть с помощью особой конструкции сведен к проекторам. Этим обстоятельством объясняется важность приводимых ниже теорем о проекторах.

Два проектора P_1 и P_2 называются *ортогональными*, если $P_1P_2 = 0$.*) Обозначим через $\mathbf{H}_1$, соответственно через $\mathbf{H}_2$, подпространство, на которое проектирует проектор P_1 , соответственно P_2 . Для того, чтобы проекторы P_1 и P_2 были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы были ортогональны подпространства $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$. Действительно, пусть $P_1P_2 = 0$, $x' \in \mathbf{H}_1$, $x'' \in \mathbf{H}_2$. Используя пункт б) из III. 3.4 и теорему 2 (3. III), будем иметь

$$(x', x'') = (P_1x', P_2x'') = (x', P_1P_2x'') = 0.$$

Если, наоборот, $\mathbf{H}_1 \perp \mathbf{H}_2$ и $x \in \mathbf{H}$, то $P_2x \in \mathbf{H}_2$ и, следовательно, $P_2x \perp \mathbf{H}_1$, а тогда по пункту с) из III. 3.4. $P_1P_2x = 0$, т. е. $P_1P_2 = 0$.

*) Поскольку 0 является самосопряженным оператором, то по пункту е) из 4.1 операторы P_1 и P_2 перестановочны, так что $P_2P_1 = P_1P_2 = 0$ и определение не зависит от порядка, в котором упоминаются проекторы.

Теорема 4 (4.V) Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — проекторы. Для того, чтобы оператор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы проекторы $P_1, P_2, \dots, P_n$ были попарно ортогональны.

Доказательство. Необходимость. Пусть P — проектор. В силу теоремы 2 (3. III)

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x) \quad (x \in \mathbf{H}) \quad (17)$$

и аналогично

$$\|P_k x\|^2 = (P_k x, x) \quad (x \in \mathbf{H}; k = 1, 2, \dots, n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 &\leq \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^n (P_k x, x) = (Px, x) = \\ &= \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in \mathbf{H}$ и положим в (18) $x = P_1 y$. Так как $P_1 x = P_1^2 y = P_1 y$, это даст

$$\|P_1 y\|^2 + \|P_2 P_1 y\|^2 \leq \|P_1 y\|^2.$$

Отсюда следует, что $P_2 P_1 y = 0$ и $P_2 P_1 = 0$ — проекторы P_1 и P_2 ортогональны. Так же докажем попарную ортогональность других проекторов.

Достаточность. Проверим, что оператор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ удовлетворяет условиям теоремы 2 (3. III) и тем самым является проектором. Поскольку P есть сумма самосопряженных операторов, он и сам есть самосопряженный оператор (4.1, пункт d)). Убедимся, что $P^2 = P$. Ввиду того, что P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — попарно ортогональные проекторы, т. е.

$$P_j P_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ P_k & (j = k) \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

имеем

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^n P_k \right)^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n P_j P_k = \sum_{k=1}^n P_k = P.$$

Теорема доказана.

В предположении, что выполнены условия теоремы, выясним структуру подпространства $\tilde{\mathbf{H}}$, на которое проектирует проектор $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Обозначим через $\mathbf{H}_k$ подпространство, соответствующее проектору P_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Пусть $x \in \tilde{\mathbf{H}}$. Тогда

$$x = Px = P_1 x + P_2 x + \dots + P_n x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

где $x_k = P_k x \in \mathbf{H}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Пусть, наоборот, x — элемент, допускающий представление в форме

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (x_k \in \mathbf{H}_k; \quad k = 1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

Поскольку $PP_k = \sum_{j=1}^n P_j P_k = P_k$ и $x_k = P_k x_k = PP_k x_k$, то

$$Px = \sum_{k=1}^n Px_k = \sum_{k=1}^n PP_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k = x,$$

т. е. $x \in \tilde{\mathbf{H}}$. Ввиду того, что $P_k x_j = 0 \quad (j \neq k)$,

$$x_k = \sum_{j=1}^n P_k x_j = P_k \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = P_k x \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

откуда, в частности, следует единственность представления x в форме (19).

Резюмируя, можно сказать, что подпространство $\tilde{\mathbf{H}}$ состоит из всех элементов x , допускающих представление в форме (19). $\tilde{\mathbf{H}}$ называется *ортogonalной суммой* подпространств $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n$ и обозначается

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{H}_n = \bigoplus_{k=1}^n \mathbf{H}_k.$$

4.7. Перейдем теперь к изучению разности и произведения проекторов.

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Пусть P_1 и P_2 — проекторы, проектирующие на подпространства $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ соответственно. Следующие четыре условия эквивалентны.

а) $P_1 \geq P_2$; б) $\mathbf{H}_1 \supset \mathbf{H}_2$; в) $P_1 P_2 = P_2$; д) $P_2 P_1 = P_2$.

Доказательство. Из а) следует б). Действительно, пусть $x \in \mathbf{H}$. Так как $P_1 x \perp x - P_1 x$, то

$$\|x\|^2 = \|P_1 x\|^2 + \|x - P_1 x\|^2. \quad (20)$$

Если $x \in \mathbf{H}_2$, то $P_2 x = x$ и $(P_2 x, x) = (x, x) = \|x\|^2$. Тем более

$$\|x\|^2 \geq \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, P_1 x) = (P_1 x, x) \geq (P_2 x, x) = \|x\|^2,$$

так что из (20) получаем $x = P_1 x$, что означает $x \in \mathbf{H}_1$.

Из б) вытекает в). Пусть $x \in \mathbf{H}$. Учитывая, что $P_2 x \in \mathbf{H}_2$ и, следовательно, $P_2 x \in \mathbf{H}_1$, имеем $P_1 P_2 x = P_2 x$.

Из в) вытекает д). Поскольку произведение самосопряженных операторов P_1 и P_2 есть проектор и, значит, самосопряженный оператор, P_1 и P_2 перестановочны: $P_2 P_1 = P_1 P_2 = P_2$.

Из д) вытекает а). В самом деле, для $x \in \mathbf{H}$

$$(P_2 x, x) = \|P_2 x\|^2 = \|P_2 P_1 x\|^2 \leq \|P_1 x\|^2 = (P_1 x, x).$$

Теорема 5 (4. V). Пусть P_1 и P_2 — проекторы. Для того чтобы $P = P_1 - P_2$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы $P_1 \geq P_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть P — проектор. Так как $P_1 = P + P_2$, то по предыдущей теореме $PP_2 = 0$, т. е. $(P_1 - P_2)P_2 = P_1P_2 - P_2 = 0$ и выполнен пункт с) леммы.

Достаточность. Очевидно, P — самосопряженный оператор. Далее по пунктам с) и d) леммы

$$P^2 = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P;$$

остается применить теорему 2 (3. III).

Обозначим через $\tilde{H}$ подпространство, на которое проектирует проектор P . Предоставляем читателю доказать, что $\tilde{H}$ состоит из всех элементов $x \in H_1$, ортогональных подпространству H_2 . Подпространство $\tilde{H}$ называется *ортогональным дополнением* подпространства H_2 в подпространстве H_1 и обозначается $\tilde{H} = H_1 \ominus H_2$.

Замечание. Если $P_1 = I$, то условие теоремы очевидно выполнено при любом P_2 . Таким образом, $P = I - P_2$ является проектором, каков бы ни был проектор P_2 . При этом P проектирует H на ортогональное дополнение $H \ominus H_2$ подпространства H_2 .

Докажем теорему, относящуюся к произведению проекторов.

Теорема 6 (4. V). Пусть P_1 и P_2 — проекторы. Чтобы оператор $P = P_1P_2$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы P_1 и P_2 были перестановочны.

Доказательство. Условие необходимо уже для того, чтобы P был самосопряженным оператором.

Достаточность условия проверяется опять с помощью теоремы 2 (3. III), если учесть, что P — самосопряженный оператор и

$$P^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P.$$

Предоставляем читателю проверить, что подпространство, на которое проектирует проектор P , есть в данном случае пересечение подпространств H_1 и H_2 .

4.8. Применение теоремы 1 к возрастающей (или убывающей) последовательности $\{P_n\}$ проекторов приводит к следующему важному факту.

Теорема 7 (4. V). Пусть $\{P_n\}$ — монотонная последовательность проекторов. Тогда для любого $x \in H$ существует

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x, \quad (21)$$

причем оператор P является проектором на подпространство $\tilde{H}$, где

$$\tilde{H} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n},$$

если последовательность $\{P_n\}$ возрастающая, и

$$\tilde{H} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n,$$

если эта последовательность убывающая. Здесь H_n означают подпространства, соответствующие проекторам P_n ($n = 1, 2, \dots$).

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ — возрастающая последовательность. Существование предела (21) следует из теоремы 1, так как $\|P_n\| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Докажем, что P есть проектор на $\tilde{H}$. Для этого достаточно проверить, что если $x \in \tilde{H}$,

то $Px = x$, а если $x \perp \tilde{H}$, то $Px = 0$. Обозначим $\mathcal{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ и

возьмем $x \in \mathcal{Q}$. Найдется m такое, что $x \in H_n$ ($n \geq m$). Это значит, что $P_n x = x$ ($n \geq m$), а тогда $Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$. Учитывая, что

$\tilde{H} = \overline{\mathcal{Q}}$, получим, что $Px = x$ и для $x \in \tilde{H}$. Пусть теперь $x \perp \tilde{H}$. Тогда тем более $x \perp H_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому $P_n x = 0$ и, переходя к пределу, получим $Px = 0$.

Сходные рассуждения приводят к цели и в случае, когда последовательность $\{P_n\}$ убывающая.

Замечание. Теорема остается верной, если вместо последовательности $\{P_n\}$ рассматривать семейство проекторов $\{P_\lambda\}$, зависящих от непрерывно меняющегося вещественного параметра.

Следствие. Пусть $\{P_k\}$ — совокупность попарно ортогональных проекторов. Тогда при любом $x \in H$ сходится ряд

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x, \quad (22)$$

и оператор P является проектором.

Действительно, надо применить доказанную теорему к возрастающей последовательности $\{P^{(n)}\}$ ($P^{(n)} = \sum_{k=1}^n P_k$; $n = 1, 2, \dots$) проекторов.

Предоставляем читателю проверить, что проектор P проектирует H на подпространство $\tilde{H}$, состоящее из всех элементов $x \in H$, которые допускают представление в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (x_k \in H_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty).$$

Подпространство $\tilde{H}$ называется *ортогональной суммой* (ср. 4.6) подпространств $H_1, H_2, \dots$ и обозначается

$$\tilde{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k.$$

ГЛАВА VI

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ

Для приложения общей теории большое значение имеет знание общей формы линейных функционалов в конкретных пространствах. Под общей формой линейных функционалов данного класса (чаще всего, а в дальнейшем исключительно, рассматривается класс всех линейных функционалов в данном пространстве) мы понимаем такое аналитическое выражение, содержащее различного рода параметры (числа, функции и т. д.), которое при фиксированных значениях параметров дает функционал из данного класса, причем получающимися при этом функционалами исчерпываются все рассматриваемые функционалы.

В этой главе указывается общая форма линейных функционалов в ряде рассмотренных выше конкретных пространств.

§ 1. Пространства последовательностей

1.1. Пусть X — некоторое нормированное пространство последовательностей. Будем предполагать X таким, что *орты*, т. е. последовательности

$$e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots) = \{\xi_k^{(n)}\} \quad \left(\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases} \right)$$

входят в X при любом $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, предположим, что если $x = \{\xi_k\} \in X$, то

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \quad (1)$$

Из всех рассмотренных выше примеров пространств последовательностей этим условиям (именно последнему) не удовлетворяют только пространства m и c (см. II. 4.1). В частности, эти условия соблюдены для пространств l^p ($p \geq 1$) и c_0 .

Пусть f — линейный функционал в X . Положим $\eta_k = f(e_k)$. Функционал f однозначно определяет последовательность чисел $\{\eta_k\}$.

При этом ввиду линейности функционала f из (1) вытекает

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \eta_k \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k. \quad (2)$$

Отсюда ясно, что функционал f не только определяет последовательность $\{\eta_k\}$, но и сам однозначно определяется ею.

Таким образом, общая форма функционала в пространстве X дается равенством (2), и в дальнейшем задача сводится к указанию тех необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять последовательность $\{\eta_k\}$, чтобы (2) давало линейный функционал в X .

Сопоставляя функционалу f последовательность $\{\eta_k\} = y$ и обозначая через Y множество всех таких последовательностей, мы без труда убеждаемся, что Y есть линейное множество, которое становится B -пространством, если положить $\|y\| = \|f\|$. (Ясно, что при таком определении нормы Y линейно изометрично X^*).

1.2. Рассмотрение конкретных пространств начнем с пространства l .

Теорема 1(1. VI). Для того чтобы (2) было линейным функционалом в пространстве l , необходимо и достаточно, чтобы последовательность $y = \{\eta_k\}$ была ограничена, т. е. чтобы $y \in m$. Норма функционала f при этом дается равенством.

$$\|f\| = \|y\|_m = \sup_k |\eta_k|.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $y = \{\eta_k\}$ такова, что (2) — линейный функционал в l . Тогда, так как $\|e_k\| = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), имеем

$$|\eta_k| = |f(e_k)| \leq \|f\|,$$

а потому и

$$\|y\|_m = \sup_k |\eta_k| \leq \|f\|. \quad (3)$$

Достаточность. Предположим, что $y = \{\eta_k\} \in m$. Тогда, ввиду того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ сходится ($x \in l$), а $|\eta_k| \leq \|y\|_m$, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k$, причем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \right| \leq \|y\|_m \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|y\|_m \|x\|. \quad (4)$$

Аддитивность функционала, определяемого соотношением (2), очевидна. Из (4) следует его ограниченность и неравенство $\|f\| \leq \|y\|_m$. Сопоставляя это с (3), найдем $\|f\| = \|y\|_m$, что и требовалось доказать.

Таким образом, пространство, о котором шла речь в конце 1.1, в данном случае является пространством $\mathbf{m}$. Отождествляя линейно изометричные пространства, можем сказать, что $\mathbf{l}^* = \mathbf{m}$.

1.3. Перейдем теперь к пространству $\mathbf{l}^p$ ($p > 1$).

Теорема 2 (I.VI). Для того чтобы (2) было линейным функционалом в $\mathbf{l}^p$ ($p > 1$), необходимо и достаточно, чтобы последовательность $y = \{\eta_k\} \in \mathbf{l}^q$, где q — сопряженный показатель ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). При этом

$$\|f\| = \|y\|_q.$$

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим элемент $\tilde{x} = \{\tilde{\xi}_k\} \in \mathbf{l}^p$, где

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} \operatorname{sgn} \eta_k & k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Тогда $f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q$. С другой стороны,

$$\|\tilde{x}\| = \left[\sum_{k=1}^n |\tilde{\xi}_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^{p(q-1)} \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Вследствие этих соотношений неравенство $|f(\tilde{x})| \leq \|f\| \|\tilde{x}\|$ принимает вид

$$\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \leq \|f\| \left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{p}}.$$

что можно переписать и так:

$$\left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Ввиду произвольности n в пределе получаем

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|, \quad (5)$$

т. е. $y \in \mathbf{l}^q$ и $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Достаточность. Пусть $y \in \mathbf{l}^q$. На основании неравенства Гёльдера (II.3.2.)

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right]^{\frac{1}{q}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} = \|y\|_q \|x\|. \quad (6)$$

Поскольку аддитивность функционала f очевидна, а ограниченность его устанавливается неравенством (6), f — линейный функционал. Из (6) следует $\|f\| \leq \|y\|_q$, что при сопоставлении с (5) дает $\|f\| = \|y\|_q$.

Теорема доказана.

С той же оговоркой, что и выше, мы можем сформулировать доказанную теорему так: $(l^p)^* = l^q$. В частности, $(l^p)^{**} = (l^q)^* = l^p$. Однако отсюда еще нельзя сделать заключения о рефлексивности пространства l^p , так как равенство $(l^p)^{**} = l^p$ понимается в смысле линейной изометрии, которая может и не быть того специального вида, который требуется в определении рефлексивности (см. V.1.3). Тем не менее можно утверждать, что l^p рефлексивно. Действительно, поскольку $(l^p)^*$ линейно изометрично l^q , то всякий функционал X в $(l^p)^*$ имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k,$$

где $\{\eta_k\}$ — последовательность из l^q , определяющая функционал f . Но если обозначить $x = \{\xi_k\} \in l^p$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k.$$

Таким образом,

$$X(f) = f(x) = X_x(f).$$

Следовательно, $X = X_x$, т. е. каждый функционал X в $(l^p)^*$ имеет вид X_x , а это и означает рефлексивность пространства l^p .

Отметим особо частный случай $p = 2$. Так как при этом и $q = 2$, то по доказанному пространство l^2 сопряжено самому себе. Общая форма линейного функционала в l^2 , таким образом, будет

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k, \quad (7)$$

где $y = \{\eta_k\} \in l^2$. Но правая часть (7) есть, по определению, скалярное произведение элементов x и y . Следовательно,

$$f(x) = (x, y),$$

т. е. скалярное произведение (x, y) при фиксированном $y \in l^2$ дает общую форму линейного функционала в l^2 .

Этот факт был уже установлен в общем виде для любого комплексного гильбертова пространства (см. III. 3.2.).

1.4. Рассмотрим теперь пространство c_0 (см. II. 4.1.) Докажем (с обычными оговорками), что $(c_0)^* = l^1$.

Теорема 3 (I. VI). Выражение (2) дает общую форму линейного функционала в c_0 при условии $y = \{\eta_k\} \in l$. При этом $\|f\| = \|y\|_1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tilde{x} = \{\tilde{\xi}_k\}$, где

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} \eta_k & k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Так как $\tilde{x} \in c_0$ и $\|\tilde{x}\| \leq 1$, то

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n |\eta_k| \leq \|f\|.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \leq \|f\|, \quad (8)$$

т. е. $y \in l$ и $\|y\|_1 \leq \|f\|$.

Достаточность. Если $y \in l$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \right| \leq \max_k |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \|y\|_1 \|x\|.$$

Отсюда обычным путем выводим, что f — линейный функционал и что $\|f\| \leq \|y\|_1$, а это ввиду (8) приводит к равенству $\|f\| = \|y\|_1$.

Поскольку сопряженное пространство всегда полное (см. V. 1.2.), из теорем 2 и 3 вновь вытекает полнота пространств l^p ($p \geq 1$), так как $l^p = (l^q)^*$ ($p > 1$) и $l = (c_0)^*$.

Хотя пространство c и не принадлежит к типу пространств, удовлетворяющих условию (1), некоторые дополнительные рассуждения позволяют установить общую форму линейного функционала в нем.

Рассмотрим в пространстве c элемент $e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Если $x = \{\xi_k\}$ произвольный элемент из c и $\xi_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$, то очевидно

$$x - \xi_0 e_0 \in c_0.$$

Пусть f — линейный функционал в c ; рассматривая его только на c_0 , мы получим там также линейный функционал f_0 . Пусть (для $x \in c_0$)

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad (y = \{\eta_k\} \in l).$$

Обозначив $\eta_0 = f(e_0)$, найдем для произвольного $x \in c$

$$f(x) = f(\xi_0 e_0) + f_0(x - \xi_0 e_0) = \eta_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (\xi_k - \xi_0).$$

Положив $\alpha = \eta_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$, получим окончательно

$$f(x) = \alpha \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k. \quad (9)$$

Предоставляем читателю доказать, что (9) дает общую форму линейного функционала в $\mathfrak{c}$ и что

$$\|f\| = |\alpha| + \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|.$$

Замечание. Как и в конечномерном случае (см. III.2.8.), если рассматриваемые пространства комплексные, то формулу (2) целесообразнее записывать в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k \xi_k,$$

принимая за u по-прежнему последовательность $\{\eta_k\}$. Доказательства теорем 1—3 для случая комплексных пространств проводятся по той же схеме с небольшими необходимыми изменениями.

По поводу содержания этого параграфа см. Банах-I.

§ 2. Пространства L_p^p

В этом параграфе мы установим общую форму линейного функционала в пространстве $L_p^p (1 \leq p < \infty)$ (см. II.5.1).

2.1. Докажем сначала лемму.

Лемма. Пусть $1 < q \leq 2$. Существует такая положительная постоянная c , что для всех вещественных u

$$|1 + u|^q \geq 1 + qu + c\theta(u), \quad (1)$$

где

$$\theta(u) = \begin{cases} |u|^2 & |u| < 1, \\ |u|^q & |u| \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Введем функцию

$$\chi(u) = |1 + u|^q - 1 - qu$$

и

$$\psi(u) = \frac{\chi(u)}{\theta(u)}.$$

Поскольку

$$\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^q - 1 - qu}{u^2} = \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2};$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(1+u)^q - 1 - qu}{|u|^q} = 1,$$

то существуют $\delta > 0$, $\Delta > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\psi(u) \geq c \text{ при } |u| \leq \delta \text{ или } |u| \geq \Delta. \quad (3)$$

Далее, имеем

$$\chi'(u) = q|1+u|^{q-1} \operatorname{sgn}(1+u) - q; \quad \chi''(u) = q(q-1)|1+u|^{q-2} \\ (u \neq -1).$$

Так как $\chi''(u) > 0$, а $\chi'(0) = 0$, то при $u = 0$ функция $\chi(u)$ имеет единственный минимум. Но $\chi(0) = 0$, так что при $\delta \leq |u| \leq \Delta$ будет $\chi(u) > 0$, и, следовательно, $\psi(u) > 0$ для указанных u . Уменьшая, если нужно, найденное выше c , можно считать, что

$$\psi(u) \geq c \quad (\delta \leq |u| \leq \Delta).$$

Сочетая это с (3), приходим к требуемому результату.

2.2. Рассмотрим пространство $L_T^p (1 \leq p < \infty)$. Мы докажем, что указанными в III.2.3. функционалами исчерпываются все линейные функционалы в L_T^p . При этом мы ограничимся случаем, когда множество T ограничено.

Теорема 1 (2. VI). *Каждый линейный функционал f в пространстве L_T^p определяется функцией $\varphi \in L_T^q$ (q — сопряженный показатель $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; если $p = 1$, то $q = \infty$ и $L^\infty = \bar{M}$) по формуле*

$$f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt \quad (x \in L_T^p).$$

(Ср. III. 2.3.).

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{mes} T = 1$.

Рассуждения проведем отдельно для случаев $p \geq 2$ и $p < 2$.

1) $2 \leq p < \infty$.

Пусть сначала T есть куб Q в n -мерном пространстве. Разделим Q на 2^{2^n} равных кубов $Q_k^{(n)}$, не имеющих общих внутренних точек, обозначим через $x_k^{(n)}$ характеристическую функцию множества $Q_k^{(n)}$, рассматриваемую на Q , и положим

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_k^{(n)}} f(x_k^{(n)}) = 2^{2^n} f(x_k^{(n)}) \quad (t \in Q_k^{(n)}; \quad k = 1, 2, \dots, 2^{2^n}; \\ n = 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$\int_Q \varphi_n(t) x_k^{(n)}(t) dt = \int_{Q_k^{(n)}} \varphi_n(t) x_k^{(n)}(t) dt = \\ = \frac{1}{\operatorname{mes} Q_k^{(n)}} f(x_k^{(n)}) \cdot \operatorname{mes} Q_k^{(n)} = f(x_k^{(n)}).$$

Следовательно, если $\bar{x}$ — функция, принимающая на множествах $Q_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, 2^{2^n}$) постоянные значения и потому являющаяся

линейной комбинацией функций $x_k^{(n)}$, так что $\bar{x} = \sum_{k=1}^{2^n n} c_k x_k^{(n)}$, то

$$f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{2^n n} c_k f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{2^n n} c_k \int_Q \varphi_n(t) x_k^{(n)}(t) dt = \int_Q \varphi_n(t) \bar{x}(t) dt. \quad (4)$$

Принимая, в частности,

$$\bar{x}(t) = \frac{|\varphi_n(t)|^q}{\varphi_n(t)} = |\varphi_n(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi_n(t),$$

будем иметь

$$\int_Q |\varphi_n(t)|^q dt = \int_Q \varphi_n(t) \bar{x}(t) dt = f(\bar{x}) \leq \|f\| \|\bar{x}\|. \quad (5)$$

А так как

$$\|\bar{x}\| = \left[\int_Q |\varphi_n(t)|^{p(q-1)} dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_Q |\varphi_n(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

то из (5) получим

$$\|\varphi_n\|_{L^q} = \left[\int_Q |\varphi_n(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|. \quad (6)$$

Докажем, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в себе в пространстве L^q . Считая $n \geq m$, заменим в неравенстве (1) леммы u на $\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)}$. Это приведет к соотношению

$$\left| \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_m(t)} \right|^q \geq 1 + q \frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} + c \theta \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right). \quad (7)$$

Умножим полученное неравенство на $|\varphi_m(t)|^q$ и проинтегрируем

$$\begin{aligned} \int_Q |\varphi_n(t)|^q dt &\geq \int_Q |\varphi_m(t)|^q dt + q \int_Q \frac{|\varphi_m(t)|^q}{\varphi_m(t)} [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)] dt + \\ &+ c \int_Q |\varphi_m(t)|^q \theta \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Докажем, что второй интеграл в правой части (8) равен нулю. Для этого отметим, что функция

$$\bar{x}(t) = \frac{|\varphi_m(t)|^q}{\varphi_m(t)}$$

принимает на множествах $Q_k^{(m)}$ и, тем более, на множествах $Q_k^{(n)}$ постоянные значения, а потому в силу (4)

$$\int_Q \frac{|\varphi_m(t)|^q}{\varphi_m(t)} [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)] dt = \int_Q \varphi_n(t) \bar{x}(t) dt - \int_Q \varphi_m(t) \bar{x}(t) dt = \\ = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0.$$

Учитывая сказанное, заключаем на основании (8), что последовательность $\left\{ \int_Q |\varphi_n(t)|^q dt \right\}$ — возрастающая, а так как она в силу (6) ограничена, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q |\varphi_n(t)|^q dt < \infty$. Переписывая (8)

в форме

$$\int_Q |\varphi_n(t)|^q dt - \int_Q |\varphi_m(t)|^q dt \geq c \int_Q |\varphi_m(t)|^q dt \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right) dt, \quad (9)$$

получим отсюда, что

$$\int_Q |\varphi_m(t)|^q dt \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right) dt \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \quad (10)$$

Обозначим через $e'_{m, n}$ и $e''_{m, n}$ множества тех $t \in Q$, для которых соответственно

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \geq |\varphi_m(t)|; \quad |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < |\varphi_m(t)|.$$

Имея в виду определение функции θ (см. (2)), можем записать интеграл из (10) в форме *)

$$\int |\varphi_m(t)|^q \theta \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right) dt = \int_{e'_{m, n}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt + \\ + \int_{e''_{m, n}} |\varphi_m(t)|^{q-2} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt,$$

*) Предыдущие рассуждения, строго говоря, необоснованы, если $\varphi_m(t)$ обращается в нуль, так как интеграл в правой части (9) не имеет при этом смысла. Но, поскольку множество e_0 тех $t \in Q$, для которых $\varphi_m(t) = 0$, содержится в $e'_{m, n}$, естественно условиться считать

$$\int_{e_j} |\varphi_m(t)| \theta \left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi_m(t)}{\varphi_m(t)} \right) dt = \int_{e_0} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt = \int_{e_0} |\varphi_n(t)|^q dt.$$

Так как неравенство (9) сохраняется, если интегрирование производить по множеству $Q \setminus e_0$, а для интегралов по e_0 оно выполнено в силу сделанного соглашения, то указанное рассуждение обосновывает приведенный в тексте вывод и для рассмотренного особого случая.

При $n, m \rightarrow \infty$ оба интеграла в правой части в силу (10) стремятся к нулю. С другой стороны, принимая во внимание, что на множестве $e''_{m,n}$ имеет место неравенство $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < |\varphi_m(t)|$, получаем, используя неравенство Буняковского,

$$\begin{aligned} \int_{e''_{m,n}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt &\leq \int_{e''_{m,n}} |\varphi_m(t)|^{q-1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| dt = \\ &= \int_{e''_{m,n}} [|\varphi_m(t)|^{\frac{q}{2}-1} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|] |\varphi_m(t)|^{\frac{q}{2}} dt \leq \\ &\leq \left[\int_{e''_{m,n}} |\varphi_m(t)|^{q-2} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{e''_{m,n}} |\varphi_m(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

т. е. ввиду стремления к нулю первого множителя и ограниченности второго

$$\int_{e''_{m,n}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, и

$$\int_Q |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt = \int_{e'_{m,n}} + \int_{e''_{m,n}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^q dt \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

и сходимость в себе последовательности $\{\varphi_n\}$ доказана.

Так как пространство L^q полное, существует $\varphi \in L^q$, к которой сходится (в L^q) последовательность $\{\varphi_n\}$.

Обозначим через f_n , соответственно через f' , функционал в L^q , определяемый согласно III.2.3. функцией φ_n , соответственно φ , т. е.

$$f_n(x) = \int_Q \varphi_n(t) x(t) dt, \quad f'(x) = \int_Q \varphi(t) x(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots; x \in L^p).$$

Так как $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в L^q , то опять на основании III.2.3

$$\|f_n - f'\| = \|\varphi_n - \varphi\|_{L^q} \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$|f_n(x) - f'(x)| \leq \|f_n - f'\| \|x\| \rightarrow 0 \quad (x \in L^p).$$

Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in L^p). \quad (11)$$

Вместе с тем, если $\bar{x}$ — функция, принимающая постоянные значения на множествах $Q_m^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, 2^m$), то в силу (4) для $n \geq m$

$$f(x) = \int_Q \varphi_n(t) \bar{x}(t) dt = f_n(\bar{x}),$$

что вместе с (11) дает

$$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}).$$

Поскольку диаметры множеств $Q_k^{(m)}$ стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, функции $\bar{x}$ указанного вида образуют плотное в множестве непрерывных функций множество, и тем самым множество, плотное в L^p . В силу IV.1.2 функционалы f и f' , совпадая на плотном множестве, совпадают и во всем L^p , т. е.

$$f(x) = f'(x) = \int_Q \varphi(t) x(t) dt \quad (x \in L^p).$$

Пусть теперь T — произвольное измеримое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^n ; пусть Q — куб в R^n , содержащий T . Если доопределить каждую функцию $x \in L_T^p$, полагая ее равной нулю вне T , то пространство L_T^p можно будет считать подпространством пространства L_Q^p .

Функционал f в L_T^p можно на основании теоремы 1 (2. IV) распространить на пространство L_Q^p (с сохранением нормы). Используя для распространенного функционала то же обозначение f , будем иметь согласно доказанному

$$f(x) = \int_Q \varphi(t) x(t) dt \quad (x \in L_Q^p), \quad (12)$$

где $\varphi \in L_Q^p$. В частности, если $x \in L_T^p$, то, учитывая, что вне T функция x равна нулю, получаем из (12)

$$f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt.$$

Остается заметить, что функция φ , рассматриваемая лишь на T , является элементом пространства L_T^q , так как

$$\int_T |\varphi(t)|^q dt \leq \int_Q |\varphi(t)|^q dt < \infty.$$

2) Рассмотрим случай, когда $1 \leq p < 2$. Каждый элемент $x \in L_T^p$ можно рассматривать и как элемент L^2 . При этом, как указано

в II.5.1, $\|x\|_{L^p} \leq \|x\|_{L^1}$. Рассматривая данный функционал f только на элементах из L^2 , будем иметь в силу сказанного

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|_{L^p} \leq \|f\| \|x\|_{L^1},$$

т. е. f является линейным функционалом и в L^2 . По доказанному

$$f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt \quad (x \in L^2), \quad (13)$$

где φ — суммируемая с квадратом функция.

Докажем, что $\varphi \in L^q$ и что (13) имеет место для $x \in L^p$. Рассмотрим прежде случай $p > 1$. Положим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & |\varphi(t)| \leq n \\ n & |\varphi(t)| > n \end{cases}; \quad x_n(t) = |\varphi_n(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi(t) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как $x_n(t)$ — ограниченная функция, то применима формула (13)

$$f(x_n) = \int_T \varphi(t) x_n(t) dt = \int_T \varphi(t) |\varphi_n(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi(t) dt \geq \int_T |\varphi_n(t)|^q dt.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leq \|f\| \|x_n\| = \|f\| \left[\int_T |\varphi_n(t)|^{p(q-1)} dt \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f\| \left[\int_T |\varphi_n(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

так что

$$\int_T |\varphi_n(t)|^q dt \leq \|f\| \left[\int_T |\varphi_n(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\left[\int_T |\varphi_n(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\| \varphi \|_{L^q} = \left[\int_T |\varphi(t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

т. е. $\varphi \in L^q$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in L^p$. Его можно аппроксимировать в L^p последовательностью $\{\tilde{x}_n\}$ элементов из L^2 . Так как

$$f(\tilde{x}_n) = \int_T \varphi(t) \tilde{x}_n(t) dt, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то переход к пределу при $n \rightarrow \infty$, возможность которого обосновывается как и выше, дает

$$f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt.$$

Пусть, наконец, $p = 1$. Обозначим через e_n множество тех $t \in T$, для которых $|\varphi(t)| \geq n$. Положим в (13) x равным $\tilde{x}_n$, где

$$\tilde{x}_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \varphi(t) & t \in e_n, \\ 0 & t \notin e_n, \end{cases}$$

$$f(\tilde{x}_n) = \int_T \varphi(t) \tilde{x}_n(t) dt = \int_{e_n} |\varphi(t)| dt \geq n \cdot \operatorname{mes} e_n.$$

С другой стороны,

$$f(\tilde{x}_n) \leq \|f\| \|\tilde{x}_n\| = \|f\| \operatorname{mes} e_n.$$

Таким образом,

$$n \operatorname{mes} e_n \leq \|f\| \operatorname{mes} e_n.$$

Отсюда следует, что при $n > \|f\|$ будет $\operatorname{mes} e_n = 0$, т. е. $\varphi(t)$ ограничена почти везде; $\varphi \in L^\infty$.

Равенство (13) распространяется на все $x \in L$ обычным приемом. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Для осуществления второй части доказательства можно было бы использовать теорему 1 (3. III) об общей форме линейного функционала в гильбертовом пространстве, применив ее к пространству L^2 .

2.3. Объединяя результаты теоремы 1 с фактами, установленными в III. 2.3, получаем, что общая форма линейного функционала в пространстве L_T^p ($1 \leq p < \infty$; T — ограниченное множество) дается равенством

$$f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt,$$

где φ — произвольный элемент из L_T^q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*) При этом

$$\|f\| = \|\varphi\|_{L^q}.$$

Сопоставляя функционалу f порождающую его функцию φ , мы можем утверждать, что пространство $(L^p)^*$ линейных функционалов в L^p линейно изометрично пространству L^q или, отождествляя сопоставляемые элементы: $(L_T^p)^* = L^q$.

*) Если $p = 1$, то $q = \infty$ и $L^\infty = \tilde{M}$ (ср. II. §. 4).

Если $p > 1$

$$(L_T^p)^{**} = (L_T^q)^* = L_T^p.$$

Хотя отсюда еще не следует рефлексивность пространства L_T^p , ее можно установить, рассуждая так же, как в § 1 для случая пространств l^p ($p > 1$).

Предоставляем читателю доказать, что (14) является общей формой функционала в L_T^p и в случае, когда T неограничено, а также перенести этот результат на комплексные пространства, используя вещественный случай. *)

Общая форма линейного функционала в пространстве L^p указана для $p > 1$ Ф. Риссом, а для $p = 1$ — Штейнхаусом ([97в] и [124] соответственно). Доказательство теоремы 1, приведенное выше, заимствует идею рассуждения, использованного по другому поводу в книге Р и с с и С ё к е ф а л ь в и Н а д ь.

Любопытно отметить, что при $p < 1$ в L^p нет непрерывных аддитивных функционалов [42].

§ 3. Общая форма линейного функционала в пространстве С

3.1. В формулировке основного результата этого параграфа — теоремы об общей форме линейного функционала в пространстве С — существенную роль играет понятие функции ограниченной вариации. Поэтому мы предварительно дополним те сведения о них, которые были даны в гл. II (§ 6).

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ возрастающую функцию $\varphi(t)$. Пусть $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ — произвольная система точек. Возьмем t'_k и t''_k так, что $a < t'_1 < t_1 < t'_1 < t'_2 < t_2 < t''_2 < \dots < t''_n < b$. Очевидно имеем

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(t''_k) - \varphi(t'_k)] \leq \varphi(b) - \varphi(a)$$

и, устремляя здесь $t'_k \rightarrow t_k - 0$, а $t''_k \rightarrow t_k + 0$, получим в пределе

$$\sum_{k=1}^n [\varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0)] \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Отсюда следует, что монотонная функция может иметь только конечное число разрывов, скачок в которых превышает заданное ε . Следовательно, множество всех точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

Поскольку всякая функция ограниченной вариации представима в форме разности двух возрастающих функций, отмеченное обстоятельство имеет место и для функции ограниченной вариации.

*) Лемма не переносится на комплексный случай, поэтому приведенное доказательство теоремы 1 верно лишь для вещественных пространств.

Из сказанного вытекает, что множество точек непрерывности функции ограниченной вариации плотно в промежутке $[a, b]$.

Пусть $g(t)$ — функция ограниченной вариации. Рассмотрим функцию $\tilde{g}(t)$, определенную равенством:

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)] \quad (a < t < b),$$

$$\tilde{g}(b) = g(b), \quad \tilde{g}(a) = g(a);$$

Таким образом, функция $\tilde{g}(t)$ совпадает с $g(t)$ в точках непрерывности последней и при $t = a, b$. Функцию $\tilde{g}(t)$ мы будем называть *исправленной*.

Нетрудно видеть, что исправленная функция имеет наименьшую полную вариацию по сравнению со всеми функциями, отличающимися от $g(t)$ только во внутренних точках разрыва. *)

Если функция $g(t)$ совпадает со своей исправленной, то мы будем называть ее *правильной*. Множество всех правильных функций, обращающихся в нуль при $t = a$, обозначим V_0 . Ясно, что V_0 является линейным множеством пространства V всех функций ограниченной вариации. Легко проверить, что это замкнутое множество. Таким образом, V_0 , являясь подпространством B -пространства V , само есть B -пространство.

Предыдущие рассмотрения относились к точкам разрыва функции ограниченной вариации. Установим один факт, относящийся к точкам непрерывности.

Пусть $g(t)$ — функция ограниченной вариации. Обозначим через $v(t)$ ее полную вариацию в промежутке $[a, t]$

$$v(t) = \tilde{V}_a^t(g).$$

Пусть $a < c \leq b$. Здавъ произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое разбиение промежутка $[a, c]$ на части $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = c$, чтобы

$$\tilde{V}_a^c(g) = v(c) < \sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| + \varepsilon.$$

Если добавить к точкам деления еще одну точку t , лежащую между t_{n-1} и $t_n = c$, то сумма в правой части последнего неравенства от этого может только возрасти, и мы будем иметь

$$v(c) < |g(c) - g(t)| + \sum_{k=1}^{n-1} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t) - g(t_{n-1})| + \varepsilon. \quad (1)$$

*) Этим свойством обладают все функции, значения которых в точках разрыва лежат между предельными значениями справа и слева.

Но

$$\sum_{k=1}^{n-1} |g(t_k) - g(t_{k-1})| + |g(t) - g(t_{n-1})| \leq \bar{V}_a^t(g) = v(t),$$

так что из (1) получаем

$$v(c) - v(t) < |g(c) - g(t)| + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу сначала при $t \rightarrow c - 0$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем

$$v(c) - v(c - 0) \leq |g(c) - g(c - 0)|.$$

Отсюда следует, что если $g(t)$ непрерывна слева при $t = c$, то и $v(t)$ будет непрерывна слева в этой точке. Аналогичными рассуждениями доказывается и факт, относящийся к непрерывности справа. Таким образом, если $g(t)$ непрерывна при $t = c$, то при $t = c$ будет непрерывна и $v(t)$.

3.2. Одно из основных применений понятие функции ограниченной вариации находит при определении так называемого интеграла Стильеса (см. Фихтенгольц, т. III).

Пусть в промежутке $[a, b]$ заданы непрерывная функция $x(t)$ и функция ограниченной вариации $g(t)$. Рассмотрим произвольное разбиение τ промежутка $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

и образуем сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{j=1}^n x(\xi_j) [g(t_j) - g(t_{j-1})] \quad (t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

При $\lambda_\tau = \max_j [t_j - t_{j-1}] \rightarrow 0$ суммы σ_τ имеют предел, не зависящий ни от способа дробления, ни от выбора точек ξ_j .

Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$, если $|t' - t''| < \delta$. Предположим, что разбиение τ таково, что $\lambda_\tau < \delta$, и рассмотрим еще одно разбиение τ'

$$a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = b,$$

также удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau'} < \delta$. Объединяя точки деления обоих подразделений, получим третье разбиение τ'' ($a = t''_0 < t''_1 < \dots < t''_s = b$).

Сравним σ_τ и $\sigma_{\tau''}$. Разность $\sigma_{\tau''} - \sigma_\tau$ может быть разбита на слагаемые вида

$$\gamma_j = \sum x(\xi''_k) [g(t''_k) - g(t''_{k-1})] - x(\xi_j) [g(t_j) - g(t_{j-1})] \\ (j = 1, 2, \dots, n),$$

где сумма распространяется на все частичные промежутки $[t''_{k-1}, t''_k]$ подразделения τ'' , попавшие в один частичный промежуток $[t_{j-1}, t_j]$ подразделения τ .

Преобразуем написанное выражение. Имеем

$$\gamma_j = \sum [x(\xi''_k) - x(\xi_j)] [g(t''_k) - g(t''_{k-1})] \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Так как точки ξ''_k и ξ_j находятся в промежутке $[t_{j-1}, t_j]$, длина которого не превосходит $\lambda_\tau < \delta$, то $|x(\xi''_k) - x(\xi_j)| < \varepsilon$, и, следовательно,

$$|\gamma_j| < \varepsilon \sum |g(t''_k) - g(t''_{k-1})| \leq \varepsilon \overset{t_j}{\underset{t_{j-1}}{V}}(g) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Окончательно

$$|\sigma_{\tau''} - \sigma_\tau| \leq \sum_{j=1}^n |\gamma_j| < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Равным образом

$$|\sigma_{\tau''} - \sigma_{\tau'}| < \varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

так что

$$|\sigma_\tau - \sigma_{\tau'}| < 2\varepsilon \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Существование предела $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau$ устанавливается теперь при помощи принципа сходимости Коши. Этот предел называется интегралом Стильтьеса функции $x(t)$ по функции $g(t)$ и обозначается символом

$$\int_a^b x(t) dg(t).$$

Укажем на некоторые свойства интеграла Стильтьеса, большая часть которых вытекает непосредственно из определения

$$1^\circ. \int_a^b [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] dg(t) = \alpha \int_a^b x_1(t) dg(t) + \beta \int_a^b x_2(t) dg(t).$$

$$2^\circ. \int_a^b x(t) d[\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)] = \alpha \int_a^b x(t) dg_1(t) + \beta \int_a^b x(t) dg_2(t).$$

$$3^\circ. \int_a^b x(t) dg(t) = \int_a^c x(t) dg(t) + \int_c^b x(t) dg(t) \quad (a < c < b).$$

4°. Если $g(t)$ — ступенчатая функция, имеющая скачки в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ величиной $\delta_k = g(t_k + 0) - g(t_k - 0)$, то

$$\int_a^b x(t) dg(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k) \delta_k. \quad (2)$$

5°. Если $g(t)$ — неопределенный интеграл (см. II.6.4), то

$$\int_a^b x(t) dg(t) = \int_a^b x(t) \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ — обобщенная производная функции $g(t)$, и интеграл в правой части понимается в смысле Лебега.

В частности, если $g(t)$ имеет непрерывную производную, то формула имеет место с $\varphi(t) = g'(t)$.

6°. Справедлива оценка

$$\left| \int_a^b x(t) dg(t) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \overset{b}{V}_a(g). \quad (3)$$

В самом деле, для интегральной суммы

$$\begin{aligned} |\sigma_\tau| &= \left| \sum_{j=1}^n x(\xi_j) [g(t_j) - g(t_{j-1})] \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \sum_{j=1}^n |g(t_j) - g(t_{j-1})| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \overset{b}{V}_a(g). \end{aligned}$$

Переходя к пределу, получаем (3).

7°. Если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — функции ограниченной вариации, отличающиеся разве лишь во внутренних точках разрыва этих функций, то

$$\int_a^b x(t) dg_1(t) = \int_a^b x(t) dg_2(t).$$

8°. Если $\int_a^b x(t) dg(t) = 0$, какова бы ни была непрерывная функция $x(t)$, то $g(t)$ совпадает с $g(a)$ всюду, за исключением внутренних точек разрыва функции $g(t)$.

Остановимся на доказательстве двух последних предложений, которые нами будут использованы ниже.

Справедливость 7° вытекает из того замечания, что предел интегральных сумм не зависит от способа подразделения промежутка $[a, b]$. Таким образом, мы можем брать в качестве внутренних точек деления только точки непрерывности обеих функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$ (множество точек такого рода плотно в промежутке $[a, b]$). Но для

таких подразделений интегральные суммы для обоих интегралов совпадают, следовательно, совпадают и сами интегралы.

Для доказательства 8° рассмотрим некоторую внутреннюю точку непрерывности c и определим непрерывную функцию $x_n(t)$, полагая ее равной единице для $t \leq c$, нулю для $t \geq c + \frac{1}{n}$ и считая линейной в промежутке $\left[c, c + \frac{1}{n}\right]$. По условию имеем

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b x_n(t) dg(t) &= \int_a^c x_n(t) dg(t) + \int_c^{c+\frac{1}{n}} x_n(t) dg(t) + \\ &+ \int_{c+\frac{1}{n}}^b x_n(t) dg(t) = g(c) - g(a) + \int_c^{c+\frac{1}{n}} x_n(t) dg(t), \end{aligned}$$

откуда в силу 6°

$$|g(c) - g(a)| \leq \bigvee_c^{c+\frac{1}{n}}(g) = v\left(c + \frac{1}{n}\right) - v(c), \quad (4)$$

где, как и раньше, $v(t) = \bigvee_a^t(g)$. Поскольку $v(t)$ непрерывна при $t=c$ (см. 3.1), из (4) получаем $g(c) - g(a) = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что $g(b) = g(a)$ (в качестве $x(t)$ берем функцию, тождественно равную единице на $[a, b]$).

Функции ограниченной вариации будут интересовать нас только с точки зрения образования интеграла Стильеса, поэтому ввиду 7° мы можем не различать двух функций, если они совпадают во всех точках непрерывности и при $t=a, b$. В качестве представителя таких функций естественно выбрать правильную функцию, у которой значения во внутренних точках разрыва определенным образом связаны с предельными значениями слева и справа, — равны их полусумме.

Далее, прибавление к $g(t)$ произвольной постоянной не меняет, очевидно, величины интеграла, в связи с чем мы можем ограничиться рассмотрением только таких функций, у которых $g(a) = 0$. Поэтому впредь, говоря о данной функции ограниченной вариации, мы всегда будем предполагать, что она принадлежит классу V_0 .

3.3. В III.2.1. и III.2.2. были указаны примеры линейных функционалов в пространстве C :

$$f(x) = x(t_0) \quad (x \in C), \quad (5)$$

или, более общо,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k) \quad (x \in C) \quad (6)$$

и, представимый в виде интеграла

$$f(x) = \int_a^b x(t) \varphi(t) dt \quad (x \in C) \quad (7)$$

(φ — суммируемая функция).

Функционал вида (7) не может быть представлен в форме (6), если не считать тривиальный случай, когда $\varphi = 0$. Равным образом, за этим же исключением, функционал (6) не получается из (7) ни при каком выборе суммируемой функции φ .

Таким образом, в отличие от пространств L^p интегральная формула (7) не исчерпывает всех линейных функционалов в C . Однако формулы (6) и (7) можно включить в одну, более общую, если использовать интеграл Стильеса. *)

Теорема (I. 3. VI). **) *Общая форма линейного функционала в пространстве C дается интегралом Стильеса*

$$f(x) = \int_a^b x(t) dg(t), \quad (8)$$

где $g(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации. Если при этом $g(t)$ правильная функция, то

$$\|f\| = \bigvee_a^b(g).$$

Функционал f определяет функцию $g \in V_0$ однозначно.

Доказательство. То, что (8) является линейным функционалом в C , следует из 1° и 6° (3.2). При этом из 6° получаем оценку

$$\|f\| \leq \bigvee_a^b(g). \quad (9)$$

Докажем теперь, что всякий линейный функционал f представим в виде (8).

Так как C является подпространством пространства $M = M_{[a, b]}$ всех ограниченных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, то функционал f можно распространить на M с сохранением нормы.

*) Не следует думать, что общую форму функционала в C можно получить комбинацией выражений (6) и (7).

**) Впервые доказана Ф. Риссом [97в].

Оставляя для распространенного функционала то же обозначение f , введем функцию

$$g(\tau) = f(x_\tau),$$

где

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \quad (\tau > a; \quad x_a(t) = 0)$$

Покажем, что функция $g(\tau)$ — ограниченной вариации. Возьмем произвольное подразделение

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b. \quad (10)$$

и, обозначив $\theta_k = \operatorname{sgn} [g(t_k) - g(t_{k-1})]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^n \theta_k [g(t_k) - g(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^n \theta_k f(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) = \\ &= f\left(\sum_{k=1}^n \theta_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})\right) \leq \|f\| \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \right\|. \end{aligned}$$

Но функция $\sum_{k=1}^n \theta_k [x_{t_k}(t) - x_{t_{k-1}}(t)]$ принимает только три значения: $-1, 0, 1$ (в промежутке $(t_{k-1}, t_k]$ значение этой функции равно θ_k), поэтому

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \right\| = \max_k |\theta_k| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq \|f\|,$$

и ввиду произвольности подразделения (10)

$$\bigvee_a^b (g) \leq \|f\|. \quad (11)$$

Пусть $x(t)$ — непрерывная функция. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ такое, что $|x(t'') - x(t')| < \varepsilon$, как только $|t'' - t'| < \delta$. Возьмем подразделение (10) так, чтобы $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, и рассмотрим ступенчатую функцию

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k) [x_{t_k}(t) - x_{t_{k-1}}(t)],$$

принимаящую в промежутке $(t_{k-1}, t_k]$ значение $x(t_k)$ ($\tilde{x}(a) = x(t_1)$).

Если $a < t \leq b$, то $t_{k-1} < t \leq t_k$ при некотором $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = |x(t) - x(t_k)| < \varepsilon;$$

для $t = a$ это неравенство также соблюдено, так как

$$|x(a) - \tilde{x}(a)| = |x(t_0) - x(t_1)| < \varepsilon,$$

Таким образом, $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$.

Подсчитаем значение функционала f на элементе $\tilde{x}$. Имеем

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^n x(t_k) [f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}})] = \sum_{k=1}^n x(t_k) [g(t_k) - g(t_{k-1})],$$

т. е. $f(\tilde{x})$ есть интегральная сумма для интеграла

$$\int_a^b x(t) dg(t),$$

отвечающая подразделению (10). Поэтому если δ взять достаточно малым, можно добиться того, что

$$|f(\tilde{x}) - \int_a^b x(t) dg(t)| < \varepsilon.$$

Но

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \|f\| \|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon,$$

откуда

$$|f(x) - \int_a^b x(t) dg(t)| < \varepsilon(1 + \|f\|).$$

Принимая во внимание произвольность ε , приходим к равенству (8).

Если теперь обозначить через $\tilde{g}(t)$ исправленную функцию, то при замене $g(t)$ на $\tilde{g}(t)$ интеграл (8) не изменится. Кроме того, согласно замечанию, сделанному в 3.1, $\mathbf{V}_a^b(\tilde{g}) \leq \mathbf{V}_a^b(g)$ и, стало быть, из (11) вытекает

$$\mathbf{V}_a^b(\tilde{g}) \leq \|f\|.$$

Сравнивая это с (9), получим

$$\mathbf{V}_a^b(\tilde{g}) = \|f\|.$$

Пусть теперь $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — две функции ограниченной вариации, принадлежащие множеству V_0 . Если порожденные ими функционалы в пространстве C совпадают, то

$$\int_a^b x(t) d[g_2(t) - g_1(t)] = 0 \quad (x \in C),$$

а тогда на основании 8° (3.2) разность $g_0(t) = g_2(t) - g_1(t)$ могла бы быть отлична от нуля только во внутренних точках разрыва функции $g_0(t)$, что, однако, невозможно, поскольку $g_0(t)$ правильная.

Теорема полностью доказана.

Доказанную теорему можно сформулировать так: $C^* = V_0$. Отсюда, между прочим, вытекает полнота пространства V_0 , о которой упоминалось без доказательства в 3.1.

Как уже фактически отмечалось в начале, функционалы вида (6) и (7) получаются из общей формы в случае: функционал (6) — когда $g(t)$ ступенчатая функция (5°); функционал (7) — когда $g(t)$ неопределенный интеграл (6°).

3.4. Рассмотрим более общий случай пространства C_T , где T — параллелепипед конечномерного евклидова пространства. Общая форма линейного функционала здесь также дается с помощью интеграла, подобного интегралу Стильтеса.

Сопоставляя каждому параллелепипеду $P \subset T$ число $\Phi(P)$, мы получаем функцию параллелепипеда. Пусть произвольный параллелепипед P представлен в форме суммы параллелепипедов $P_1, P_2, \dots, P_n$, не имеющих попарно общих точек; если

$$\Phi(P) = \Phi(P_1) + \Phi(P_2) + \dots + \Phi(P_n),$$

каковы бы ни были $P, P_1, P_2, \dots, P_n$, то функция Φ называется *аддитивной*.

Рассмотрим разбиение параллелепипеда T на параллелепипеды $P_1, P_2, \dots, P_n$ без общих точек:

$$T = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n. \quad (12)$$

Если для всех таких подразделений суммы

$$\sum_{k=1}^n |\Phi(P_k)| \quad (13)$$

ограничены, то говорят, что функция Φ *ограниченной вариации*, а точную верхнюю границу сумм (13) называют *полной вариацией* функции Φ и обозначают $\bar{\Phi}(T)$.

Нетрудно доказать (см. ниже § 4), что аддитивная и ограниченной вариации функция параллелепипеда может быть представлена в форме разности неотрицательных функций:

$$\Phi(P) = \Phi_1(P) - \Phi_2(P) \quad (\Phi_1(P), \Phi_2(P) \geq 0), \quad (14)$$

Исходя из непрерывной функции $x(t)$, заданной на T , и аддитивной ограниченной вариации функции параллелепипеда Φ , можно построить инте-

грал, обобщающий интеграл Стильеса. Для этого с подразделением (12) параллелепипеда T свяжем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Phi(P_k) \quad (\xi_k \in P_k; k = 1, 2, \dots, n).$$

Как и для одномерного интеграла Стильеса можно доказать, что существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$, где λ означает наибольший из диаметров параллелепипедов P_k , причем этот предел не зависит от выбора точек ξ_k и от способа подразделения. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ называют *интегралом Стильеса — Гюнтера* и обозначают символом

$$\int_T x(t) d\Phi(P).$$

Интеграл Стильеса включается в эту схему как частный случай, если положить

$$\Phi(\langle \alpha, \beta \rangle) = g(\beta) - g(\alpha) \quad (\langle \alpha, \beta \rangle \subset [a, b]). *$$

Свойства 1° — 3° интеграла Стильеса (3.2) легко проверяются и для интеграла Стильеса — Гюнтера. В частности,

$$\left| \int_T x(t) d\Phi(P) \right| \leq \max_{t \in T} |x(t)| \bar{\Phi}(T).$$

Отсюда следует, что выражение

$$f(x) = \int_T x(t) d\Phi(P) \quad (15)$$

определяет линейный функционал в пространстве C_T .

Рассуждая, как и в 3.3 для одномерного случая, можно установить, что (15) является общей формой линейного функционала в пространстве C_T . При этом функцию параллелепипеда Φ можно всегда выбрать так, что

$$\|f\| = \bar{\Phi}(T).$$

Из других соображений этот результат будет получен в § 4.

3.5. Укажем некоторые применения теоремы об общей форме линейного функционала в пространстве C .

Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является сходимостью по норме в пространстве C . Выясним, как можно в терминах, относящихся к пространству C , охарактеризовать точечную сходимость. Пусть имеется ограниченная последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ и непрерывная функция $x_0(t)$. Для того, чтобы при каждом $t \in [a, b]$ было

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t), \quad (16)$$

*) Под $\langle \alpha, \beta \rangle$ можно понимать любой из четырех промежутков $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ и (α, β) .

достаточно, чтобы, каков бы ни был линейный функционал f в пространстве C ,

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0). \quad (17)$$

В самом деле, введя функционал f_t :

$$f_t(x) = x(t),$$

получим

$$x_n(t) = f_t(x_n) \longrightarrow f_t(x_0) = x_0(t).$$

В главе VIII будет доказано, что условие (17) также необходимо (теорема 3 (2.VIII)).

3.6. Более существенным является применение теоремы об общей форме линейного функционала в пространстве C к так называемой проблеме моментов.

Пусть в нормированном пространстве X дана последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых элементов. Взяв произвольный линейный функционал f в X , образуем числовую последовательность

$$f(x_n) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (18)$$

Проблемой моментов в широком смысле слова называют задачу нахождения функционала f по последовательности $\{\mu_n\}$. При такой общей постановке вопроса его решение не может быть далеко продвинуто. Однако и в общем случае все же можно высказать некоторые условия разрешимости и единственности решения проблемы моментов.

Если система $\{x_n\}$ полная, то в силу сказанного в IV.2.4 она будет и фундаментальной; следовательно, функционал f (в предположении, что он существует) единственным образом определяется последовательностью $\{\mu_n\}$. Нетрудно видеть, что полнота системы $\{x_n\}$ является также и необходимым условием единственности решения проблемы моментов.

Далее, если обозначить через φ функционал (неаддитивный), определенный на множестве $\{x_n\}$

$$\varphi(x_n) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (19)$$

то, поскольку существование функционала f означает возможность линейного распространения φ на линейную оболочку $\mathcal{L}(\{x_n\})$, вследствие теоремы 1 (1. IV) получаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы моментов является наличие такой постоянной $M > 0$, что для любых $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right\| \quad (20)$$

или, иначе

$$\sup \frac{\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right|}{\left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k \right\|} < \infty, \quad (21)$$

где супремум берется по всевозможным $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$).

Из всего многообразия конкретных проблем моментов мы рассмотрим только *степенную проблему моментов*, когда $X = C$ и

$$x_n(t) = t^n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (22)$$

Принимая во внимание общую форму линейного функционала в пространстве С, можно сформулировать задачу в рассматриваемом случае так: определить, при каких условиях существует функция ограниченной вариации $g(t)$ такая, что

$$\int_a^b t^n dg(t) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \dots). *) \quad (23)$$

Отметим, что, поскольку в данном случае система $\{x_n\}$ полна в пространстве С, решение проблемы моментов, если оно вообще существует, единственно.

Условие (21) разрешимости проблемы моментов (23) может быть записано в следующей форме:

$$\sup \frac{\left| \sum_{k=0}^n \lambda_k \mu_k \right|}{\max_{a \leq t \leq b} \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k t^k \right|} < \infty. \quad (24)$$

Приведем, наконец, один более конкретный результат, относящийся к степенной проблеме моментов в промежутке $[0, 1]$ (см [1156]).

Теорема 2 (3. VI) (Хаусдорф). *Для того чтобы существовала функция ограниченной вариации $g(t)$ такая, что*

$$\int_0^1 t^n dg(t) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (25)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (26)$$

*) Проблему моментов можно рассматривать и для бесконечного промежутка. Однако мы этого случая касаться не будем.

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, а $\Delta^m \mu_k$ означают m -е разности для последовательности $\{\mu_k\}$, определяемые индуктивно равенствами:

$$\Delta^{m+1} \mu_k = \Delta^m \mu_k - \Delta^m \mu_{k+1}; \quad \Delta^0 \mu_k = \mu_k \quad (m = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots). \quad (27)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть проблема моментов (25) разрешима. Обозначим через f линейный функционал в пространстве $\mathbf{C}$, порождаемый функцией $g(t)$. Обозначим далее

$$x_k^{(m)}(t) = t^k (1-t)^m \quad (m, k = 0, 1, \dots). \quad (28)$$

Так как

$$\begin{aligned} x_k^{(m+1)}(t) &= t^k (1-t)^{m+1} = t^k (1-t)^m - \\ &- t^{k+1} (1-t)^m = x_k^{(m)}(t) - x_{k+1}^{(m)}(t), \end{aligned}$$

то

$$f(x_k^{(m+1)}) = f(x_k^{(m)}) - f(x_{k+1}^{(m)}) \quad (m, k = 0, 1, \dots).$$

Кроме того,

$$f(x_k^{(0)}) = \mu_k.$$

Принимая во внимание (27), мы легко можем убедиться (используя метод индукции), что

$$f(x_k^{(m)}) = \Delta^m \mu_k \quad (m, k = 0, 1, \dots).$$

Пусть теперь $\theta_k^{(n)} = \operatorname{sgn} \Delta^{n-k} \mu_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^n \theta_k^{(n)} C_n^k x_k^{(n-k)}(t).$$

Ввиду того, что $x_k^{(m)}(t) \geq 0$ в $[0, 1]$, имеем

$$|\tilde{x}(t)| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k x_k^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

Следовательно, $\|\tilde{x}\| \leq 1$. А тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| &= \sum_{k=0}^n C_n^k \theta_k^{(n)} \Delta^{n-k} \mu_k = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta_k^{(n)} f(x_k^{(n-k)}) = \\ &= f(\tilde{x}) \leq \|f\| \quad (n = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

что и доказывает необходимость условия, если положить $M = \|f\|$.

Достаточность. Пусть φ означает функционал, заданный на множестве $\{x_n\}$ формулой (19), где принято $x_n(t) = t^n$. Распространим φ на линейную оболочку множества $\{x_n\}$, т. е. на мно-

жество всех полиномов. Именно, если $x(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n$, то положим

$$f_0(x) = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n.$$

В силу линейной независимости функций $x_n(t)$ такое определение f_0 будет однозначным.

Определенный таким образом функционал f_0 будет, очевидно, аддитивным и однородным. Мы докажем, что условие (27) обеспечивает его линейность.

Отметим, что независимо от этого условия функционал f_0 линейен на множестве $\mathbf{H}_m$ полиномов, степень которых не превосходит m , так как $\mathbf{H}_m$ является конечномерным пространством (координатами служат коэффициенты полинома), и потому сходимость в $\mathbf{H}_m$ покоординатная (см. II. 2.8.).

Сохраняя прежние обозначения, будем иметь, как и раньше,

$$f_0(x_k^{(s)}) = \Delta^s \mu_k \quad (s, k = 0, 1, \dots).$$

Рассмотрим теперь произвольный полином $x(t)$. Пусть степень его равна m . Введём последовательность соответствующих полиномов Бернштейна

$$x_n(t) = B_n(x; t) = \sum_{k=0}^n C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \quad (29)$$

Как известно, степень полинома $x_n(t)$ при любом $n = 1, 2, \dots$ не выше m ,*) а так как $x_n(t)$ равномерно сходятся к $x(t)$, при $n \rightarrow \infty$

*) Вот доказательство этого факта. Дифференцируя выражение (29) и заменяя в первой сумме индекс суммирования k на $k+1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{k=0}^n C_n^k [k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1}] x\left(\frac{k}{n}\right) = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-1-k} \left[x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

По индукции получим

$$\frac{d^s x_n}{dt^s} = n(n-1)\dots(n-s+1) \sum_{k=0}^{n-s} C_{n-s}^k t^k (1-t)^{n-s-k} \Delta^s x\left(\frac{k}{n}\right).$$

Так как $x(t)$ — полином степени m , то $\Delta^{m+1} x\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Поэтому $\frac{d^{m+1} x_n}{dt^{m+1}} = 0$, откуда и следует, что $x_n(t)$ — полином, степень которого не превосходит m .

(см. Натансон-1, стр. 23), то по сделанному выше замечанию

$$f_0(x_n) \rightarrow f_0(x),$$

но

$$|f_0(x_n)| \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| x \left(\frac{k}{n} \right) \right| |f_0(x_n^{(n-k)})| \leq \|x\| \sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| \leq M \|x\|.$$

Переходя в левой части к пределу при $n \rightarrow \infty$, найдем

$$|f_0(x)| \leq M \|x\|.$$

Так как x — произвольный полином, то линейность f_0 доказана. Теперь достаточно распространить f_0 на все C по непрерывности (см. IV.1.2) и применить к полученному в результате распространения функционалу f теорему об общей форме линейного функционала в пространстве C , на основании которой

$$f(x) = \int_0^1 x \dot{g}(t) dg^+(t) \quad (x \in C),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации.

Теорема полностью доказана.

§ 4. Функционалы в одном классе пространств функций

4.1. Для построения общей формы линейного функционала в пространстве функций нам понадобится новое обобщение интеграла, так называемый интеграл Радона. Это обобщение состоит в том, что вместо меры множества в интеграле Лебега здесь рассматривается аддитивная функция множества. Поэтому определению интеграла нового типа мы предположим необходимые сведения из теории таких функций.

Пусть T — произвольное непустое абстрактное множество. Система $\mathfrak{E} = \{e\}$ подмножеств этого множества называется *аддитивным семейством*, или *алгеброй*, если соблюдены следующие условия:

1) если $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}$, то $e_1 \cup e_2 \in \mathfrak{E}$;

2) если $e \in \mathfrak{E}$, то дополнение $Ce = T \setminus e \in \mathfrak{E}$.

Так как $e_1 \cap e_2 = C(Ce_1 \cup Ce_2)$, то пересечение $e_1 \cap e_2$ множеств, входящих в систему $\mathfrak{E}$, также входит в $\mathfrak{E}$. Далее, поскольку $e_1 \setminus e_2 = e_1 \cap Ce_2$, разность $e_1 \setminus e_2 \in \mathfrak{E}$, если $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}$. Отсюда следует, что пустое множество Λ и все T входят в $\mathfrak{E}$ ($\Lambda = e \cap Ce$; $T = e \cup Ce$).

Тривиальным примером аддитивного семейства может служить система, состоящая лишь из T и пустого множества Λ .

Совокупность всех подмножеств данного множества служит другим примером аддитивного семейства.

Наряду с этим семейством мы будем рассматривать в случае, когда T — точечное измеримое множество евклидова пространства, систему, состоящую из всех измеримых подмножеств T .

Если каждому $e \in \mathfrak{E}$ отнесено вещественное число $\Phi(e)$, то мы будем говорить, что на семействе $\mathfrak{E}$ задана функция множества Φ . Нас будут ин-

интересовать исключительно *аддитивные функции* множества, т. е. такие, что

$$\Phi(e_1 + e_2) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) \quad (e_1, e_2 \in \mathfrak{E}).$$

Поскольку $\Phi(\Lambda) = \Phi(\Lambda + \Lambda) = \Phi(\Lambda) + \Phi(\Lambda)$, то для аддитивной функции $\Phi(\Lambda) = 0$.

Говорят, что аддитивная функция Φ имеет *ограниченную вариацию* на множестве $e \subset T$ ($e \in \mathfrak{E}$), если

$$\bar{\Phi}(e) = \sup \sum_{k=1}^n |\Phi(e_k)| < \infty, \quad (1)$$

где супремум берется по всевозможным разбиениям множества e на части ($e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$; $e_k \in \mathfrak{E}$). Величина $\bar{\Phi}(e)$ называется *полной вариацией* функции Φ и иногда обозначается

$$\bar{\Phi}(e) = V_e(\Phi).$$

Ясно, что если функция Φ ограниченной вариации на e , то она будет ограниченной вариации и на любом $e' \subset e$ ($e, e' \in \mathfrak{E}$), причем $\bar{\Phi}(e') \leq \bar{\Phi}(e)$. Поэтому о функции ограниченной вариации на T мы будем говорить просто, что она ограниченной вариации.

Полную вариацию функции Φ можно записать и в таком виде

$$\bar{\Phi}(e) = \sup_{e=e'+e''} [\Phi(e') - \Phi(e'')] \quad (e', e'' \in \mathfrak{E}). \quad (2)$$

Действительно, правая часть этого равенства очевидно не превосходит $\bar{\Phi}(e)$. С другой стороны, пусть $e = e_1^* + e_2^* + \dots + e_n^*$ — такое разбиение, что

$$\bar{\Phi}(e) < \sum_{k=1}^n |\Phi(e_k^*)| + \varepsilon. \quad (3)$$

Распределим множества e_k^* на две группы, отнеся в первую те из них, для которых $\Phi(e_k^*) \geq 0$, а во вторую — все остальные. Обозначив через e_0' объединение множеств первой группы, а через e_0'' — второй, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Phi(e_k^*)| &= \sum_I \Phi(e_k^*) - \sum_{II} \Phi(e_k^*) = \Phi(e_0') - \Phi(e_0'') \leq \\ &\leq \sup_{e=e'+e''} [\Phi(e') - \Phi(e'')]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3) и учитывая произвольность ε , приходим отсюда к равенству (2).

Новое определение полной вариации позволяет сформулировать следующий результат: для того чтобы функция Φ была ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы она была *ограниченной*, т. е. чтобы

$$K = \sup_{e \in \mathfrak{E}} |\Phi(e)| < \infty. \quad (4)$$

*) Знак $+$ мы будем использовать для обозначения объединения множеств в случае, когда они не пересекаются.

**) Если $\bar{\Phi}(e) = \infty$, то рассуждения надо очевидным образом изменить.

В самом деле, если $\bar{\Phi}(T) < \infty$, то, поскольку $|\Phi(e)| \leq \bar{\Phi}(e) \leq \Phi(T)$, (4) выполнено с $K = \bar{\Phi}(T)$. Наоборот, если имеет место (4), то

$$\bar{\Phi}(T) = \sup_{T=e_1+e_2} [\Phi(e_1) - \Phi(e_2)] \leq 2K < \infty.$$

Пусть Φ — функция ограниченной вариации. Полную вариацию функции Φ на множестве e можно рассматривать как функцию множества. Докажем, что она является аддитивной функцией. Пусть $e = e_1 + e_2$. По $\varepsilon > 0$ найдем такие e'_1, e''_1, e'_2, e''_2 , что $e_1 = e'_1 + e''_1, e_2 = e'_2 + e''_2$ и

$$\bar{\Phi}(e_1) - \varepsilon < \Phi(e'_1) - \Phi(e''_1); \quad \bar{\Phi}(e_2) - \varepsilon < \Phi(e'_2) - \Phi(e''_2).$$

Складывая эти соотношения, получим

$$\bar{\Phi}(e_1) + \bar{\Phi}(e_2) - 2\varepsilon < \Phi(e'_1 + e'_2) - \Phi(e''_1 + e''_2) \leq \bar{\Phi}(e_1 + e_2) = \bar{\Phi}(e),$$

так как $e = (e'_1 + e'_2) + (e''_1 + e''_2)$. Отсюда ввиду произвольности ε

$$\bar{\Phi}(e) \geq \bar{\Phi}(e_1) + \bar{\Phi}(e_2).$$

Противоположное неравенство доказывается еще проще. Пусть $e = e' + e''$. Обозначим

$$e'_i = e_i \cap e', \quad e''_i = e_i \cap e'' \quad (i = 1, 2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(e) &= \sup [\bar{\Phi}(e') - \Phi(e'')] = \sup \{ [\Phi(e'_1) - \Phi(e''_1)] + [\Phi(e'_2) - \Phi(e''_2)] \} \leq \\ &\leq \sup [\Phi(e'_1) - \Phi(e''_1)] + \sup [\Phi(e'_2) - \Phi(e''_2)] \leq \bar{\Phi}(e_1) + \bar{\Phi}(e_2). \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{\Phi}(e) = \bar{\Phi}(e_1) + \bar{\Phi}(e_2).$$

Установленное обстоятельство позволяет доказать возможность представления функции ограниченной вариации в форме разности положительных аддитивных ограниченных функций. Действительно,

$$\Phi(e) = \Phi^+(e) - \Phi^-(e),$$

где

$$\Phi^+(e) = \frac{1}{2} [\bar{\Phi}(e) + \Phi(e)], \quad \Phi^-(e) = \frac{1}{2} [\bar{\Phi}(e) - \Phi(e)].$$

Положительность функции Φ^+ следует из того, что, беря в разложении $e = e' + e''$ в качестве e' пустое множество, получим

$$\bar{\Phi}(e) = \sup_{e=e'+e''} [\Phi(e') - \Phi(e'')] \geq -\Phi(e),$$

т. е. $\bar{\Phi}(e) + \Phi(e) \geq 0$. Аналогично проверяется положительность функции Φ^- .

Величина $\Phi^+(e)$ называется *положительной вариацией* функции Φ на множестве e , $\Phi^-(e)$ — *отрицательной вариацией*. Предоставляем читателю доказать, что $\Phi^+(e)$ можно получить как точную верхнюю границу сумм вида (1), если в них удержать лишь слагаемые, для которых $\Phi(e_k) \geq 0$. $\Phi^+(e)$ можно также определить равенством

$$\Phi^+(e) = \sup_{e' \subseteq e} \Phi(e').$$

Сходные факты имеют место и для функции Φ^- .

4.2. Перейдем теперь к построению интеграла Радона [93]. Рассмотрим вещественную функцию $x(t)$, определенную для $t \in T$ и аддитивную ограниченную вариацию функцию множества Φ , заданную на аддитивном семействе $\mathfrak{E}$. Функция $x(t)$ называется *измеримой* относительно семейства $\mathfrak{E}$, если при любом вещественном a множества $\{t \in T: x(t) > a\}$, $\{t \in T: x(t) < a\} \in \mathfrak{E}$.

Пусть функция $x(t)$ измерима относительно семейства $\mathfrak{E}$. Рассмотрим разбиение вещественной прямой

$$\dots < l_{-m} < \dots < l_{-1} < l_0 < l_1 < \dots < l_n < \dots \left(l_{-m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty; l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \right) \\ \lambda = \sup_k [l_{k+1} - l_k] < \infty \quad (5)$$

и введем множества

$$e_k = \{t \in T: l_k \leq x(t) < l_{k+1}\} \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

Ясно, что $e_k \in \mathfrak{E}$. Образует ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \bar{\Phi}(e_k). \quad (6)$$

Если для всех достаточно малых λ этот ряд абсолютно сходится, то существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \Phi(e_k),$$

который называется *интегралом Радона* (или Лебега — Стильеса) и обозначается символом

$$\int_T x(t) d\Phi(e).$$

Докажем высказанное утверждение. Поскольку из абсолютной сходимости ряда (6) вытекает абсолютная сходимость рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \Phi^+(e_k), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \Phi^-(e_k),$$

то достаточно рассмотреть случай, когда функция Φ положительна, т. е.

когда $\bar{\Phi}(e) = \Phi(e)$. Кроме нижней интегральной суммы $s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \Phi(e_k)$,

введем еще верхнюю интегральную сумму

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_{k+1} \Phi(e_k).$$

Ряд в правой части абсолютно сходится, так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_{k+1} \Phi(e_k)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k \Phi(e_k)| + \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(e_k) \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k \Phi(e_k)| + \lambda \Phi(T). *) \end{aligned}$$

Отсюда же получаем, что

$$0 \leq S - s \leq \lambda \Phi(T). \quad (7)$$

Применяя обычный способ рассуждения, установим, что нижняя интегральная сумма s не превосходит верхней суммы, хотя бы и отвечающей другому подразделению. Отсюда с помощью (7) заключаем, что существует

$$I = \sup \{s\} = \inf \{S\}.$$

Также из (7) следует, что $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S$, что и требовалось доказать

Отметим один важный частный случай, когда заведомо имеет место абсолютная сходимость ряда (6) при всех λ и, следовательно, существование интеграла Радона. Именно, если $x(t)$ — ограниченная функция ($|x(t)| \leq M$), то при $|l_k| > M + \lambda$ множества e_k пустые, поэтому лишь конечное число членов ряда отлично от нуля.

Для интегральной суммы получаем при этом оценку

$$\begin{aligned} |s| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k \Phi(e_k)| = \\ &= \sum_{|l_k| \leq M + \lambda} |l_k \Phi(e_k)| \leq (M + \lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(e_k) \leq (M + \lambda) \mathbf{V}(\Phi). \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ и заменяя M на $\sup_{t \in T} |x(t)|$, будем иметь

$$\left| \int_T x(t) d\Phi(e) \right| \leq \sup_{t \in T} |x(t)| \mathbf{V}_T(\Phi). \quad (8)$$

Непосредственно из определения интеграла вытекают следующие его свойства (все множества, фигурирующие в формулировках, предполагаются входящими в семейство $\mathfrak{E}$, а функции измеримыми):

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \int_T [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] d\Phi(e) &= \alpha \int_T x_1(t) d\Phi(e) + \beta \int_T x_2(t) d\Phi(e); \\ \int_T x(t) d[\alpha \Phi_1(e) + \beta \Phi_2(e)] &= \alpha \int_T x(t) d\Phi_1(e) + \beta \int_T x(t) d\Phi_2(e), \end{aligned}$$

если существуют интегралы в правых частях.

*) Если Φ — положительная аддитивная функция, то $\Phi(e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots) \geq \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \dots$. В самом деле,

$\Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \dots + \Phi(e_n) = \Phi(e_1 + e_2 + \dots + e_n) \leq \Phi(e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots)$.
В пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем нужный результат.

2° Если $\chi_E(t)$ — характеристическая функция множества E , то

$$\int_T \chi_E(t) d\Phi(e) = \Phi(E).$$

3° Если существует интеграл $\int_T x(t) d\Phi(e)$, то существует и интеграл

$$\int_E x(t) d\Phi(e) = \int_T x(t) \chi_E(t) d\Phi(e),$$

при этом имеет место аддитивность интеграла, т. е.

$$\int_{E_1+E_2} x(t) d\Phi(e) = \int_{E_1} x(t) d\Phi(e) + \int_{E_2} x(t) d\Phi(e).$$

Действительно, $\chi_{E_1+E_2}(t) = \chi_{E_1}(t) + \chi_{E_2}(t)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{E_1+E_2} x(t) d\Phi(e) &= \int_T [\chi_{E_1}(t) + \chi_{E_2}(t)] x(t) d\Phi(e) = \int_T \chi_{E_1}(t) x(t) d\Phi(e) + \\ &+ \int_T \chi_{E_2}(t) x(t) d\Phi(e) = \int_{E_1} x(t) d\Phi(e) + \int_{E_2} x(t) d\Phi(e). \end{aligned}$$

4° Если $x(t)$ — ограниченная функция на $E \subset T$, то

$$\left| \int_E x(t) d\Phi(e) \right| \leqslant \sup_{t \in E} |x(t)| \bar{\Phi}(E). \quad (9)$$

Предположим, что T — параллелепипед евклидова пространства и $\mathfrak{E}$ состоит из всех измеримых подмножеств T . Аддитивную и ограниченной вариации функцию множества Φ , заданную на $\mathfrak{E}$, можно рассматривать и как функцию параллелепипеда и, следовательно, если $x(t)$ — непрерывная функция, можно образовать интеграл Стильеса — Гюнтера. Докажем, что он совпадает с интегралом Радона. Возьмем произвольное подразделение параллелепипеда T на параллелепипеды

$$T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

и составим интегральную сумму для интеграла Стильеса — Гюнтера:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Phi(P_k) \quad (\xi_k \in P_k; k = 1, 2, \dots, n).$$

Сравним ее с интегралом Радона $I = \int_T x(t) d\Phi(e)$. Пользуясь свойствами

1°—4°, найдем

$$\begin{aligned} |I - \sigma| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{P_k} x(t) d\Phi(e) - \sum_{k=1}^n x(\xi_k) \Phi(P_k) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{P_k} [x(t) - x(\xi_k)] d\Phi(e) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \sup_{t \in P_k} |x(t) - x(\xi_k)| \bar{\Phi}(P_k). \end{aligned}$$

Так как $x(t)$ — непрерывная функция, то при достаточно мелком подразделении будет

$$\sup_{t \in P_k} |x(t) - x(\xi_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, для таких подразделений

$$|I - \sigma| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_\varepsilon(P_k) = \varepsilon \bar{\Phi}(T),$$

т. е. I является пределом интегральных сумм, что и доказывает равенство интегралов Стильтьеса — Гюнтера и Радона.

4.3. Введенное выше понятие абстрактного интеграла Радона позволяет высказать соображения относительно общей формы линейного функционала в некоторых пространствах функций, подобно тому как в § 1 это было сделано для пространств последовательностей.

Пусть T — некоторое абстрактное множество и $\mathfrak{E}$ — аддитивное семейство подмножеств этого множества. Рассмотрим линейное множество X вещественных функций, заданных на T и измеримых относительно $\mathfrak{E}$. Предположим далее, что в X задан функционал N , удовлетворяющий условиям:

I. $N(x) \geq 0$ и если $x(t) \equiv 0$, то $N(x) = 0$.

II. $N(x_1 + x_2) \leq N(x_1) + N(x_2)$.

III. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из множества X называются N -эквивалентными, если

$$N(x_1 - x_2) = 0.$$

Отождествляя N -эквивалентные функции *) и полагая

$$\|x\| = N(x), \quad (10)$$

мы обратим X в нормированное пространство. **)

Пространство X подчиним следующим трем требованиям:

IV. Функция, тождественно равная единице, входит в X .

V. Пусть $x_0(t)$ и $x(t)$ — две измеримые относительно $\mathfrak{E}$ функции, связанные условием

$$|x(t)| \leq |x_0(t)|.$$

Тогда, если $x_0 \in X$, то и $x \in X$, причем

$$\|x\| \leq \|x_0\|.$$

Благодаря этому условию можно утверждать, что в X содержатся все ограниченные измеримые функции. Действительно, если $|x(t)| \leq M$, то, поскольку функция $x_0(t) \equiv M$ входит в X (на основании IV), в X будет входить и $x(t)$. Далее, одновременно с $x(t)$ входят в X функции $x^+(t) = \frac{1}{2} [|x(t)| + x(t)]$ и $x^-(t) = \frac{1}{2} [|x(t)| - x(t)]$ (отметим, что $x(t) = x^+(t) - x^-(t)$ и $|x(t)| = x^+(t) + x^-(t)$).

*) При этом отождествляются и N -эквивалентные характеристические функции, или, что то же, соответствующие им множества.

**) Строго говоря, элементами получающегося при этом пространства являются не функции, а классы N -эквивалентных между собой функций. Равным образом, вместо множеств из $\mathfrak{E}$ мы должны рассматривать классы N -эквивалентных множеств, т. е. таких, что соответствующие характеристические функции N -эквивалентны.

Шестое требование необходимо лишь в случае, когда X содержит неограниченные функции.

VI. Пусть числовая последовательность $\{l_n\}$, монотонно возрастающая, стремится к бесконечности, и пусть множества $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ попарно не пересекаются. Тогда, если функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \chi_{e_k}(t) \quad (t \in T)$$

входит в X , то

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \chi_{e_k},$$

где ряд в правой части сходится по норме в пространстве X .

Поставленные ограничения вполне естественны и им подчиняются многие конкретные пространства функций, как например, M_T , $\tilde{M}_T$, L_T^p . Пространства C и V составляют исключение, для них нарушено условие V.

При сделанных предположениях общая форма линейного функционала в пространстве X дается следующей теоремой.

Теорема I (4. VI). Пусть f — линейный функционал в пространстве X . Существует единственная аддитивная ограниченной вариации функция Φ ,*) определенная на $\mathfrak{E}$, такая, что

$$f(x) = \int_T x(t) d\Phi(e). \quad (11)$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(e) = f(\chi_e), \quad (12)$$

где χ_e — характеристическая функция множества $e \in \mathfrak{E}$. Если e_1, e_2 — непересекающиеся множества, то

$$\chi_{e_1+e_2}(t) = \chi_{e_1}(t) + \chi_{e_2}(t),$$

поэтому

$$\Phi(e_1 + e_2) = f(\chi_{e_1+e_2}) = f(\chi_{e_1}) + f(\chi_{e_2}) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2).$$

Далее, по условию V $\|\chi_e\| \leq \|\chi_T\|$, так что

$$|\Phi(e)| = |f(\chi_e)| \leq \|f\| \|\chi_e\| \leq \|f\| \|\chi_T\|.$$

Таким образом, Φ — аддитивная ограниченная и, следовательно, ограниченной вариации функция множества.

Пусть $x(t)$ — произвольная положительная функция из X . Рассмотрим разбиение вещественной полуоси:

$$0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n < \dots \quad (l_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty; \lambda = \sup_n (l_{n+1} - l_n) < \infty).$$

Обозначая, как и раньше

$$e_k = \{t \in T : l_k \leq x(t) < l_{k+1}\} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

докажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} l_k \bar{\Phi}(e_k)$ сходится.

*) При этом надо иметь в виду, что мы отождествляем N -эквивалентные множества, так что для таких множеств значения Φ совпадают.

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдем такие множества e'_k, e''_k , что $e_k = e'_k + e''_k$ и

$$\bar{\Phi}(e_k) - \frac{\varepsilon}{2^k l_k} < \Phi(e'_k) - \Phi(e''_k).$$

Обозначая через $\tilde{x}(t)$ функцию, принимающую значение l_k на e'_k и $-l_k$ на e''_k , т. е.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e'_k}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e''_k}(t) \quad (t \in T),$$

и замечая, что $|\tilde{x}(t)| \leq x(t)$, мы можем заключить, что по свойству V $\tilde{x} \in X$, а по свойству VI

$$\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e'_k} - \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e''_k}$$

Следовательно,

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k [f(\chi_{e'_k}) - f(\chi_{e''_k})] = \sum_{k=0}^{\infty} l_k [\Phi(e'_k) - \Phi(e''_k)] \geq \sum_{k=0}^{\infty} l_k \bar{\Phi}(e_k) - \varepsilon,$$

откуда и вытекает нужный результат.

Таким образом, согласно установленному в 4.2 существует интеграл

$$\int_T x(t) d\Phi(e). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь функции $x'(t)$ и $x''(t)$:

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e_k}(t), \quad x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{k+1} \chi_{e_k}(t).$$

Используя те же соображения, что и выше, можем утверждать, что $x' \in X$. Так как

$$x''(t) = x'(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (l_{k+1} - l_k) \chi_{e_k}(t),$$

и второе слагаемое представляет собой ограниченную измеримую функцию, то по замечанию к условию V она, а потому и $x''(t)$, входит в X . Ввиду того, что $x'(t) \leq x(t) \leq x''(t)$, имеем $0 \leq x(t) - x'(t) \leq x''(t) - x'(t)$, поэтому (условие V)

$$\|x - x'\| \leq \|x'' - x'\|. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$0 \leq x''(t) - x'(t) \leq \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{e_k}(t) = \lambda \chi_T(t).$$

Следовательно, вновь используя условие V, найдем

$$\|x'' - x'\| < \lambda \|\chi_T\|.$$

Отсюда получаем, что $x' \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} x$, а тогда и $f(x') \rightarrow f(x)$. Но так как

$$x' = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \chi_{e_k} \text{ (условие VI), то}$$

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} l_k f(\chi_{e_k}) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \Phi(e_k),$$

т. е. $f(x')$ представляет собой интегральную сумму для интеграла (13), так что

$$f(x') \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_T x(t) d\Phi(e).$$

Этим доказано, что

$$f(x) = \int_T x(t) d\Phi(e). \quad (15)$$

Если $x(t)$ принимает значения разных знаков, то формула (15) получается, если представить $x(t)$ в форме разности положительных функций: $x(t) = x^+(t) - x^-(t)$.

Докажем теперь единственность функции множества Φ . Если, напротив, имеется еще одна функция множества Φ_1 , дающая тот же функционал, т. е. если для каждого $x \in X$

$$\int_T x(t) d\Phi(e) = \int_T x(t) d\Phi_1(e),$$

то, в частности, при $x = \chi_E$ ($E \in \mathfrak{E}$)

$$\Phi(E) = \int_T \chi_E(t) d\Phi(e) = \int_T \chi_E(t) d\Phi_1(e) = \Phi_1(E)$$

для любого $E \in \mathfrak{E}$.

Теорема полностью доказана.

Отождествляя функционал f с соответствующей ему функцией Φ , мы можем сказать, что пространство, сопряженное к X , есть некоторое подмножество совокупности всех аддитивных ограниченной вариации функций множества, определенных на $\mathfrak{E}$.

4.4. Перейдем к рассмотрению конкретных пространств. Пусть X состоит только из ограниченных (а по замечанию к условию V всех ограниченных) измеримых функций. Определим норму в X не формулой (10), а полагая

$$\|x\| = \text{vrai max } |x(t)|, \quad (16)$$

где $\text{vrai max } |x(t)|$ означает точную нижнюю границу таких чисел a , что множество $\{t \in T : |x(t)| \geq a\}$ N -эквивалентно пустому множеству.

Нетрудно проверить, что N -эквивалентные функции имеют одинаковую норму, а также и то, что введенная норма удовлетворяет всем аксиомам B -пространства (включая полноту), если как и раньше отождествлять N -эквивалентные функции.

Пространство X , в котором норма определена посредством (16), мы будем обозначать символом: $M_{T, \mathfrak{E}, N}$, опуская иногда те или иные индексы.

Так, если $\mathfrak{E}$ есть совокупность всех подмножеств множества T , а $N(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|$, то мы получим уже встречавшееся нам пространство M_T

всех ограниченных функций, заданных на T . Если же T есть измеримое множество евклидова пространства, $\mathfrak{E}$ — совокупность измеримых подмножеств множества T , а $N(x) = \int_T |x(t)| dt$, или $N(x) = \text{vrai max } |x(t)|$ то

мы приходим к пространству $\tilde{M}_T$ измеримых ограниченных функций.

Теорема 2(4. VI). * *Общая форма линейного функционала в пространстве $M_{T, \mathfrak{E}, N}$ дается формулой (11), где Φ — произвольная аддитивная ограниченной вариации функция множества, заданная на $\mathfrak{E}$, принимающая одинаковые значения на N -эквивалентных множествах. При этом*

$$\|f\| = V_T(\Phi).$$

Доказательство. Согласно теореме 1, требуемая функция множества существует. Кроме того, если $e' + e'' = T$, то

$$\Phi(e') - \Phi(e'') = f(\chi_{e'}) - f(\chi_{e'') \leq \|f\| \|\chi_{e'} - \chi_{e''}\|.$$

Но функция $\chi_{e'}(t) - \chi_{e''}(t)$ принимает самое большее два значения 1 и -1 . Поэтому

$$\|\chi_{e'} - \chi_{e''}\| = \text{vrai max } |\chi_{e'}(t) - \chi_{e''}(t)| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\Phi(e') - \Phi(e'') \leq \|f\|.$$

Переход к точной верхней границе дает неравенство

$$V_T(\Phi) \leq \|f\|. \quad (17)$$

Если, наоборот, Φ — произвольная аддитивная ограниченной вариации функция, то интеграл (13) очевидно существует для любой функции $x \in M_{T, \mathfrak{E}, N}$, причем при замене $x(t)$ на N -эквивалентную функцию его значение не меняется. Ясно, что интеграл (13) представляет собой аддитивный и однородный функционал в $M_{T, \mathfrak{E}, N}$. Ограниченность его является следствием оценки (9) (см. 4.2), которая применительно к данному случаю примет вид

$$|f(x)| = \left| \int_T x(t) d\Phi(e) \right| \leq \text{vrai max } |x(t)| V_T(\Phi).$$

Отсюда попутно получается, что

$$\|f\| \leq V_T(\Phi).$$

Следовательно,

$$\|f\| = V_T(\Phi).$$

Теорема полностью доказана.

Таким образом, пространство, сопряженное к M_T , есть (с точностью до линейной изометрии) пространство всех аддитивных ограниченной вариации функций множества, норма в котором определяется как полная вариация соответствующей функции.

* Общая форма функционала в пространстве ограниченных функций указана Фихтенгольцем и Канторовичем [108].

Для пространства $\tilde{M}_T$ измеримых ограниченных функций сопряженное пространство есть совокупность всех аддитивных ограниченной вариации функций множества, определенных на измеримых подмножествах множества T (множества, отличающиеся на множество меры нуль, отождествляются).

Если T — счетное множество, то пространство M_T обращается в пространство m ограниченных последовательностей. Применяя теорему 2, мы получаем общую форму линейного функционала в m . Поскольку $m = l^*$, то $m^* = l^{**} \supset l$. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы соответствующий некоторой функции Φ функционал f имел форму Y_y ($y \in l$), т. е., чтобы было

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \quad (x = \{\xi_k\} \in m, y = \{\eta_k\} \in l),$$

состоит в том, чтобы Φ обладала свойством

$$\Phi(T) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \dots + \Phi(e_n) + \dots,$$

где e_n — одноточечные множества, причем $T = e_1 + e_2 + \dots$. Предоставляем читателю доказать этот факт, а также установить существование аддитивных, но не вполне аддитивных функций.

Отметим, наконец, что из теоремы 2 вытекает результат об общей форме линейного функционала в пространстве S_T непрерывных функций, заданных на ограниченном замкнутом множестве T евклидова пространства, хотя это пространство и не удовлетворяет всем требованиям, поставленным выше.

Действительно, S_T есть подпространство пространства M_T , поэтому по теореме Хана — Банаха (теорема 1 (2. IV)) каждый линейный функционал в S_T может быть распространен на M_T и, следовательно, представим в форме интеграла Радона, который, если T есть параллелепипед, можно понимать как интеграл Стильтьеса — Гюнтера. Обратно, если в интеграле (11) $x \in S_T$, то мы получаем линейный функционал в S_T .

Следует отметить, что, поскольку пространство S_T не удовлетворяет условию V, нельзя гарантировать однозначного соответствия между функционалами в S_T и аддитивными функциями множества, — различные функции могут определять один и тот же функционал, т. е. определяемые этими функциями функционалы в M_T будут совпадать для элементов из S_T . Так как среди этих функционалов в M_T будут и такие, норма которых равна норме рассматриваемого в S_T функционала f , то можно утверждать, что из всевозможных функций ограниченной вариации Φ , представляющих данный функционал f , можно выбрать такую, что

$$\|f\| = V_T(\Phi).$$

4.5. Рассмотрим теперь пространство L_T^p ($p \geq 1$), где T — измеримое ограниченное множество евклидова пространства. Это пространство включается в общую схему, если взять в качестве $\mathfrak{E}$ совокупность всех измеримых подмножеств множества T , а

$$N(x) = \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3 (4. VI). Для того чтобы аддитивная ограниченной вариации функция множества Φ определяла линейный функционал в L_T^p ,

необходимо и достаточно, чтобы

$$|\Phi(e)| \leq M \operatorname{mes} e \quad (e \in \mathfrak{E}; p = 1), \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \leq M^q \quad \left(e_1 + e_2 + \dots + e_n = T; p > 1; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \quad (19)$$

Доказательство. Необходимость. Если интеграл (11) является линейным функционалом в L_T^p , то при $p = 1$ имеем

$$|\Phi(e)| = |f(\chi_e)| \leq \|f\| \|\chi_e\| = \|f\| \operatorname{mes} e$$

и (18) выполнено с $M = \|f\|$.

При $p > 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} = \sum_{k=1}^n c_k \Phi(e_k) = \sum_{k=1}^n c_k f(\chi_{e_k}) = f(\tilde{x}) \leq \|f\| \|\tilde{x}\|,$$

где

$$c_k = \frac{|\Phi(e_k)|^{q-1} \operatorname{sgn} \Phi(e_k)}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \tilde{x} = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{e_k}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\| &= \left[\sum_{k=1}^n |c_k|^p \operatorname{mes} e_k \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e_k)|^{p(q-1)}}{[\operatorname{mes} e_k]^{p(q-1)-1}} \right]^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

то

$$\left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

(Ср. доказательство теоремы 1 (2. VI).

Достаточность. Докажем, что условия (18) и (19) обеспечивают существование интеграла (11), какова бы ни была функция $x(t)$ из L_T^p .

Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $x(t) \geq 0$, а поскольку (для $p = 1$).

$$\bar{\Phi}(e) = \sup_{e' + e'' = e} [\Phi(e') - \Phi(e'')] \leq M [\operatorname{mes} e' + \operatorname{mes} e''] = M \operatorname{mes} e,$$

то можно считать и функцию Φ положительной.

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k \Phi(e_k), \quad (20)$$

соответствующую подразделению

$$0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n < \dots \quad (l_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty; \quad \lambda = \sup_n (l_{n+1} - l_n) < \infty), \quad (21)$$

$$e_k = \{t \in T : l_k \leq x(t) < l_{k+1}\} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Согласно (18) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k \Phi(e_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} l_k M \operatorname{mes} e_k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \int_{e_k} x(t) dt = M \int_T x(t) dt = M \|x\|.$$

Таким образом, интеграл (11) существует, а переход в последнем неравенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ дает

$$\int_T x(t) d\Phi(e) \leq M \|x\|. \quad (22)$$

Итак, интеграл (11), являющийся, очевидно, аддитивным и однородным функционалом в L_T , вследствие (22) ограничен.

Перейдем к случаю $p > 1$. Отметим, что если функция Φ удовлетворяет условию (19), то ему удовлетворяет и функция $\bar{\Phi}$. Действительно, пусть $T = e_1 + e_2 + \dots + e_n$; выбирая e'_k и e''_k так, что $e_k = e'_k + e''_k$ и $\bar{\Phi}(e_k) < \Phi(e'_k) - \Phi(e''_k) + \varepsilon$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{[\bar{\Phi}(e_k)]^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{[\Phi(e'_k) - \Phi(e''_k) + \varepsilon]^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Phi(e'_k)^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} - \frac{\Phi(e''_k)^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} + \frac{\varepsilon^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right], \end{aligned}$$

поэтому с помощью неравенства Минковского (см. II.3.5), получим

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n \frac{[\bar{\Phi}(e_k)]^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} &\leq \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e'_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e''_k)|^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e'_k)|^q}{[\operatorname{mes} e'_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{|\Phi(e''_k)|^q}{[\operatorname{mes} e''_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq 2M + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности ε

$$\sum_{k=1}^n \frac{[\bar{\Phi}(e_k)]^q}{[\operatorname{mes} e_k]^{q-1}} \leq (2M)^q.$$

Доказанное позволяет и здесь ограничиться рассмотрением положительных $x(t)$ и $\Phi(e)$.

Составляя интегральную сумму (20), получаем с помощью неравенства Гёльдера (II. 3.2.):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n l_k \Phi(e_k) &= \sum_{k=0}^n l_k (\text{mes } e_k)^{\frac{1}{p}} \frac{\Phi(e_k)}{[\text{mes } e_k]^{\frac{q-1}{q}}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{k=0}^n l_k^p \text{mes } e_k \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=0}^n \frac{[\Phi(e_k)]^q}{[\text{mes } e_k]^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} \leq M \left[\sum_{k=0}^n \int_{e_k} [x(t)]^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq M \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{e_k} [x(t)]^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = M \|x\|. \end{aligned}$$

Устремляя сначала $n \rightarrow \infty$, а потом $\lambda \rightarrow 0$, получим и здесь неравенство

$$\int_T x(t) d\Phi(e) \leq M \|x\|,$$

которое доказывает достаточность условия (19) в случае $p > 1$.

Сама по себе доказанная теорема не представляет большого интереса, так как в § 2 была уже указана общая форма линейного функционала в L_T^p в виде интеграла Лебега. Однако эта теорема позволяет установить важные факты теории аддитивных функций. Именно, сопоставляя аналитические представления функционалов, полученные в § 2 (теорема 1 (2. VI) и только что, приходим к следующему результату. Пусть аддитивная ограниченной вариации функция Φ удовлетворяет условию (18) или (19). Тогда существует единственная измеримая функция $\varphi \in \tilde{M}_T = L_T^\infty$ (в случае условия (18)) или $\varphi \in L_T^q$ ($1 < q < \infty$) (в случае условия (19)) такая, что

$$\int_T x(t) d\Phi(e) = \int_T x(t) \varphi(t) dt, \quad (23)$$

какова бы ни была функция $x(t)$ из L_T^p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Наоборот, если функция φ такого рода существует, то аддитивная функция множества Φ , удовлетворяет условию (18), соответственно (19).

В частности, беря в равенстве (23) в качестве $x(t)$ характеристическую функцию измеримого множества, получаем такое предложение:

Для того чтобы аддитивная ограниченной вариации функция измеримого множества Φ допускала представление в форме

$$\Phi(e) = \int_e \varphi(t) dt, \quad (24)$$

где $\varphi \in L_T^q$ ($1 < q \leq \infty$), необходимо и достаточно, чтобы было соблюдено условие (18) ($q = \infty$) или условие (19) ($1 < q < \infty$).

При этом требование ограниченности вариации может быть опущено, оно является следствием условий (18) или (19). В случае $q = \infty$ это оче-

видно. В случае же, когда $q < \infty$, удерживая в сумме (19) лишь одно слабое, получаем

$$|\Phi(e)| \leq M(\text{mes } e)^{\frac{q-1}{q}},$$

откуда вытекает ограниченность функции Φ , а следовательно, и то, что она является функцией ограниченной вариации (см. 4.1).

4.6. Выясним, каким условиям должна удовлетворять аддитивная функция Φ , допускающая представление (24) с суммируемой функцией $\varphi(t)$. Для того, чтобы сформулировать это условие, нам понадобится новое понятие. Аддитивная функция измеримого множества Φ называется *абсолютно непрерывной*, если по каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\text{mes } e < \delta \text{ влечет } |\Phi(e)| < \varepsilon.$$

Ясно, что абсолютно непрерывная функция будет функцией ограниченной вариации и что функции Φ^+ и Φ^- также абсолютно непрерывны.

Теорема 4 (4. VI). Для того чтобы аддитивная функция измеримого множества Φ допускала представление (24) с суммируемой функцией $\varphi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы Φ была абсолютно непрерывна.

Доказательство. То, что условие необходимо, есть элементарное свойство интеграла Лебега, известное под названием абсолютной непрерывности интеграла (Натансон-II, стр. 165).

Достаточность. Рассмотрим пространство $\tilde{M}_T$ ограниченных измеримых функций. Оно является сопряженным к пространству L_T , а сопряженным к $\tilde{M}_T$ служит пространство $\tilde{V}_T$ аддитивных функций ограниченной вариации, норма в котором определяется как полная вариация. Таким образом, $(L_T)^{**} = \tilde{V}_T$, так что пространство $\tilde{V}_T$ содержит подпространство $\tilde{L}_T$, линейно изометричное пространству L_T . Подпространство $\tilde{L}_T$ состоит из тех функций $\Phi \in \tilde{V}_T$, которые порождают функционал в $\tilde{M}_T$, имеющий вид X_{φ} , где $\varphi \in L_T$. Отсюда следует, что функции из $\tilde{L}_T$ (и только они) допускают представление в форме (24) с суммируемой функцией φ .

Итак, нам надо доказать, что абсолютно непрерывная функция множества Φ является элементом подпространства $\tilde{L}_T$. При этом можно ограничиться случаем, когда Φ положительна.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ определим функцию множества Φ_n , полагая для произвольного измеримого $e \subset T$

$$\Phi_n(e) = \inf_{e' + e'' = e} [\Phi(e') + n \text{mes } e''],$$

Φ_n — аддитивная функция. В этом можно убедиться используя тот же метод, что и при доказательстве аддитивности функции Φ (см. 4.1), в связи с чем мы не будем приводить это рассуждение. Далее,

$$0 \leq \Phi_n(e) \leq \min [\Phi(e), n \text{mes } e] \leq n \text{mes } e. \quad (25)$$

Следовательно, для Φ_n соблюдено условие (18) и поэтому, как было отмечено, $\Phi_n(e)$ допускает представление (24), иначе говоря, $\Phi_n \in \tilde{L}_T$.

Докажем, что последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится к Φ в пространстве $\tilde{V}_T$. Для этого найдем такие множества e' и e'' , что $T = e' + e''$ и

$$\Phi_n(T) > \Phi(e') + n \text{mes } e'' - \varepsilon.$$

Так как $\Phi_n(T) \leq \Phi(T)$, то

$$\text{mes } e'' < \frac{\Phi(T) - \Phi(e') + \varepsilon}{n} \leq \frac{\Phi(T) + \varepsilon}{n};$$

поэтому, подобрав согласно определению абсолютной непрерывности $\delta > 0$, соответствующее ε , будем иметь для достаточно больших n (таких, что $\delta \geq \frac{\Phi(T) + \varepsilon}{n}$)

$$\Phi(e'') < \varepsilon.$$

Откуда

$$\Phi(T) - \Phi_n(T) < \Phi(e'') - n \text{mes } e'' + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Но, так как функция $\Phi - \Phi_n$ положительна, то]

$$\|\Phi - \Phi_n\| = \mathbf{V}_T(\Phi - \Phi_n) = \Phi(T) - \Phi_n(T) < 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\Phi_n \rightarrow \Phi$ в пространстве $\tilde{V}_T$.

Остается заметить, что подпространство $\tilde{L}_T$ замкнуто (см. V.1.2), вследствие чего из $\Phi_n \in \tilde{L}_T$ вытекает $\Phi \in \tilde{L}_T$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Поскольку норма функционала вида $X_\varphi \in \tilde{V}_T$ и элемента $\varphi \in L_T$ совпадает, получается следующее выражение для полной вариации абсолютно непрерывной функции множества:

$$\mathbf{V}_T(\Phi) = \int_T |\varphi(t)| dt.$$

Функцию Φ , представимую в форме (24), мы будем называть *неопределенным интегралом* функции φ , а функцию φ — *обобщенной производной* аддитивной функции Φ .

ГЛАВА VII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Значительное число конкретных математических процессов может быть включено в абстрактную схему, описываемую с помощью последовательности линейных операций. К таким задачам относятся, например, исследование сходимости рядов Фурье и интерполяционных полиномов, исследование формул механических квадратур, теория сингулярных интегралов и т. п.

При этом в абстрактной форме изучение вопроса обычно сводится либо к установлению сходимости последовательности линейных операций, либо к доказательству ограниченности норм операций этой последовательности, либо к другим, аналогичным, задачам.

§ 1. Основные теоремы

1.1. Главную роль среди теорем о последовательностях линейных операций играет

Теорема 1 (I. VII). *Если последовательность линейных операций $\{U_n\}$, переводящих B -пространство X в нормированное пространство Y , ограничена в каждой точке, т. е. если*

$$\sup_n \|U_n(x)\| < \infty \quad (x \in X), \quad (1)$$

то нормы этих операций ограничены в совокупности:

$$\|U_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что если известна граница значений линейной операции в некоторой сфере:

$$\|U(x)\| \leq B \quad (x \in K_\delta(x_0)),$$

то может быть дана оценка ее нормы, именно

$$\|U\| \leq \frac{2B}{\delta}.$$

Действительно, взяв любое x' с $\|x'\| < 1$, будем иметь

$$x = x_0 + \delta x' \in K_\delta(x_0).$$

Следовательно,

$$\|U(x_0) + \delta U(x')\| \leq B,$$

а потому

$$\|U(x')\| = \frac{1}{\delta} \|U(\delta x')\| \leq \frac{1}{\delta} [\|U(x_0) + \delta U(x')\| + \|U(x_0)\|] \leq \frac{2B}{\delta},$$

откуда и вытекает, что $\|U\| \leq \frac{2B}{\delta}$.

Переходим к доказательству теоремы. Предположим, что последовательность $\{\|U_n\|\}$ неограничена. Введем функционал

$$p(x) = \sup_n \|U_n(x)\|.$$

Он неограничен в каждой сфере, так как если бы $p(x) \leq B$ в $K_\delta(x_0)$, то, как было отмечено, оказалось бы $\|U_n\| \leq \frac{2B}{\delta}$ при любом $n = 1, 2, \dots$

Отсюда следует, что множество $E_k = \{x \in X : p(x) > k\}$ плотно в X . Далее, множество E_k открыто, так как если $x_0 \in E_k$, т. е. $p(x_0) > k$, то при некотором n_0 будет $\|U_{n_0}(x_0)\| > k$, а тогда по непрерывности $\|U_{n_0}(x)\|$ и $\|U_{n_0}(x)\| > k$ для x , достаточно близких к x_0 .

Множество E_k как открытое и плотное в X представляет собой вычет (см. 1.4.2). Но пересечение счетной системы вычетов также

является вычетом и, следовательно, не пусто. Если $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, то

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty$$

вопреки предположению.

З а м е ч а н и е. Условие теоремы может быть ослаблено тем, что выполнение (1) достаточно требовать на множестве второй категории, а не на всем X .

Доказанную теорему можно сформулировать еще и так (принцип фиксации особенности): если

$$\sup_n \|U_n\| = \infty,$$

то найдется такой элемент $x_0 \in X$, что

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty. \quad (2)$$

При этом множество элементов, удовлетворяющих (2), является вычетом.

Последняя формулировка позволяет несколько обобщить высказанное предложение. Пусть $\{U_n^{(k)}\} (k, n = 1, 2, \dots)$ — линейные операции из X в Y , причем

$$\sup_n \|U_n^{(k)}\| = \infty \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда существует такой элемент x_0 , что

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x_0)\| = \infty \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Действительно, множество A_k тех $x \in X$, для которых

$$\sup_n \|U_n^{(k)}(x)\| = \infty,$$

является вычетом; следовательно, пересечение $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ непусто.

Ясно, что в качестве x_0 можно взять любой элемент из A_0 .

Доказанное предложение называют иногда принципом сгущения особенностей.

1.2. Применение теоремы 1 в случае, когда последовательность операций $\{U_n\}$ сходится на X , т. е. при каждом $x \in X$ существует

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \quad (4)$$

(ср. V. 4.1), приводит к важному результату о сходящихся последовательностях линейных операций. Именно, при сделанных выше предположениях о пространствах X и Y имеет место

Теорема 2 (1. VII). Если последовательность линейных операций $\{U_n\}$ сходится на X к операции U , то U — линейная операция, причем

$$\|U\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|. \quad (5)$$

Доказательство. Аддитивность операции U очевидна. Далее, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(x)\| = \|U(x)\| < \infty$, то и $\sup_n \|U_n(x)\| < \infty$ и по теореме 1 последовательность норм $\{\|U_n\|\}$ ограничена. А тогда

$$\|U(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(x)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| \|x\|,$$

откуда и вытекает линейность операции U и неравенство (5).

Замечание. Подчеркнем, что сходимости U_n к U по норме в пространстве $[X \rightarrow Y]$ может и не быть, в чем легко убедиться на примере: $X = I$, $Y = \mathbb{R}^1$, $U_n = f_n$, где

$$f_n(x) = \xi_n \quad (x = \{\xi_k\} \in I; n = 1, 2, \dots).$$

Хотя $f_n(x) \rightarrow 0$, но $\|f_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Ограниченность последовательности норм является в известном смысле и достаточным условием сходимости последовательности линейных операций. Точнее говоря, справедлива (см. [10].)

Теорема 3 (I. VII) (Банах — Штейнхаус). *Для того чтобы последовательность линейных операций $\{U_n\}$, отображающих B -пространство X в B -пространство Y , сходилась на X к линейной операции, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *нормы операций U_n были ограничены в совокупности:*

$$\|U_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots);$$

2) *последовательность $\{U_n(x')\}$ сходилась в себе, каков бы ни был элемент x' из некоторого плотного в X множества D .*

Доказательство. Необходимость первого условия вытекает из теоремы 2. Необходимость второго очевидна.

Достаточность. Возьмем произвольное $x \in X$ и найдем $x' \in D$ так, что

$$\|x - x'\| < \varepsilon.$$

При достаточно больших m, n

$$\|U_m(x') - U_n(x')\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|U_m(x) - U_n(x)\| &\leq \|U_m(x') - U_n(x')\| + \|U_m(x) - U_m(x')\| + \\ &+ \|U_n(x) - U_n(x')\| < \varepsilon + (\|U_m\| + \|U_n\|) \|x - x'\| < (2M + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду полноты пространства Y существует $U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x)$, а тогда по теореме 2 U — линейная операция.

Замечание 1. Теорема (в части достаточности) остается верной, если сходимость в себе последовательности $\{U_n(x')\}$ ($x' \in D$) заменить сходимостью к $U(x')$, где U — данная линейная операция. Полнота пространства Y при этом не нужна.

Замечание 2. Условие 2) можно заменить требованием сходимости на полном в X множестве D . В самом деле, сходимость на D влечет сходимость на $\mathcal{L}(D)$, которое уже будет плотным в X .

Замечание 3. Первое условие теоремы может быть заменено согласно теореме 1 условием (1).

Следствие. *Множество точек сходимости последовательности линейных операций или первой категории или все пространство.*

Действительно, если множество точек сходимости второй категории, то по замечанию к теореме 1 последовательность норм ограничена. С другой стороны, множество точек сходимости, будучи множеством второй категории, плотно в некоторой сфере, а так как оно очевидно линейное, то и во всем пространстве X . Применена теорема 3

Замечание 4. Теоремы 1—3 остаются верными, если в них вместо последовательности операций рассматривать совокупность операций, зависящих от непрерывного периметра.

1.3. С точки зрения метода доказательства к теореме 1 примыкают приводимые ниже факты, относящиеся к так называемым полунепрерывным и выпуклым функционалам.

Функционал p , принимающий, возможно, и бесконечные значения, заданный в нормированном пространстве X , называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in X$, если по каждому $h < p(x_0)$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$p(x) > h \text{ для } x \in K_\delta(x_0).$$

Если p полунепрерывен снизу в каждой точке некоторого множества $R \subset X$, то мы будем говорить, что он полунепрерывен в R .

Функционал p в пространстве X называется *выпуклым*, если

$$1) p(x) \geq 0;$$

$$2) p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X),$$

$$3) p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in X, \lambda — \text{вещественное}).$$

Таким образом, выпуклый функционал удовлетворяет тем же требованиям, что и норма, за исключением того, что он может принимать нулевое значение не только на нулевом элементе, а также может иметь бесконечные значения. Следующая теорема (см. [29]) показывает, что выпуклый функционал действительно тесно связан с нормой.

Теорема 4 (I. VII) (Гельфанд). Пусть p — выпуклый функционал, полунепрерывный снизу в пространстве X . Тогда, если $p(x) < \infty$ на множестве второй категории, то существует такое $M < \infty$, что

$$p(x) \leq M \|x\|.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $E_k = \{x \in X : p(x) > k\}$. Оно открыто, так как если $x_0 \in E_k$, т. е. если $p(x_0) > k$, то по определению полунепрерывности $p(x) > k$ для x из достаточно малой окрестности точки x_0 . Таким образом, множества $E'_k = X \setminus E_k = \{x \in X : p(x) \leq k\}$ замкнуты.

Вследствие того, что

$$\{x \in X : p(x) < \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k$$

множество второй категории, по крайней мере одно из E'_k будет также множеством второй категории. Пусть это будет E'_{k_0} . Существует сфера $K_\delta(x_0)$, в которой множество E'_{k_0} плотно, т. е.

$$E'_{k_0} = \overline{E'_{k_0}} \supset K_\delta(x_0).$$

Таким образом, для $x \in K_\delta(x_0)$

$$p(x) \leq k_0,$$

т. е. функционал p ограничен сверху в сфере $K_\delta(x_0)$.

Возьмем произвольный элемент $x \in X$. Так как $x_0 + \frac{\delta x}{2\|x\|} \in K_\delta(x_0)$, то

$$p(x) = \frac{2\|x\|}{\delta} p\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \leq \frac{2\|x\|}{\delta} \left[p\left(x_0 + \frac{\delta x}{2\|x\|}\right) + p(x_0) \right] \leq \frac{4k_0}{\delta} \|x\|.$$

Остается принять $M = \frac{4k_0}{\delta}$.

Следствие 1. Функционал p , удовлетворяющий условиям теоремы 4, непрерывен в X .

В самом деле, для произвольных $x, x_0 \in X$

$$p(x) = p((x - x_0) + x_0) \leq p(x - x_0) + p(x_0),$$

откуда

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0).$$

Меняя здесь местами x и x_0 , получаем неравенство

$$p(x_0) - p(x) \leq p(x_0 - x) = p(x - x_0).$$

Таким образом,

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) \leq M \|x - x_0\|.$$

Отсюда непрерывность p непосредственно следует.

Следствие 2. Если p_n — выпуклые непрерывные функционалы *) в пространстве X и

$$p(x) = \sup_n p_n(x) < \infty$$

на множестве второй категории, то p является также выпуклым и непрерывным функционалом.

Действительно, функционал p , очевидно, выпуклый и поэтому в соответствии со следствием 1 достаточно проверить, что он полунепрерывен снизу. Пусть $x_0 \in X$ и $h < p(x_0)$. Тогда при некотором n также будет $h < p_n(x_0)$. По непрерывности функционала p_n в некоторой окрестности точки x_0 будем иметь $p_n(x) > h$. Тем более в этой же окрестности $p(x) > h$, что и означает полунепрерывность функционала p в точке x_0 .

З а м е ч а н и е. Теорема 1 легко может быть получена из доказанных результатов: достаточно взять $p_n(x) = \|U_n(x)\|$.

§ 2. Некоторые приложения к теории функций

Теоремы предыдущего параграфа имеют многообразные применения. Остановимся на некоторых из них.

2.1. Первым рассмотрим вопрос о сходимости формул механических квадратур.

При приближенном вычислении интегралов обычно пользуются формулами механических квадратур, имеющими вид

$$\int_a^b x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k x(t_k) \quad (a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b).$$

*) Вместо непрерывности можно ограничиться требованием полунепрерывности снизу.

Таковы, например, простейшие формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона. К этому же типу относятся более сложные формулы Ньютона — Котеса и Гаусса.

Поскольку одна формула не может обеспечить сколь угодно высокой точности, естественно рассматривать последовательность формул

$$\int_a^b x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (1)$$

$$(a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b; n = 0, 1, \dots)$$

и поставить вопрос об условиях, при которых погрешность при вычислении интегралов по этим формулам стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Если для данной функции x это обстоятельство имеет место, мы будем говорить, что формулы механических квадратур (1) *сходятся* для функции x .

Ответ на поставленный вопрос о сходимости формул механических квадратур дает

Теорема 1 (2. VII) (Сёре). *Для того чтобы формулы механических квадратур (1) сходились для любой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1) \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \leq M \quad (n = 0, 1, \dots),$$

2) *сходимость этих формул имела место для каждого полинома.*

Доказательство. В пространстве C рассмотрим функционалы:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

и

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Как было установлено в III. 2.1,

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Таким образом, условие 1) означает ограниченность в совокупности норм функционалов f_n , а условие 2), что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для x , принадлежащих плотному в C множеству всех полиномов. Поэтому сформулированный результат есть частный случай теоремы Банаха — Штейнхауса (с учетом замечания 1 к ней).

Замечание 1. Если коэффициенты $A_k^{(n)}$ положительны при любых k и n , то первое условие является следствием второго.

Действительно, при $x(t) \equiv 1$ согласно второму условию имеет место сходимость формул, т. е.

$$b - a = \int_a^b dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A_k^{(n)},$$

откуда и следует ограниченность сумм $\sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)}$.

Замечание 2. Во втором условии множество всех полиномов может быть заменено другим плотным в $\mathbb{C}$ множеством, например множеством всех кусочно-линейных функций, или даже множеством, полным в $\mathbb{C}$, например степенями независимой переменной (см. замечание 2 к теореме Банаха — Штейнхауса).

Замечание 3. Сказанное выше по поводу формул (1) без каких-либо изменений переносится на более общий случай формул

$$\int_a^b p(t) x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (2)$$

$$(a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b; n = 0, 1, \dots),$$

где $p(t)$ — фиксированная суммируемая функция, называемая *весовой*.

Одним из основных путей получения формул механических квадратур является следующий процесс.

При каждом $n = 0, 1, \dots$ произвольным образом зададим в промежутке $[a, b]$ значения $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ и построим по функции $x(t)$ ее интерполяционный полином Лагранжа $P_n(x; t)$, совпадающий с $x(t)$ в точках $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$. Как известно,

$$P_n(x; t) = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)}(t) x(t_k^{(n)}),$$

где

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k^{(n)}) \omega_n'(t_k^{(n)})}$$

$$(\omega_n(t) = (t - t_0^{(n)})(t - t_1^{(n)}) \dots (t - t_n^{(n)}); k = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, \dots).$$

Заменяя в интеграле $\int_a^b p(t) x(t) dt$ функцию $x(t)$ ее интерполяционным полиномом, приходим к формуле механических квадратур:

$$\int_a^b p(t) x(t) dt \cong \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad \left(A_k^{(n)} = \int_a^b p(t) l_k^{(n)}(t) dt \right). \quad (3)$$

Формулы, полученные описанным способом, называют *интерполяционными* (см. Натансон-I, стр. 590).

Если функция $x(t)$ является полиномом степени не выше n , то ее интерполяционный полином совпадает с ней самой, поэтому формула (3) в этом случае будет точной. Итак, если $x(t)$ — произвольный полином, то для достаточно больших n погрешность формулы равна нулю, т. е. интерполяционные формулы механических квадратур всегда сходятся на множестве всех полиномов. Таким образом, необходимым и достаточным условием сходимости таких формул для любой непрерывной функции является лишь одно первое условие теоремы 1. В частности, согласно замечанию 1 сходимость будет обеспечена, если все коэффициенты $A_k^{(n)} \geq 0$.

Последнее обстоятельство имеет место, например, в случае, когда весовая функция положительна, а точки $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ выбраны так, что полиномы $\omega_n(t)$ образуют ортогональную по весу $p(t)$ систему. Получающиеся при этом квадратурные формулы называются *формулами типа Гаусса*. Они отличаются от остальных интерполяционных формул механических квадратур тем, что точны для полиномов степени $2n+1$ (См. Натансон-I, стр. 601).

2.2. Рассмотрим наряду с пространством C пространство $\tilde{C}$, элементами которого являются периодические, с одним и тем же периодом (для определенности равным 2π) непрерывные функции, заданные на всей вещественной прямой. Каждую такую функцию можно, очевидно, трактовать как функцию, определенную на некотором промежутке $[a, a+2\pi]$ длиной 2π и удовлетворяющую условию: $x(a+2\pi) = x(a)$. Это позволяет считать, что $C \supset \tilde{C}$.

Отсюда следует, что операция $y = U(x)$

$$y(s) = \int_a^{a+2\pi} K(s, t) x(t) dt \quad (s \in [a, a+2\pi]) \quad (4)$$

с непрерывным ядром $K(s, t)$ будет линейной операцией из $\tilde{C}$ в C . Предоставляем читателю проверить, что выражение для нормы операции U будет

$$\|U\| = \max_s \int_a^{a+2\pi} |K(s, t)| dt \quad (5)$$

(ср. III.2.4).

Операция (4) переводит, вообще говоря, периодические функции в непериодические. Чтобы U была операцией из $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(s, t)$ было 2π -периодическим по первому аргументу, т. е. чтобы $K(s+2\pi, t) = K(s, t)$. Если, наконец, ядро $K(s, t)$ определено на всей плоскости и 2π -периодично

и по второму аргументу, то интегрирование в (4) и (5) можно производить по любому промежутку длиной 2π .

Образует ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции $x(t)$:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt \, dt \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Сопоставляя каждой функции $x(t)$ из $\tilde{\mathcal{C}}$ частную сумму $S_n(x)$ ее ряда Фурье, мы получим некоторую операцию S_n , переводящую $\tilde{\mathcal{C}}$ в $\tilde{\mathcal{C}}$. Как известно, эта сумма выражается интегралом Дирихле:

$$y = S_n(x), \quad y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}} dt,$$

т. е. операция S_n имеет вид (4), причем вследствие непрерывности ядра S_n — линейная операция. Покажем, что $\|S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Действительно, согласно (5) и в силу периодичности ядра

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}} \right| dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt, \end{aligned}$$

где $m = 2n + 1$. Используя известные из анализа неравенства

$$|\sin t| \leq |t|; \quad \sin s \geq \frac{2}{\pi} s \quad \left(0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}\right);$$

получим далее

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2m}} \frac{|\sin mt|}{\sin t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{|\sin mt|}{\sin \left(t + \frac{k\pi}{m}\right)} dt \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\frac{\pi}{4m}}^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geq \\
&\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\frac{2}{\pi} m \cdot \frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m} + \frac{k\pi}{m}} \cdot \frac{\pi}{4m} \geq \\
&\geq \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{8\pi} \ln \frac{m}{2} \geq \frac{1}{8\pi} \ln n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|S_n\| \geq \frac{1}{8\pi} \ln n,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

На основании теоремы 3(1.VII) заключаем, что существует непрерывная периодическая функция, ряд Фурье которой не сходится равномерно ни к какой функции.

Приведенные рассуждения позволяют установить также существование непрерывной периодической функции, ряд Фурье которой расходится в произвольной наперед заданной точке.

Для этого рассмотрим в пространстве $\tilde{\mathcal{C}}$ последовательность функционалов f_n :

$$f_n(x) = S_n(x)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1) \frac{t-t_0}{2}}{\sin \frac{t-t_0}{2}} x(t) dt.$$

Так же, как и в III. 2.2, норма функционала f_n определяется равенством

$$\|f_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t-t_0}{2}}{\sin \frac{t-t_0}{2}} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(2n+1) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \|S_n\|$$

и, следовательно, $\|f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Поэтому по теореме 1 (1. VII) существует элемент $x_0 \in \tilde{\mathcal{C}}$, для которого $\sup_n |f_n(x_0)| = \infty$, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь произвольное счетное множество $e = \{t_k\}$ на числовой прямой и образуем функционалы $f_n^{(k)}$

$$f_n^{(k)}(x) = S_n(x)(t_k) \quad (k, n = 1, 2, \dots).$$

Применяя к ним принцип сгущения особенностей, найдем такой элемент $x_0 \in \tilde{\mathcal{C}}$, для которого

$$\sup_n |f_n^{(k)}(x_0)| = \infty \quad (k = 1, 2, \dots),$$

т. е. такую функцию $x_0(t)$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке множества E .

[] Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой не всюду сходится, впервые указан Дю-буа-Реймоном (см. Зигмунд).

Если рассматривать S_n как линейную операцию из L в L , то вследствие симметрии ядра $\|S_n\|$ сохранит прежнее значение, и поэтому на основании теоремы 3 (1. VII) можно заключить о существовании суммируемой функции, ряд Фурье которой не сходится в среднем в L .

2.3. Широкое обобщение предыдущих результатов может быть получено, если ввести понятие полиномиальной операции.

Рассмотрим опять пространство $\tilde{\mathcal{C}}$ периодических (с периодом 2π) непрерывных функций и обозначим через $\tilde{H}_n$ его подпространство, состоящее из всех тригонометрических полиномов порядка не выше n .

Линейная операция U в пространстве $\tilde{\mathcal{C}}$ называется *полиномиальной* (тригонометрической) *операцией порядка n* , если

1) $U(x) \in \tilde{H}_n$, каков бы ни был элемент $x \in \tilde{\mathcal{C}}$;

2) если $x \in \tilde{H}_n$, то $U(x) = x$.

Иначе говоря, полиномиальная операция сопоставляет каждой 2π -периодической функции тригонометрический полином порядка не выше n , причем сами эти полиномы оставляет без изменения.

Простейшим примером полиномиальной операции является операция S_n , изученная в 2.2. Другим примером может служить операция, сопоставляющая функции ее интерполяционный (тригонометрический) полином, построенный по фиксированной системе узлов.

Введем следующие обозначения. Если $y = U(x)$, то значение функции y при данном s будем обозначать $U(x; s)$. Так, например, $S_n(x; s) = S_n(x)(s)$. Далее, если $x(t)$ некоторая функция из $\tilde{\mathcal{C}}$, то через $x^h(t)$ будет обозначаться функция, получающаяся из $x(t)$ сдвигом аргумента

$$x^h(t) = x(t + h).$$

Ясно, что $x^h \in \tilde{\mathcal{C}}$ при любом h . Отметим еще, что ввиду равномерной непрерывности функции $x \in \tilde{\mathcal{C}}$

$$\|x^h - x\| = \max_t |x^h(t) - x(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6)$$

Относительно полиномиальных операций и их последовательностей могут быть установлены весьма важные общие факты. Все они опираются на следующую лемму, связывающую произвольную полиномиальную операцию с простейшей — S_n .

Лемма. Если U есть полиномиальная операция порядка n , то справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x^\tau; s - \tau) d\tau = S_n(x; s) \quad (x \in \tilde{C}) \quad (7)$$

(тождество Зигмунда — Марцинкевича — Бермана).

Доказательство. Пусть сначала $x \in \tilde{H}_n$, тогда и $x^\tau \in \tilde{H}_n$. Следовательно,

$$U(x^\tau; s - \tau) = x^\tau(s - \tau) = x(s).$$

А так как S_n — полиномиальная операция порядка n , то и

$$S_n(x; s) = x(s),$$

что и доказывает тождество в этом случае.

Пусть теперь $x(t) = \cos mt$ или $x(t) = \sin mt$, где $m > n$. Ограничиваясь для определенности первым случаем, будем иметь

$$\begin{aligned} x^\tau(t) = \cos m(t + \tau) &= \cos mt \cos m\tau - \sin mt \sin m\tau = \\ &= x_1(t) \cos m\tau + x_2(t) \sin m\tau. \end{aligned}$$

Поэтому, если положить

$$y_1 = U(x_1), \quad y_2 = U(x_2)$$

(y_1, y_2 — элементы из $\tilde{H}_n$), то

$$U(x^\tau; s - \tau) = y_1(s - \tau) \cos m\tau + y_2(s - \tau) \sin m\tau.$$

Но $y_1(s - \tau)$ и $y_2(s - \tau)$ представляют собой тригонометрические полиномы относительно τ , порядок которых не превышает n , вследствие чего они ортогональны функциям $\cos m\tau$ и $\sin m\tau$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x^\tau; s - \tau) d\tau = 0.$$

Очевидно, нулю равна и правая часть (7).

Итак, тождество (7) доказано в этом случае, и, следовательно, поскольку обе части его аддитивны относительно x , то тем самым (7) установлено для произвольного тригонометрического полинома.

Рассмотрим теперь левую часть тождества (7) и докажем, что при фиксированном s она представляет собой линейный функционал в пространстве $\tilde{C}$.

Действительно, обозначим левую часть (7) через $f_s(x)$ и проверим, что функционал f_s имеет смысл, каков бы ни был элемент $x \in \tilde{C}$. Для этого покажем, что под знаком интеграла стоит непрерывная функция от τ . Имеем

$$\begin{aligned} |U(x^{\tau+h}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| &\leq |U(x^{\tau+h}; s - \tau - h) - \\ &- U(x^{\tau}; s - \tau - h)| + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| \leq \\ &\leq \|U(x^{\tau+h} - x^{\tau})\| + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)| \leq \\ &\leq \|U\| \|x^{\tau+h} - x^{\tau}\| + |U(x^{\tau}; s - \tau - h) - U(x^{\tau}; s - \tau)|. \end{aligned}$$

При достаточно малых h первое слагаемое здесь сколь угодно мало вследствие (6), второе — ввиду непрерывности функции $U(x^{\tau}, t)$.

Функционал f_s очевидно аддитивен, а поскольку

$$|f_s(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U(x^{\tau}; s - \tau)| d\tau \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|U\| \|x^{\tau}\| d\tau = \|U\| \|x\|,$$

то f_s и ограниченный функционал.

Если, наконец, обозначить $g_s(x) = S_n(x; s)$, то тождество (7) будет означать совпадение функционалов f_s и g_s . Но ранее было доказано, что эти функционалы совпадают на плотном в $\tilde{C}$ множестве всех тригонометрических полиномов. Поскольку f_s и g_s — линейные функционалы, из этого вытекает их совпадение на всем пространстве $\tilde{C}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (2. VII). Среди всех тригонометрических полиномиальных операций порядка n наименьшую норму имеет операция S_n , т. е. всегда

$$\|U\| \geq \|S_n\| > A \ln n.$$

Действительно, в силу тождества (7)

$$\|S_n(x)\| = \max_s |S_n(x; s)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_s |U(x^{\tau}; s - \tau)| d\tau \leq \|U\| \|x\|,$$

откуда $\|S_n\| \leq \|U\|$.

Теорема 3 (2. VII) (Лозинский — Харшиладзе). Если $\{U_n\}$ — последовательность тригонометрических полиномиальных операций, причем U_n — операция порядка n , то нормы их стремятся к бесконечности. В частности, такая последовательность не может оказаться сходящейся на всем пространстве $\tilde{C}$.

Первое утверждение непосредственно следует из предыдущей теоремы. Второе получается с помощью теоремы 1 (1. VII).

Как частный случай сформулированной теоремы, отметим следующий важный факт. Каковы бы ни были узлы интерполяции, существует такая непрерывная 2π -периодическая функция, что построен-

ная для нее последовательность интерполяционных полиномов не сходится равномерно (теорема Фабера).

Отметим без доказательства, что утверждения теорем 2 и 3 переносятся на случай пространства L .

В пространстве C непрерывных функций, заданных на $[0, 1]$, можно аналогичным образом рассматривать полиномиальные операции (алгебраические), понимая под этим такие линейные операции, которые переводят C в подпространство H_n всех алгебраических полиномов степени не выше n , а элементы из H_n не изменяют. Однако удобнее провести исследование алгебраического случая путем сведения его к тригонометрическому (см. Натансон-I, стр. 672).

Рассмотрим полиномиальную (алгебраическую) операцию U_n , сопоставляющую непрерывной функции n -ю частную сумму ряда Фурье этой функции по заданной системе ортогональных полиномов. Применяя к последовательности операций аналог теоремы 3 для алгебраического случая, приходим к такому результату [85]: *какова бы ни была ортогональная система полиномов, существует такая непрерывная функция, ряд Фурье которой по этой системе полиномов не сходится равномерно.*

Теоремы 2 и 3 установлены С. М. Лозинским и Ф. И. Харшиладзе [72]. С. М. Лозинским осуществлено далеко идущее развитие этих идей. Лемма, использованная в доказательстве, имеется в [11].

2.4. Рассмотрим вопрос о представлении функций сингулярными интегралами.

Пусть в квадрате $[a, b; a, b]$ задана последовательность суммируемых функций $\{K_n(s, t)\}$. Говорят, что функция $x(s)$ представима сингулярным интегралом, если последовательность

$$x_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

сходится к $x(s)$ в том или ином смысле.

Сингулярные интегралы систематически встречаются в различных вопросах анализа. Назовем для примера интегралы Дирихле, Фейера, Валле-Пуссена и др.

Ограничиваясь непрерывными ядрами, докажем теорему о сходимости сингулярных интегралов в среднем в пространстве L .

Теорема 4 (2. VII). *Для того, чтобы последовательность (8) сходилась к x в пространстве L , какова бы ни была суммируемая функция x , необходимо и достаточно, чтобы*

$$1) \int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt - x(s) \right| ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (9)$$

для всякого x из полного в пространстве L множества D ;

$$2) \int_a^b |K_n(s, t)| ds \leq M \quad (t \in [a, b]; \quad n = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Действительно, если обозначить через U_n операцию в пространстве L , порожденную ядром $K_n(s, t)$,

$$y = U_n(x), \quad y(s) = \int_a^b K_n(s, t) x(t) dt,$$

то первое условие означает, что $U_n(x) \rightarrow x$ для $x \in D$, а второе согласно III. 2.5, что $\|U_n\| \leq M$. Таким образом, сформулированный результат есть частный случай теоремы Банаха—Штейнхауса (точнее говоря, замечания 2 к ней) (см. VII. 1.2).

Замечание 1. В части достаточности условие 1) можно заменить двумя более простыми. Именно

$$\int_a^\beta K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (s \in (\alpha, \beta) \subset [a, b]), \quad (11)$$

$$\int_a^b |K_n(s, t)| dt \leq M \quad (s \in [a, b]; \quad n = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Легко проверить, что в этом случае в качестве D можно взять совокупность характеристических функций всевозможных промежутков, содержащихся в $[a, b]$.

Действительно, если $\tilde{x}$ —характеристическая функция промежутка $[\alpha, \beta]$, то при $s \in (\alpha, \beta)$

$$\tilde{x}_n(s) = \int_a^\beta K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \tilde{x}(s),$$

если же $s \notin [\alpha, \beta]$ и, например, $a \leq s < \alpha$, то

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n(s) &= \int_a^\beta K_n(s, t) dt = \\ &= \int_a^\beta K_n(s, t) dt - \int_a^\alpha K_n(s, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 1 = 0 = \tilde{x}(s). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{x}_n(s) \rightarrow \tilde{x}(s)$ при всех $s \neq \alpha, \beta$, т. е. почти везде.

Условие (12) обеспечивает возможность предельного перехода под знаком интеграла в интеграле $\int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t) \tilde{x}(t) dt - \tilde{x}(s) \right| ds$, вследствие чего устанавливается, что он имеет пределом нуль.

Замечание 2. Если ядра $K_n(s, t)$ симметричны, то условие (12) совпадает с условием 2) теоремы и потому условия (11) и (12) сами по себе в этом случае необходимы и достаточны.

Если рассматривать операции U_n , порожденные ядрами $K_n(s, t)$, как операции в пространстве C , то аналогичным образом мы получим условия равномерной сходимости последовательности (8) к непрерывной функции $x(s)$.

Более подробные сведения о сингулярных интегралах читатель может получить в статьях [81] и [87б].

2.5. Рассмотрим в заключение вопрос об обобщенном суммировании рядов.

Пусть имеется числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (13)$$

и пусть $\{s_k\}$ — последовательность его частных сумм. Введем бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (14)$$

и образуем выражения

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} s_k \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

предполагая, что все ряды в правой части сходятся.

Говорят, что ряд (13) обобщенно суммируем матрицей (14), если существует конечный предел последовательности $\{\sigma_n\}$. Величину этого предела

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

называют *обобщенной суммой* ряда (13).

Так, например, метод суммирования Чезаро, когда

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k.$$

характеризуется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0, & \dots \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \dots, & 0, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n}, & \dots, & \frac{1}{n}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Вместо того чтобы говорить об обобщенном суммировании рядов, можно рассматривать вопрос об определении обобщенного предела последовательности, соотнося данной числовой последовательности $x = \{\xi_k\}$ последовательность

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и исследуя ее поведение при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что одна постановка задачи легко сводится к другой. Поскольку точка зрения последовательности оказывается удобнее, мы и остановимся на ней, сохраняя, однако, прежний термин «метод суммирования».

Естественно рассматривать только такие методы суммирования, которые применимы ко всякой сходящейся в обычном смысле слова последовательности и дают для нее в качестве обобщенного предела обычный предел. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется *перманентным*. Условия перманентности метода суммирования, определяемого матрицей (14), сформулированы в следующей теореме [105].

Теорема 5 (2. VII) (Тёплиц). *Для того чтобы метод суммирования, определяемый матрицей (14), был перманентным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1;$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. В пространстве с сходящихся последовательностей рассмотрим функционалы

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; n = 1, 2, \dots)$$

и

$$\sigma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k.$$

В (VI. 1.4) было указано, что

$$\|\sigma_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

поэтому условие 3) означает ограниченность норм функционалов σ_n .

Далее, введем последовательности

$x_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ и $x_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица на k -м месте).

Так как

$$\sigma_n(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}; \quad \sigma_n(x_k) = \alpha_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \dots),$$

то условия 1) и 2) могут быть записаны в виде

$$\sigma_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \sigma(x_k); \quad \sigma_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \sigma(x_0).$$

Поскольку совокупность элементов $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ полна в $\mathfrak{c}$, условия теоремы совпадают с условиями теоремы Банаха — Штейнхауса (с учетом замечаний 1 и 2). Таким образом, условия 1) — 3) необходимы и достаточны для того чтобы

$$\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma(x),$$

а это и означает перманентность метода суммирования.

Матрица, отвечающая методу Чезаро, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Отсюда следует известный факт перманентности метода средних арифметических (Чезаро).

ГЛАВА VIII

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЭЛЕМЕНТОВ

§ 1. Слабая сходимость функционалов *)

1.1. Пусть имеется последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$, заданных в B -пространстве X . Если при каждом $x \in X$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (1)$$

то согласно теореме 2(1.VII) функционал f также будет линейным. Если для любого $x \in X$ выполнено соотношение (1), то говорят, что последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$ *слабо сходится* к функционалу f и записывают этот факт следующим образом:

$$f_n \rightharpoonup f.$$

Поскольку совокупность всех линейных функционалов в пространстве X образует B -пространство, можно говорить и о сходимости последовательности функционалов как элементов этого пространства. Этот вид сходимости (сходимость по норме) в отличие от слабой иногда называют *сильной сходимостью*.

Употребление термина «слабая сходимость» оправдывается тем, что из сходимости последовательности $\{f_n\}$ к f по норме вытекает слабая сходимость, а обратное, как мы увидим, вообще говоря, не имеет места. Поэтому требование $f_n \rightharpoonup f$, действительно, является более слабым, чем $f_n \rightarrow f$ ($\|f_n - f\| \rightarrow 0$).

Теорема Банаха — Штейнхауса приводит к следующему критерию слабой сходимости.

Теорема 1 (1.VIII). Для того чтобы

$$f_n \rightharpoonup f, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

- 1) последовательность норм $\{\|f_n\|\}$ ограничена;
- 2) соотношение (1) имеет место для всех x из плотного в X множества D .

*) Определения и основные результаты этого параграфа впервые опубликованы в монографии Банаха I и непосредственно предшествующих ей работах того же автора.

Замечание. В условии 2) можно ограничиться требованием, чтобы D было полным в X (ср. замечание 2 к теореме Банаха — Штейнхауса).

Непрерывность нормы по отношению к слабой сходимости не имеет места, т. е. из (2) не следует, что $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$. Можно лишь утверждать, что

$$\|f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$$

(см. теорему 2 (1.VII)).

1.2. Некоторое множество Φ функционалов называется *слабо компактным*, если из всякой последовательности $\{f_n\} \subset \Phi$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. (Ср. определение компактного множества в метрическом пространстве; I. 3.1).

Ограниченность является достаточным условием компактности некоторого множества нормированного пространства только в случае, когда рассматриваемое пространство конечномерно (см. II. 2.8). Поскольку слабая компактность является менее жестким требованием, чем компактность, естественно ожидать, что ограниченные множества будут слабо компактными и в пространствах более широкого класса, чем конечномерные. Действительно, имеет место

Теорема 2 (1.VIII). *Для того чтобы множество Φ линейных функционалов в пространстве X было слабо компактным, необходимо, а если X сепарабельно, то и достаточно, чтобы Φ было ограничено по норме в X^* , т. е.*

$$\|f\| \leq M \quad (f \in \Phi).$$

Доказательство. Необходимость условия очевидна из теоремы 1 (1.VII). Докажем его достаточность. Пусть $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное плотное в X множество. Каждому функционалу $f \in \Phi$ отнесем элемент метрического пространства s — последовательность

$$y_f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots).$$

Множество всех таких последовательностей обозначим через s_Φ . Отметим, что соответствие между функционалами $f \in \Phi$ и последовательностями $y_f \in s_\Phi$ взаимно однозначно, так как, если $y_{f_1} = y_{f_2}$, то $f_1(x_k) = f_2(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots$), т. е. функционалы f_1 и f_2 совпадают на множестве D . Ввиду того что D — плотное множество, f_1 должен совпадать с f_2 на всем пространстве X (см. IV.1.2).

Слабая сходимость последовательности функционалов $\{f_n\}$ равносильна сходимости в пространстве s последовательности соответствующих элементов $\{y_{f_n}\}$. Действительно, последнее, как было показано в I.1.5, означает покоординатную сходимость, иначе говоря, сходимость каждой последовательности $\{f_n(\tilde{x})\}$ ($\tilde{x} \in D$), а это, в свою очередь, ввиду ограниченности норм функционалов f_n , эквивалентно слабой сходимости последовательности $\{f_n\}$.

Указанные обстоятельства позволяют вместо слабой компактности множества Φ доказывать компактность (в обычном смысле слова) множества s_Φ в пространстве s . Но условием компактности множества в пространстве s является ограниченность совокупности k -ых координат ($k = 1, 2, \dots$) (см. I.3.3). И так как

$$|f(x_k)| \leq \|f\| \|x_k\| \leq M \|x_k\| \quad (f \in \Phi; k = 1, 2, \dots),$$

то это условие для s_Φ выполнено, следовательно, s_Φ компактно, что и требовалось доказать.

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в условиях теоремы 2 ставится требование сепарабельности пространства X , хотя результат относится не к X , а к сопряженному пространству X^* . Нужно иметь в виду, что X^* может быть и несепарабельным, в то время как само X сепарабельно. Примером пространства такого рода может служить пространство l . Оно сепарабельно, однако $l^* = m$ уже несепарабельно.

Из сепарабельности пространства X вытекает *слабая сепарабельность* пространства X^* , точнее говоря, справедлива

Теорема 3 (I. VIII). Пусть X — сепарабельное пространство. Тогда существует такое счетное множество D^* функционалов в X , что каждый функционал f в X может быть представлен как предел слабо сходящейся последовательности функционалов из D^* .

Доказательство. Достаточно доказать слабую сепарабельность единичной сферы Γ пространства X^* . А это сразу получается, если заметить, что метрическое пространство s , а следовательно, и его часть s_Γ сепарабельны.

1.3. В некоторых пространствах слабая сходимость последовательности функционалов $\{f_n\}$ к функционалу f вместе со сходимостью последовательности норм: $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ обеспечивает сходимость по норме последовательности $\{f_n\}$ к f .

Теорема 4 (I. VIII). Пусть f_n ($n=1, 2, \dots$) и f — функционалы в пространстве L_T^p ($p > 1$). Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась по норме к f , необходимо и достаточно, чтобы

$$1) f_n \rightarrow f;$$

$$2) \|f_n\| \rightarrow \|f\|.$$

Доказательство. Необходимость обоих условий очевидна. Докажем достаточность. Обозначим через φ_n и φ элементы пространства L_T^q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), определяющие функционалы f_n и соответственно f :

$$f_n(x) = \int_T \varphi_n(t) x(t) dt; \quad f(x) = \int_T \varphi(t) x(t) dt;$$

$$\|f_n\| = \|\varphi_n\|_{L_T^q}, \quad \|f\| = \|\varphi\|_{L_T^q}.$$

Предполагая $1 < q \leq 2$, воспользуемся неравенством (1) леммы из VI. 2.1:

$$|1 + u|^q \geq 1 + qu + c\theta(u) \quad \left(c > 0; \theta(u) = \begin{cases} |u|^2 & |u| < 1 \\ |u|^q & |u| \geq 1 \end{cases} \right). \quad (3)$$

Заменив в этом неравенстве u на $\frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{\varphi(t)}$ и преобразуя полученное соотношение так же, как при доказательстве теоремы 1 (2. VI), получим (ср. неравенство (8) § 2, гл. VI):

$$\begin{aligned} \int_T |\varphi_n(t)|^q dt &\geq \int_T |\varphi(t)|^q dt + q \int_T \frac{|\varphi(t)|^q}{\varphi(t)} (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dt + \\ &+ c \int_T |\varphi(t)|^q \theta\left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{\varphi(t)}\right) dt. \end{aligned}$$

Обозначая через $\tilde{x}$ элемент из L^p :

$$\tilde{x}(t) = \frac{|\varphi(t)|^q}{\varphi(t)} = |\varphi(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} \varphi(t),$$

перепишем последнее неравенство в виде

$$\int_T |\varphi(t)|^q \theta\left(\frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{\varphi(t)}\right) dt \leq \frac{1}{c} [\|f_n\|^q - \|f\|^q + q(f(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x}))].$$

откуда, учитывая условия теоремы, видим, что выражение в правой части, а значит, и интеграл в левой части стремятся к нулю.

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые были использованы при доказательстве теоремы 1 (2. VI), в связи с чем мы их не приводим.

Если $q > 2$, то вместо неравенства (3) надо воспользоваться неравенством

$$|1 + u|^q \geq 1 + qu + c|u|^q, \quad (3')$$

доказательство которого может быть скопировано с доказательства неравенства (3) (см. VI. 2.1). Подставляя в неравенство (3')

$$u = \frac{\varphi_n(t) - \varphi(t)}{\varphi(t)},$$

умножая на $|\varphi(t)|^q$ и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int_T |\varphi_n(t)|^q dt &\geq \int_T |\varphi(t)|^q dt + \\ &+ q \int_T \frac{|\varphi(t)|^q}{\varphi(t)} (\varphi_n(t) - \varphi(t)) dt + c \int_T |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^q dt. \end{aligned}$$

Понимая под $\tilde{x}$ то же, что и выше, найдем

$$\int_T |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^q dt \leq \frac{1}{c} [\|f_n\|^q - \|f\|^q + q(f(\tilde{x}) - f_n(\tilde{x}))],$$

откуда следует, что интеграл в правой части стремится к нулю, т. е. $\|f_n - f\|^q \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

1.4. Выясним смысл слабой сходимости в отдельных конкретных пространствах.

Пусть, например, $X = L^p$ ($p > 1$) и $\{f_n\}$ — последовательность линейных функционалов в L^p . Согласно теореме об общей форме функционала в L^p можно написать

$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t) x(t) dt, \quad (4)$$

где $\varphi_n \in L^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$. При этом

$$\|f_n\| = \|\varphi_n\|_{L^q}. \quad (5)$$

Теорема 5 (1. VIII). * Для того чтобы последовательность функционалов (4) слабо сходилась к функционалу f :

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup_n \|\varphi_n\|_{L^q} < \infty$$

$$2) \int_a^s \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^s \varphi(t) dt \quad (a \leq s \leq b).$$

Доказательство. Обозначим через D множество характеристических функций всевозможных промежутков вида $[a, s]$ ($a \leq s \leq b$). Тогда второе условие может быть записано в виде

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in D).$$

Поскольку первое условие означает ограниченность норм функционалов f_n , а D полно в L^p , доказываемая теорема является частным случаем теоремы 1 (с учетом замечания 1 к ней).

Замечание 1. Если $X = L$, то условие 1) теоремы надо заменить на

$$1') \sup_n \|\varphi_n\|_{\tilde{M}} < \infty.$$

Доказательство при этом сохраняется.

*) [976].

З а м е ч а н и е 2. Если рассмотреть пространство L_T^p , то условие 2) в теореме должно быть заменено на

2') $\int_e \varphi_n(t) dt \rightarrow \int_e \varphi(t) dt$, каково бы ни было измеримое множество $e \subset T$. Если при этом T параллелепипед, то достаточно, чтобы условие выполнялось для любого параллелепипеда $e \subset T$.

Аналогичным образом исследуется случай, когда $X = l^p$.

Теорема 6 (1. VIII). Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ функционалов в пространстве l^p ($p \geq 1$)

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(n)} \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}),$$

$$y_n = \{\eta_k^{(n)}\} \in \begin{cases} l^q & p > 1 \\ m & p = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; n = 1, 2, \dots \right)$$

слабо сходилась к функционалу f :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup \|y_n\| < \infty,$$

$$2) \eta_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поскольку пространства L_T^p и l^p сепарабельны, к ним применима теорема 2. Укажем на применение этой теоремы.

Пусть имеется последовательность функций $\{\varphi_n(t)\}$ из пространства L^q ($1 < q \leq \infty$). Если при этом

$$\int_a^b |\varphi_n(t)|^q dt \leq M \quad (q < \infty),$$

$$|\varphi_n(t)| \leq M \quad (q = \infty) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то из данной последовательности можно выделить такую подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(t)\}$, что

$$\int_a^s \varphi_{n_k}(t) dt \rightarrow \int_a^s \varphi(t) dt \quad (a \leq s \leq b),$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция из L^q .

§ 2. Слабая сходимость элементов

2.1. Аналогично тому, как в предыдущем параграфе была определена слабая сходимость функционалов, может быть определена и слабая сходимость элементов.

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов нормированного пространства X и $x_0 \in X$. Если соотношение

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (1)$$

выполняется, каков бы ни был линейный функционал f в пространстве X , то говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$ *слабо сходится* к x_0 , и пишут при этом $x_n \rightharpoonup x_0$.

Относительно термина «слабая сходимость» можно сделать то же замечание, что в § 1, так как из соотношения $x_n \rightarrow x_0$, так же как и там, вытекает $x_n \rightharpoonup x_0$, хотя обратное, вообще говоря, не имеет места.

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов пространства X и $x_0 \in X$. Рассмотрим функционалы в пространстве X^* , определяемые элементами x_n (V. 1.2): $X_n = X_{x_n}$ ($n = 0, 1, \dots$)

$$X_n(f) = f(x_n) \quad (f \in X^*).$$

Слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ к элементу x_0 равносильна слабой сходимости последовательности функционалов $\{X_n\}$ к функционалу X_0 (в последнем случае слабая сходимость понимается в смысле § 1). Действительно, $X_n \rightharpoonup X_0$ означает, что

$$X_n(f) \rightarrow X_0(f) \quad (f \in X^*), \quad (2)$$

что совпадает с (1).

В VIII.1.1 было показано, что если $X_n \rightharpoonup X_0$, то

$$\|X_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|.$$

Так как $\|X_n\| = \|x_n\|$ ($n = 0, 1, \dots$) (см. V. 1. 2), то, таким образом, из слабой сходимости $x_n \rightharpoonup x_0$ вытекает соотношение

$$\|x_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

2.2. Переход к элементам пространства X^{**} позволяет также установить признак слабой сходимости последовательности элементов.

Теорема 1 (2. VIII). Для того чтобы $x_n \rightharpoonup x_0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup_n \|x_n\| < \infty,$$

2) соотношение (1) имело место для плотного (полного) в пространстве X^* множества функционалов.

Доказательство. Как отмечалось, соотношение $x_n \rightharpoonup x_0$ равносильно слабой сходимости последовательности функционалов X_n к функционалу X_0 , а для этого согласно теореме 1 (1. VIII) необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \sup_n \|X_n\| < \infty,$$

2) стремление $X_n(f) \rightarrow X_0(f)$ имело место для плотного (полного) в X^* множества.

Принимая во внимание определение функционалов X_n , а также соотношение $\|X_n\| = \|x_n\|$, мы и получаем требуемый результат.

Следствие. Пусть множество E в нормированном пространстве X таково, что, каков бы ни был функционал $f \in X^*$,

$$L(f) = \sup_{x \in E} |f(x)| < \infty.$$

Тогда E ограничено.

В самом деле, в противном случае из E можно выделить последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\|x_n\| \geq n^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как

$$\left| \frac{1}{n} f(x_n) \right| \leq \frac{1}{n} L(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (f \in X^*),$$

то $\frac{1}{n} x_n \rightarrow 0$, что, однако, несовместимо с условием 1) теоремы, поскольку $\left\| \frac{1}{n} x_n \right\| \geq n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Замечание. В пространстве X^* можно рассматривать два вида слабой сходимости. Во-первых, слабую сходимость его элементов как функционалов, заданных в пространстве X . И, во-вторых, слабую сходимость элементов X^* , если это пространство рассматривать как исходное. Первый вид слабой сходимости определяется соотношением

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \quad (x \in X) \quad (3)$$

тогда как второй означает, что

$$X(f_n) \rightarrow X(f_0) \quad (X \in X^{**}). \quad (4)$$

Поскольку $X^{**} \supset X$, из (4) вытекает (3). Иными словами, из слабой сходимости последовательности $\{f_n\}$ как элементов вытекает слабая сходимость ее как функционалов. Эквивалентность обоих видов сходимости можно утверждать лишь в случае, когда пространство X (а следовательно, и X^* ; см. главу XI) рефлексивно.

2.3. Как уже отмечалось, слабая сходимость элементов не совпадает, вообще говоря, со сходимостью по норме. Однако имеет место

Теорема 2 (2. VIII). Если последовательность элементов $\{x_n\}$ слабо сходится к некоторому элементу x_0 : $x_n \rightarrow x_0$, то можно образовать последовательность линейных комбинаций элементов данной последовательности, которая будет сильно сходиться к тому же пределу:

$$y_n \rightarrow x_0 \quad \left(y_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k; \quad n = 1, 2, \dots \right). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть f — произвольный функционал, обращающийся в нуль на элементах x_k ($k = 1, 2, \dots$). Тогда и $f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$. Согласно теореме 4 (2. IV) находим, что x_0 входит

в линейное замыкание множества $\{x_k\}$, а это и означает, что x_0 представим в виде (5).

Замечание 1. Из теоремы вытекает, что всякое подпространство нормированного пространства содержит пределы слабо сходящихся последовательностей своих элементов.

Замечание 2. Следует отметить, что если заменить слабую сходимость элементов слабой сходимостью функционалов, то результат, сформулированный в теореме, перестает быть верным. В самом деле, рассмотрим пространство 1 и последовательность $\{f_n\}$ функционалов в нем

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots)).$$

Очевидно, $f_n \longrightarrow f_0$, где

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k.$$

Между тем линейное замыкание последовательности $\{f_n\}$ представляет собой пространство c_0 числовых последовательностей, стремящихся к нулю, которое не содержит функционала f_0 .

2.4. Обратимся теперь к выяснению характера слабой сходимости в конкретных пространствах.

Теорема 3 (2. VIII). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ непрерывных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, слабо сходилась в пространстве C к непрерывной функции x_0 , необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) $|x_n(t)| \leq M$ ($t \in [a, b]$; $n = 1, 2, \dots$);
- 2) $x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0(t)$ при каждом $t \in [a, b]$.

Доказательство. Необходимость обоих условий почти очевидна. Действительно, по теореме 1 $\sup \|x_n\| = M < \infty$, а тогда и $|x_n(t)| \leq M$.

Необходимость второго условия обосновывается так: рассмотрим функционал f_t в пространстве C , определяемый формулой

$$f_t(x) = x(t).$$

Ввиду наличия слабой сходимости $x_n \longrightarrow x_0$ должно быть

$$f_t(x_n) \rightarrow f_t(x_0),$$

а это и есть условие 2).

Достаточность. Докажем, что при выполнении условий теоремы допустим предельный переход под знаком интеграла Стильтеса, т. е. справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dg(t) = \int_a^b x_0(t) dg(t), \quad (6)$$

где $g(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации.

Поскольку функцию $g(t)$ можно представить в форме разности строго возрастающих функций, *) можно считать, что функция $g(t)$ строго возрастает. Тогда интеграл Стильтеса может быть выражен через обычный лебегов (и даже римановский) интеграл. Именно, введем функцию $g^{-1}(u)$, обратную по отношению к $g(t)$ и определенную в промежутке $[g(a), g(b)]$. При этом, если t_0 — точка разрыва функции $g(t)$, то в промежутке $[g(t_0 - 0), g(t_0 + 0)]$ полагаем $g^{-1}(u) = t_0$. Если $x(t)$ — непрерывная в $[a, b]$ функция, то тогда (Фихтенгольц, т. III, стр. 122)

$$\int_a^b x(t) dg(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} x(g^{-1}(u)) du.$$

В частности,

$$\int_a^b x_n(t) dg(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} x_n(g^{-1}(u)) du \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку функции $x_n(t)$ все ограничены, в правой части возможен предельный переход под знаком интеграла, и, следовательно, он возможен и в левой.

Соотношение (6) можно записать в виде

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0). \quad (7)$$

Поскольку $g(t)$ — произвольная функция ограниченной вариации, (7) имеет место для любого функционала $f \in \mathbf{C}^*$, что и означает слабую сходимость $x_n \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает интересное

Следствие. Пусть последовательность $\{x_n(t)\}$ непрерывных функций ограничена и сходится в каждой точке промежутка $[a, b]$ к непрерывной функции $x_0(t)$. Тогда существуют такие линейные комбинации $y_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} x_k(t)$, что последовательность $\{y_n(t)\}$ сходится к $x_0(t)$ равномерно.

*) Действительно, $g(t)$ допускает представление в форме $g(t) = g_1(t) - g_2(t)$, где g_1 и g_2 — неубывающие функции. Тогда $g(t) = [g_1(t) + t] - [g_2(t) + t]$ — требуемое представление.

2.5. Нетрудно проверить, что в конечномерном пространстве слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.

Далее, пространства L^p и l^p ($p > 1$) являются сопряженными к пространствам L^q и l^q соответственно ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Поскольку эти пространства рефлексивны, то слабая сходимость последовательности элементов в этих пространствах означает то же, что слабая сходимость функционалов в пространстве L^p и l^p , условия которой были указаны в § 1.

Остановимся еще на пространстве 1. Справедлива

Теорема 4 (2. VIII). Слабая сходимость в пространстве 1 совпадает со сходимостью по норме.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x_0$. Заменяя x_n на $x_n - x_0$, можно считать, что $x_n \rightarrow 0$. Нужно доказать тогда, что и $\|x_n\| \rightarrow 0$. Предположим противное. Пусть существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\| = m > 0. \quad (8)$$

При переходе к подпоследовательности слабая сходимость не нарушается;

далее, заменяя, если нужно, x_{n_k} на $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$, мы получим последовательность, по-прежнему слабо сходящуюся к нулевому элементу, причем нормы всех элементов этой последовательности равны единице.

Итак, можно считать, что данная последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$x_{n_k} \rightarrow 0 \quad (9)$$

и

$$\|x_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Пусть $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$. Введем функционалы f_k :

$$f_k(x) = \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; \quad k = 1, 2, \dots).$$

Вследствие (9) должно быть $f_k(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т. е.

$$\xi_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Положим теперь $n_1 = 1$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_1)}| = \|x_{n_1}\| = 1.$$

Следовательно, найдется такой номер $p_1 > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{p_1} |\xi_k^{(n_1)}| > \frac{3}{4}.$$

Пусть уже выбраны целые числа $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_j$ и $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_j$ так, что

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| < \frac{1}{4} \quad (s = 1, 2, \dots, j) \quad (12)$$

и

$$\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| > \frac{3}{4} \quad (s = 1, 2, \dots, j). \quad (13)$$

Тогда вследствие (11) найдется такой номер $n_{j+1} > n_j$, что

$$\sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| < \frac{1}{4}.$$

Используя это неравенство, а также (10), получим

$$\sum_{k=p_{j+1}}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| - \sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > \frac{3}{4}$$

и, следовательно, можно указать такой номер $p_{j+1} > p_j$, что

$$\sum_{k=p_{j+1}}^{p_{j+1}} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > \frac{3}{4}.$$

Проведенное рассуждение показывает, что существуют две такие последовательности $1 = n_1 < n_2 < \dots$ и $0 = p_0 < p_1 < \dots$ целых чисел, что неравенства (12) и (13) справедливы при каждом $s = 1, 2, \dots$

Обозначим теперь

$$\eta_k = \operatorname{sgn} \xi_k^{(n_s)} \quad (p_{s-1} < k \leq p_s; \quad k, s = 1, 2, \dots).$$

Последовательность $\{\eta_k\} \in \mathbf{m}$, поэтому в пространстве $\mathbf{l}$ можно рассматривать линейный функционал f_0 :

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}).$$

Оценим снизу величину $f_0(x_{n_s})$. Учитывая, что $|\eta_k| \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} |f_0(x_{n_s})| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right| \geq \left| \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \eta_k \xi_k^{(n_s)} \right| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| - \\ &- \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| \geq \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_s)}| = \\ &= 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \|x_{n_s}\|. \end{aligned}$$

Поэтому, вследствие (10) и (13), $f_0(x_{n_s}) > \frac{1}{2}$, что противоречит (9).

2.6. Рассмотрим теперь слабую сходимость в гильбертовом пространстве H . Так как гильбертово пространство рефлексивно, то согласно замечанию, сделанному в 2.2, обе точки зрения на слабую сходимость — сходимость элементов и сходимость функционалов — здесь совпадают.

Так как каждый линейный функционал f в H имеет вид

$$f(x) = (x, y) \quad (x \in H),$$

(см. III.3.2), то слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x_0$ означает, что для любого $y \in H$

$$(x_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, y).$$

Пространство H может быть несепарабельным. Тем не менее для слабой сходимости в H имеют место некоторые из тех фактов, которые справедливы, вообще говоря, только для сепарабельных пространств. Докажем, например, что каждое ограниченное множество в H слабо компактно.

Действительно, пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через H_1 линейное замыкание множества элементов $\{x_n\}$. Так как H_1 является сепарабельным гильбертовым пространством, то ввиду равносильности обоих видов слабой сходимости по теореме 2 (I. VIII) из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь слабо сходящуюся (в H_1) подпоследовательность. Пусть, например, $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$.

Если имеется линейный функционал $f \in H^*$, то, рассматривая его лишь для элементов из H_1 , мы получим линейный функционал f_1 в H_1 . Но $f(x_{n_k}) = f_1(x_{n_k}) \rightarrow f_1(x_0) = f(x_0)$. Таким образом $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ в пространстве H .

То обстоятельство, что H является гильбертовым пространством, мы использовали лишь для того, чтобы установить, что в подпространстве H_1 оба вида слабой сходимости совпадают, а это будет всякий раз, когда H_1 рефлексивно. Поскольку всякое подпространство рефлексивного пространства само рефлексивно (см. гл. XI), то тем самым мы приходим к следующему результату: в рефлексивном пространстве ограниченные множества слабо компактны.

Далее, в гильбертовом пространстве имеет место доказанный выше для пространств L^2 факт, что слабая сходимость вместе со сходимостью норм влечет сходимость по норме, устанавливаемый в этом случае совсем просто. Действительно, если $x_n \rightharpoonup x_0$ и, кроме того, $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, то

$$\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0) = (x_n, x_n) - (x_0, x_0) - (x_n, x_0) - \overline{(x_n, x_0)}.$$

Но $(x_n, x_0) \rightarrow (x_0, x_0)$. Поэтому $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$.

По поводу содержания этого параграфа см., в основном, Банах-И. Слабая сходимость в L^2 рассматривалась еще Гильбертом. Теорема 3 о слабой сходимости в пространстве S имеется у Ф. Рисса [976]. Теорема 4 о равносильности слабой и сильной сходимости в пространстве l доказана Шуром [125].

§ 3. Универсальность пространства С

Важной задачей теории метрических и, в частности, нормированных пространств является задача о их конкретной реализации. Под этим мы понимаем следующее: пусть имеется класс Ξ пространств, определенный аксиоматически, например, класс полных метрических пространств, класс B -пространств, класс гильбертовых пространств и т. п., и класс $\tilde{\Xi}$ пространств, элементы которых имеют конкретную природу; говорят, что класс $\tilde{\Xi}$ реализует класс Ξ , если для каждого $X \in \Xi$ существует пространство $\tilde{X} \in \tilde{\Xi}$, которое можно отождествить с X .*) Так, доказанный в II. 7.9 факт о том, что любое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство линейно изометрично пространству l^2 , можно рассматривать как теорему о конкретной реализации указанного класса гильбертовых пространств.

В этом параграфе доказываются еще две теоремы о реализации.

3.1. Прежде чем формулировать основные результаты этого параграфа, выскажем некоторые соображения относительно изометрии и, в частности, линейной изометрии метрических, соответственно нормированных пространств. Эти соображения окажутся полезными не только здесь, но и в дальнейшем.

Пусть X и Y —метрические пространства и G —операция, отображающая X на Y . Если

$$\rho(G(x'), G(x'')) = \rho(x', x'') \quad (1)$$

для любой пары элементов $x', x'' \in X$, то пространства X и Y оказываются изометричными. Действительно, сопоставим элементу $x \in X$ элемент $y = G(x) \in Y$. Полученное соответствие будет взаимно однозначным, так как если $G(x') = G(x'')$, то по (1) $x' = x''$. Также из (1) следует, что это соответствие сохраняет расстояние и, таким образом, осуществляет изометрию.

Наоборот, если пространства X и Y изометричны, т. е. имеется взаимно однозначное соответствие $x \longleftrightarrow y$ между элементами пространств X и Y , сохраняющее расстояние, то тем самым в X определена некоторая операция G , отображающая X на Y . Операция G , очевидно, удовлетворяет условию (1). Об операции G мы будем говорить, что она осуществляет изометрию между пространствами X и Y .

Из условия (1) очевидным образом вытекает непрерывность операции G . Если $x_n \rightarrow x_0$, то $\rho(G(x_n), G(x_0)) = \rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$, т. е. $G(x_n) \rightarrow G(x_0)$.

*) Если рассматриваемые пространства метрические, то возможность отождествления означает изометрию соответствующих пространств. В случае же, например, нормированных пространств надо говорить о линейной изометрии и т. д.

Пусть G —операция, осуществляющая изометрию между пространствами X и Y . Сопоставляя элементу $y \in Y$ его прообраз, т. е. элемент $x \in X$ такой, что $G(x) = y$, мы приходим к понятию обратной операции, которую будем обозначать $G^{-1}(x = G^{-1}(y))$; (ср. V.2.3). Ясно, что G^{-1} осуществляет изометрию между Y и X .

Если X и Y не только метрические, но и нормированные пространства, то можно говорить о их линейной изометрии (см. II. 2. 7). При этом операция G должна, кроме (1), удовлетворять еще условию

$$G(\lambda x' + \mu x'') = \lambda G(x') + \mu G(x''), \quad (2)$$

т. е. G должна быть аддитивной и однородной операцией, а так как она и непрерывна, то G —линейная операция. Само условие (1) может быть в этом случае записано более просто:

$$\|G(x)\| = \|x\| \quad (x \in X). \quad (1')$$

Иногда говорят о *гомеоморфизме* или *топологической эквивалентности* метрических пространств X и Y , подразумевая под этим существование такого взаимно однозначного соответствия между элементами этих пространств, что из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к элементу x_0 в пространстве X вытекает сходимость последовательности $\{y_n\}$ соответствующих элементов пространства Y к соответствующему элементу y_0 , и наоборот. Разумеется, условие (1) при этом, вообще говоря, уже не соблюдается, а заменяется более слабым: операции G и G^{-1} , осуществляющие соответствие, непрерывны.

Когда X и Y —нормированные пространства, то в термин «топологическая эквивалентность» вкладывают также и требование сохранения при соответствии алгебраических операций, т. е., иными словами, требуют, чтобы операции G и G^{-1} были линейными. Обозначая в этом случае через x и $y = G(x)$ соответствующие элементы, будем иметь

$$\|y\| \leq \|G\| \|x\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \|G^{-1}(y)\| \leq \|G^{-1}\| \|y\|,$$

т. е. существуют такие положительные постоянные m и M , что

$$m\|x\| \leq \|y\| \leq M\|x\| \quad \left(m = \frac{1}{\|G^{-1}\|}, M = \|G\|\right).$$

Все сказанное выше остается справедливым, если вместо пространств X и Y говорить о множествах $E \subset X$ и $E_1 \subset Y$, предполагая их линейными, если X и Y —нормированные пространства.

3.2. Переходим к изложению основных результатов этого параграфа.

Лемма. Пусть Q_0 —единичный параллелепипед пространства s , т. е. множество тех элементов, все координаты которых заключены между нулем и единицей. Тогда существует непрерывная операция Φ_0 , отображающая канторово совершенное множество P на Q_0 .

Доказательство. Пусть $t \in P$. Вещественное число t можно единственным образом представить в виде трюичной дроби

$$t = \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \dots + \frac{2a_n}{3^n} + \dots,$$

где каждое из a_n равно нулю или единице (см. Натансон-П, стр. 56).

Положим

$$\varphi_1^{(0)}(t) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_{2k-1}}{2^k} + \dots,$$

$$\varphi_2^{(0)}(t) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_6}{2^2} + \dots + \frac{a_{2(2k-1)}}{2^k} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_m^{(0)}(t) = \frac{a_{2^m}}{2} + \frac{a_{2^m \cdot 3}}{2^2} + \dots + \frac{a_{2^m(2k-1)}}{2^k} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

и

$$\Phi_0(t) = (\varphi_1^{(0)}(t), \varphi_2^{(0)}(t), \dots, \varphi_m^{(0)}(t), \dots).$$

Докажем, что операция Φ_0 требуемая. Прежде всего установим, что каждый элемент $z \in Q_0$ является образом по крайней мере одного $t \in P$. Действительно, если

$$z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m, \dots),$$

причем

$$\zeta_m = \frac{b_1^{(m)}}{2} + \frac{b_2^{(m)}}{2^2} + \dots + \frac{b_k^{(m)}}{2^k} + \dots \quad (b_k^{(m)} = 0, 1; k, m = 1, 2, \dots),$$

то, отождествляя соответствующие элементы матриц

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \dots & b_k^{(1)} & \dots \\ b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & \dots & b_k^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{(m)} & b_2^{(m)} & \dots & b_k^{(m)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-1} & \dots \\ a_2 & a_6 & \dots & a_{2(2k-1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2^m} & a_{2^m \cdot 3} & \dots & a_{2^m(2k-1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и полагая

$$t = \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \dots + \frac{2a_k}{3^k} + \dots,$$

без труда убедимся, что $\Phi_0(t) = z$.

Проверим теперь непрерывность операции Φ_0 . Если два значения t' и t'' из P достаточно близки, то в их разложении в трюичную дробь будут совпадать $2^m(2k-1)$ первых знака, а тогда

у разложений $\varphi_j^{(0)}(t')$ и $\varphi_j^{(0)}(t'')$ ($j = 1, \dots, m$) в двоичную дробь совпадают k знаков, и поэтому

$$|\varphi_j^{(0)}(t') - \varphi_j^{(0)}(t'')| \leq \frac{1}{2^k} \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Следовательно, поскольку k и m могут быть сколь угодно большими, элементы $\Phi_0(t')$ и $\Phi_0(t'')$ близки в пространстве $\mathbf{s}$.

Лемма доказана.

Следствие. Существует непрерывная операция, отображающая канторово совершенное множество P на множество Q тех элементов из $\mathbf{s}$, все координаты которых заключены между -1 и 1 .

В самом деле, операция Φ :

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t), \dots) \quad (t \in P),$$

где

$$\varphi_m(t) = 2\varphi_m^{(0)}(t) - 1 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

обладает требуемым свойством.

3.3. Докажем теперь основную теорему, принадлежащую Банаху и Мазуру (см. Банах-1).

Теорема 1 (3. VIII). Всякое нормированное сепарабельное пространство линейно изометрично некоторому линейному множеству пространства $\mathbf{C}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное сепарабельное пространство. Обозначим через K замкнутую единичную сферу в $\mathbf{X}$, а через Γ — также замкнутую единичную сферу в пространстве $\mathbf{X}^*$. Пусть $D = \{x_k\}$ — счетное плотное в K множество. Отнесем каждому $f \in \Gamma$ элемент $z_f \in \mathbf{s}$, полагая

$$z_f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), \dots)$$

и обозначим через $\mathbf{s}_\Gamma$ множество всех элементов пространства $\mathbf{s}$ вида z_f ($f \in \Gamma$). Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2 (1. VIII), мы убедимся, что соответствие между функционалами $f \in \Gamma$ и последовательностями $z_f \in \mathbf{s}_\Gamma$ взаимно однозначно и, кроме того, что

$$z_{f_n} \rightarrow z_{f_0} \quad (\text{в пространстве } \mathbf{s}) \quad (3)$$

эквивалентно соотношению

$$f_n \rightarrow f_0. \quad (4)$$

Поскольку для $x \in K$ и $f \in \Gamma$ будет $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq 1$, то все координаты элементов из $\mathbf{s}_\Gamma$ по модулю не превосходят единицы, т. е. $\mathbf{s}_\Gamma \subset Q$, и, следовательно, $\mathbf{s}_\Gamma$ компактно в $\mathbf{s}$ (см. I.3.3).

Докажем, что множество s_Γ замкнуто в s . Пусть $z_{f_n} \rightarrow z_0$, т. е.
 $f_n(x_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta_k^{(0)} \quad (z_0 = (\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \dots, \zeta_k^{(0)}, \dots); \quad k = 1, 2, \dots).$

Ввиду того, что нормы функционалов f_n ограничены, по теореме Банаха — Штейнхауса (см. VII.1.2) для любого $x \in X$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_0(x),$$

при этом f_0 — линейный функционал, и $\|f_0\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \leq 1$. Таким

образом, $f_n \rightarrow f_0 \in \Gamma$; следовательно, $\zeta_k^{(0)} = f_0(x_k)$ и $z_0 = z_{f_0} \in s_\Gamma$.

Пусть Φ — операция, построенная в 3.2. Обозначим через T множество тех $t \in P$, для которых $\Phi(t) \in s_\Gamma$. Докажем, что T — замкнутое множество. Пусть $t_n \in T$ ($n = 1, 2, \dots$) и $t_n \rightarrow t_0$. Тогда $\Phi(t_n) = z_{f_n} \in s_\Gamma$. Вследствие замкнутости множества P имеем $t_0 \in P$ и, по непрерывности операции Φ ,

$$z_{f_n} = \Phi(t_n) \rightarrow \Phi(t_0) = z_0.$$

При этом, поскольку s_Γ замкнуто, $z_0 \in s_\Gamma$, так что $\Phi(t_0) \in s_\Gamma$ и $t_0 \in T$.

Рассмотрим некоторое $t \in T$; ему отвечает $\Phi(t) = z_f$ — элемент множества s_Γ , который определяется функционалом $f \in \Gamma$. Обозначим этот функционал через f_t . Таким образом, $\Phi(t) = z_{f_t}$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и построим на T функцию

$$y_x(t) = f_t(x).$$

Функция $y_x(t)$ непрерывна на T . В самом деле, если $t_n \rightarrow t_0$, то $\Phi(t_n) \rightarrow \Phi(t_0)$ (в пространстве s), а это равносильно тому, что $f_{t_n} \rightarrow f_{t_0}$. Поэтому

$$y_x(t_n) = f_{t_n}(x) \rightarrow f_{t_0}(x) = y_x(t_0).$$

Расширим область определения функции y_x до всей вещественной прямой, полагая $y_x(t)$ линейной в смежных к множеству T интервалах и постоянной на бесконечных промежутках, примыкающих к T слева и справа. Распространенная таким образом функция, за которой мы сохраним прежнее обозначение, останется непрерывной; также не изменится величина $\max |y_x(t)|$ (см. Натансон-II, стр. 114).

Рассмотрим далее функцию $y_{\alpha x + \beta x'}(t)$. Если $t \in T$, то

$$y_{\alpha x + \beta x'}(t) = f_t(\alpha x + \beta x') = \alpha f_t(x) + \beta f_t(x') = \alpha y_x(t) + \beta y_{x'}(t). \quad (5)$$

Если же $t \in T$, то (5) также имеет место в силу принятого способа определения функции $y_x(t)$ в точках, не принадлежащих T . Таким образом, при любом вещественном t :

$$y_{\alpha x + \beta x'}(t) = \alpha y_x(t) + \beta y_{x'}(t).$$

В дальнейшем будем рассматривать функцию $y_x(t)$ только в промежутке $[0, 1]$. Найдем величину $\max_{0 \leq t \leq 1} |y_x(t)|$. Прежде всего имеем

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |y_x(t)| = \max_{t \in T} |y_x(t)| = \max_{t \in T} |f_t(x)| \leq \max_{t \in T} \|f_t\| \|x\| \leq \|x\|, \quad (6)$$

так как $f_t \in \Gamma$.

С другой стороны, согласно теореме о достаточном числе функционалов (см. IV.2.2) можно найти функционал $f_0 \in \Gamma$ так, что $f_0(x) = \|x\|$. Имеем $f_0 = f_{t_0}$ ($t_0 \in T$). Тогда

$$y_x(t_0) = f_{t_0}(x) = \|x\|.$$

Сопоставляя это с (6), находим окончательно

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |y_x(t)| = \|x\|.$$

Полагая $y_x = G(x)$ для $x \in X$ мы, таким образом, убеждаемся, что операция G удовлетворяет условиям (2) и (1'), и поэтому осуществляет линейную изометрию между пространством X и множеством функций $\{y_x\} \subset C$, что и требовалось доказать.

3.4. Из теоремы 1 вытекает другой интересный результат, относящийся к этому же кругу вопросов.

Теорема 2(3. VIII). *Всякое метрическое сепарабельное пространство изометрично некоторому подмножеству пространства C .*

Доказательство. Пусть $D = \{x_k\}$ — счетное плотное в X множество. Положим

$$\eta_k^{(x)} = \rho(x_k, x) - \rho(x_k, x_1) \quad (k = 1, 2, \dots, x \in X)$$

и обозначим через y_x последовательность $\{\eta_k^{(x)}\}$. Так как

$$|\eta_k^{(x)}| = |\rho(x_k, x) - \rho(x_k, x_1)| \leq \rho(x, x_1) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то $y_x \in m$. Если рассмотреть еще элемент $x' \in X$, то

$$\|y_x - y_{x'}\|_m = \sup_k |\rho(x_k, x) - \rho(x_k, x')| \leq \rho(x, x').$$

Возьмем x_{k_0} так, чтобы $\rho(x', x_{k_0}) < \varepsilon$. Получим

$$\begin{aligned} \eta_{k_0}^{(x)} - \eta_{k_0}^{(x')} &= \rho(x_{k_0}, x) - \rho(x_{k_0}, x') > \rho(x_{k_0}, x) - \\ &- \varepsilon \geq \rho(x, x') - \rho(x_{k_0}, x') - \varepsilon > \rho(x, x') - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Тем более

$$\|y_x - y_{x'}\| = \sup_k |\eta_k^{(x)} - \eta_k^{(x')}| > \rho(x, x') - 2\varepsilon.$$

Откуда ввиду произвольности ϵ

$$\|y_x - y_{x'}\| \geq \rho(x, x').$$

Таким образом,

$$\|y_x - y_{x'}\| = \rho(x, x').$$

Итак, сопоставив элементу $x \in X$ последовательность $y_x \in \mathfrak{m}$, мы убеждаемся, что X изометрично множеству $E_0 \subset \mathfrak{m}$. Если обозначить $E_1 = \mathcal{L}(E_0)$, то E_1 можно рассматривать как нормированное пространство, которое, очевидно, будет сепарабельным. По теореме 1 E_1 изометрично некоторому множеству $E_2 \subset C$. Пусть E — множество элементов из E_2 , соответствующих элементам из E_0 . Ясно, что E_0 изометрично E , а тогда и X изометрично E .

Теорема доказана.

Отметим в заключение без доказательства еще один факт, касающийся конкретного представления метрических пространств.

Всякое сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно некоторому множеству из параллелепипеда пространства l^2 , где под параллелепипедом понимается совокупность всех таких элементов, n -я координата которых заключена между $-\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n}$.

ГЛАВА IX

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАЦИИ

§ 1. Компактные множества в нормированных пространствах

1.1. В I.3.3 был указан критерий компактности множества в пространстве C . Выясним условия компактности множества в пространстве L_T^p ($p > 1$; T — измеримое ограниченное множество евклидова пространства R^v).

Рассмотрим семейство $\{\omega_h\}$ функций вещественного аргумента, зависящих от вещественного положительного параметра h и обладающих свойствами:

- 1) $0 \leq \omega_h(\xi) \leq M$ ($\xi \geq 0$, $h > 0$);
- 2) $\omega_h(\xi) = 0$ для $\xi \geq h$;
- 3) ω_h непрерывна для $\xi < h$;
- 4) если через t обозначить вектор из R^v , а через $|t|$ его длину, то при всех $h > 0$

$$\int_{R^v} \omega_h(|t|) dt = v_h,$$

где v_h есть объем v -мерной сферы радиуса h ; вследствие условия 2) интегрирование в написанном интеграле можно производить по v -мерной сфере G_h с центром в начале координат.

Функции из L_T^p распространим на все R^v , считая их равными нулю вне множества T .

Обозначим еще через $G_h(s)$ v -мерную сферу радиуса h с центром в $s \in R^v$. Положим для $x \in L_T^p$

$$x_h(s) = \frac{1}{v_h} \int_{R^v} \omega_h(s-t) x(t) dt = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(t) dt \quad (s \in R^v), \quad (1)$$

где для простоты обозначено $\omega_h(s-t) = \omega_h(|s-t|)$.

Функция x_h называется *усреднением по Стеклову* функции x или *средней функцией* (по отношению к x); семейство функций $\{\omega_h\}$ называется *ядром усреднения*. Если за ω_h взять функцию

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi < h, \\ 0 & \xi \geq h, \end{cases}$$

то $x_h(s)$ есть среднее значение функции x на сфере $G_h(s)$ в обычном понимании этого слова.

Лемма 1. Пусть $x \in L^p_T$. Тогда при любом $h > 0$ средняя функция x_h непрерывна. При этом

$$|x_h(s)| \leq \frac{M}{(v_h)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_{G_h(s)} |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{M}{(v_h)^{\frac{1}{p}}} \|x\| \quad (s \in R^v). \quad (2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} x_h(s) - x_h(s') &= \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(t) dt - \\ &- \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s')} \omega_h(s'-t) x(t) dt \quad (s, s' \in R^v). \end{aligned}$$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Обозначим

$$e'_\lambda = G_{\lambda h}(s) \cap G_{\lambda h}(s'), \quad e''_\lambda = [G_h(s) \cup G_h(s')] \setminus e'_\lambda.$$

Применяя неравенство Гёльдера, можем написать

$$\begin{aligned} |x_h(s) - x_h(s')| &\leq \frac{1}{v_h} \left[\int_{e'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| |x(t)| dt + \right. \\ &\quad \left. + 2M \int_{e''_\lambda} |x(t)| dt \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{v_h} \left[\left(\int_{e'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{e'_\lambda} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + 2M \left(\int_{e''_\lambda} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} (\text{mes } e''_\lambda)^{\frac{1}{q}} \right] \leq \\ &\leq \frac{\|x\|}{v_h} \left\{ \left[\int_{e'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} + 2M [\text{mes } e''_\lambda]^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Если $|s' - s| \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 1$, то, очевидно, $\text{mes } e''_\lambda \rightarrow 0$. Поэтому по $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\delta > 0$ и $\lambda_0 < 1$, что при $|s' - s| < \delta$ и $\lambda = \lambda_0$ второе слагаемое в фигурных скобках будет меньше ε .

На множестве $G_{\lambda_0 h}(s)$ функция $\omega_h(s-t)$ равномерно непрерывна, как функция от t , следовательно, можно указать такое $\delta_0 \leq \delta$, что

$$|\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| \leq \varepsilon \quad (|s - s'| \leq \delta_0; t \in e'_{\lambda_0}).$$

Эти соображения позволяют, продолжив оценку, написать

$$|x_h(s) - x_h(s')| \leq \frac{\varepsilon \|x\|}{v_h} (v_h + 1) \quad (|s - s'| \leq \delta_0). \quad (3)$$

Непрерывность функции x_h доказана.

Оценка (2) получается из формулы (1) применением неравенства Гёльдера.

Замечание. Величина δ_0 , найденная в доказательстве леммы, не зависит от функции x .

Лемма 2. Если x равномерно непрерывная в $\mathbf{R}^n$ функция, то при $h \rightarrow 0$ средние функции x_h равномерно в $\mathbf{R}^n$ стремятся к x .

Доказательство. Поскольку

$$x(s) = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) x(s) dt,$$

то

$$|x_h(s) - x(s)| \leq \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) |x(t) - x(s)| dt.$$

Так как при достаточно малом h будет $|x(t) - x(s)| \leq \varepsilon$, то

$$|x_h(s) - x(s)| \leq \frac{\varepsilon}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t) dt = \varepsilon$$

одновременно для всех $s \in \mathbf{R}^n$.

Сопоставляя элементу $x \in L_T^p$ среднюю функцию x_h , мы получим аддитивную операцию, определенную в L_T^p . Обозначим ее U_h : $U_h(x) = x_h$. Нетрудно видеть, что U_h является линейной операцией из L_T^p в C_Q , где Q —любое замкнутое ограниченное множество, содержащее T . Действительно, по лемме 1 функция x_h непрерывна в $\mathbf{R}^n$ и тем более непрерывна в Q , а из (2) находим

$$\|x_h\|_{C_Q} = \max_{s \in Q} |x_h(s)| \leq \frac{M}{(v_h)^{\frac{1}{p}}} \|x\|_{L_T^p},$$

откуда

$$\|U_h\| \leq \frac{M}{(v_h)^{\frac{1}{p}}}.$$

Если U_h рассматривать как линейную операцию в пространстве L_T^p , то оценка ее нормы может быть существенно улучшена.

Лемма 3. Если U_h рассматривать как операцию в пространстве L_T^p , то

$$\|U_h\| \leq M \quad (h > 0). \quad (4)$$

Доказательство. Из неравенства (2) получаем

$$\|x_h\|_{L_T^p} = \left[\int_T |x_h(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \frac{M^p}{v_h} \int_T \left[\int_{G_h(s)} |x(t)|^p dt \right] ds \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем

$$\|x_h\|_{L_T^p} \leq \left\{ \frac{M^p}{v_h} \int_T \left[\int_{G_h(t)} |x(t)|^p ds \right] dt \right\}^{\frac{1}{p}} = M \left[\int_T |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

что и означает (4).

Лемма 4. При $h \rightarrow 0$ имеет место $x_h \rightarrow x$ в пространстве L_T^p .

Доказательство. Пусть T_0 — замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$, содержащий T , и настолько большой, что существует замкнутый куб T_1 , также содержащий T , и, в свою очередь, содержащийся внутри куба T_0 . Докажем, что множество $\dot{C}_{T_0}$ непрерывных на T_0 функций, обращающихся в нуль на границе куба T_0 , плотно в L_T^p . Пусть $x \in L_T^p$. Поскольку множество почти везде ограниченных функций плотно в L_T^p , можно считать, что функция x ограничена на T_0 . Предположим, например, что $|x(t)| \leq K$ для $t \in T_0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании теоремы Лузина (см. Натансон-II, стр. 118) существует непрерывная на T_0 функция φ , совпадающая с x всюду кроме множества $e \subset T_0$ такого, что $\text{mes } e \leq \varepsilon$; при этом $|\varphi(t)| \leq K$ для $t \in T_0$. Выбирая куб T_1 так, чтобы было $\text{mes}(T_0 \setminus T_1) \leq \varepsilon$, построим, пользуясь теоремой о распространении непрерывных функций (Натансон-II, стр. 374), непрерывную на T_0 функцию x_0 , совпадающую с φ на T_1 и равную нулю на границе куба T_0 . Согласно цитированной теореме эту функцию можно выбрать так, что $|x_0(t)| \leq K$ для $t \in T_0$. Оценим норму (в $L_{T_0}^p$) разности $x - x_0$. Имеем

$$\|x - x_0\| \leq \|x - \varphi\| + \|\varphi - x_0\|.$$

Но

$$\|x - \varphi\| = \left[\int_{T_0} |x(t) - \varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int_e |x(t) - \varphi(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq 2K\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\varphi - x_0\| = \left[\int_{T_0} |\varphi(t) - x_0(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int_{T_0 \setminus T_1} |\varphi(t) - x_0(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq 2K\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

откуда $\|x - x_0\| \leq 4K\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Остается заметить, что $x_0 \in \dot{C}_{T_0}$.

Если x — функция из $\dot{C}_T$, то, считая ее равной нулю вне T_0 , мы на основании леммы 2 можем заключить, что $x_h \rightarrow x$ равномерно в R^v и, следовательно, в T_0 . Тем более $x_h \rightarrow x$ в $L_{T_0}^p$. Согласно лемме 3 нормы операций U_h ограничены в совокупности, а так как по доказанному $\dot{C}_{T_0}$ плотно в $L_{T_0}^p$, то применима теорема Банаха — Штейнхауса (VII. 1.2), сходимость $x_h \rightarrow x$ имеет место на всем $L_{T_0}^p$. Но функция из L_T^p , продолженная нулем вне T , есть элемент из $L_{T_0}^p$, тем самым сходимость имеет место и на L_T^p . Лемма доказана.

1.2. Укажем теперь критерий компактности множества в пространстве L_T^p (см. [576]).

Теорема 1 (1. IX) (Колмогоров). *Для того чтобы множество $E \subset L_T^p$ ($p > 1$) было компактно, необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) *E было ограниченным;*
- 2) *средние функции сходились (в L_T^p) к порождающим функциям равномерно на E , т. е.*

$$x_h \rightarrow x \text{ равномерно на } E.$$

Доказательство. Необходимость первого условия очевидна. Докажем необходимость второго условия. Так как E компактно, для него имеется конечная ε -сеть. Пусть это будет $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$. Для достаточно малых h ($h \leq h_\varepsilon$) по лемме 4 $\|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Для любого $x \in E$ найдем $x^{(k)}$ так, что

$$\|x - x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

А тогда

$$\begin{aligned} \|x_h - x\| &= \|U_h(x) - x\| \leq \|U_h(x - x^{(k)})\| + \\ &+ \|x_h^{(k)} - x^{(k)}\| + \|x - x^{(k)}\| < 2\varepsilon + M\varepsilon. \end{aligned}$$

Достаточность. Обозначим через E_h множество элементов вида $U_h(x)$, где $x \in E$. По лемме 1 $E_h \subset C_{\overline{T}}$. Докажем, что E_h компактно в $C_{\overline{T}}$. Первое условие компактности множества в пространстве $C_{\overline{T}}$ — ограниченность — выполнено вследствие неравенства (2). Равностепенная непрерывность функций из E_h следует из неравенства (3).

Итак, E_h при любом h компактно в $C_{\overline{T}}$ и тем более компактно в L_T^p . По условию 2) найдется столь малое h_0 , что $\|x - x_{h_0}\| = \|x - U_{h_0}(x)\| < \varepsilon$ для произвольного $x \in E$. Таким образом, E_{h_0} является компактной ε -сетью для E . По теореме Хаусдорфа (см. I. 3.2) множество E компактно.

Теорема доказана.

Замечание. Указанный в теореме признак компактности имеет место и в пространстве L_T (см. [107]).

1.3. Укажем еще один признак компактности множества в пространстве L^p_T [96]. При этом для простоты формулировок ограничимся случаем, когда T есть промежуток $[a, b]$.

Теорема 2 (1. IX) (М. Рисс). *Для того чтобы множество $E \subset L^p$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы*

- 1) E было ограничено;
- 2) *сдвинутые функции сходились к данной равномерно относительно $x \in E$, т. е. $\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$ равномерно относительно $x \in E$.*

Доказательство. Необходимость. Введем в L^p операцию V_τ — операцию сдвига аргумента —

$$y = V_\tau(x), \quad y(t) = x(t + \tau).$$

Очевидно, V_τ — линейная операция в L^p и

$$\|V_\tau\| \leq 1. \quad (5)$$

Докажем, что

$$V_\tau(x) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} x \quad (\text{в } L^p). \quad (6)$$

Действительно, если x — непрерывная функция, то

$$\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \leq \int_a^b \varepsilon^p dt = \varepsilon^p(b-a) \quad (\tau \leq \tau_\varepsilon),$$

и, следовательно, (6) выполнено. Поскольку множество непрерывных функций плотно в L^p , то ввиду (5) применима теорема Банаха — Штейнхауса, так что (6) имеет место для любого $x \in L^p$.

Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с приведенными в доказательстве теоремы 1.

Достаточность. Докажем, что если выполнены условия настоящей теоремы, то соблюдены и условия теоремы 1, если в качестве ядра усреднения принять

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < h \\ 0, & \xi \geq h \end{cases} \quad (h > 0).$$

Сохраняя прежние обозначения, можем написать

$$\|U_h(x) - x\|^p = \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left| \int_{-h}^h [x(t+\tau) - x(t)] d\tau \right|^p dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу и меняя вслед за тем порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \|U_h(x) - x\|^p &\leq \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left\{ \left[\int_{-h}^h 1^q d\tau \right]^{\frac{p}{q}} \left[\int_{-h}^h |x(t+\tau) - x(t)|^p d\tau \right] \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h d\tau \int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \|V_\tau(x) - x\|^p d\tau. \end{aligned}$$

Если второе условие теоремы выполнено, то по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что при $|\tau| \leq h_0$ будет $\|V_\tau(x) - x\|^p < \varepsilon$ для любого $x \in E$, но тогда вследствие установленного выше неравенства

$$\|U_h(x) - x\|^p \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon d\tau = \varepsilon.$$

Таким образом, второе условие теоремы 1 выполнено. Поскольку мерные условия в обеих теоремах совпадают, к множеству E применима теорема 1, на основании которой оно компактно.

1.4. Выкажем, наконец, один общий признак компактности множества в нормированном пространстве (см. Гельфанд).

Теорема 3 (I. IX) (Гельфанд). *Для того чтобы множество E в B -пространстве X было компактно, необходимо, а если X сепарабельно, то и достаточно, чтобы для любой слабо сходящейся к нулю последовательности функционалов $\{f_n\}$ предельное соотношение*

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

выполнялось бы равномерно на E , т. е. чтобы каждому $\varepsilon > 0$ можно было соотнести такой номер n_ε , что при $n > n_\varepsilon$ для любого $x \in E$

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Достаточность. Докажем сначала, что множество E ограничено. В самом деле, в противном случае можно было бы указать такую последовательность элементов $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), что $\|x_n\| = \gamma_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. По теореме о достаточном числе функционалов (IV. 2.2) нашлись бы функционалы f'_n с $\|f'_n\| = 1$ и $f'_n(x_n) = \|x_n\|$. Полагая $f_n = \frac{1}{\gamma_n} f'_n$, мы получили бы последовательность $\{f_n\}$, которая сходится к нулю, но при этом

$$f_n(x_n) = \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Следовательно, $f_n(x) \rightarrow 0$ неравномерно на E .

Поскольку X сепарабельно, оно линейно изометрично подпространству $\tilde{X}$ пространства C [теорема 1 (3. VIII)]. Пусть G — операция, осуществляющая изометрию. Докажем, что множество функций $\tilde{E} = G(E)$ компактно в C . Действительно, ограниченность множества $\tilde{E}$ вытекает из ограниченности множества E и из того, что $\|G(x)\| = \|x\|$. Допустим, что функции множества $\tilde{E}$ не равномерно непрерывны; если ввести обозначение $G(x; t) = G(x)(t)$ ($x \in X; t \in [0, 1]$), то это означает существование такого $\varepsilon > 0$, что какое бы $\delta > 0$ ни взять, найдутся такие $x_\delta \in E$ и $t_\delta, t'_\delta \in [0, 1]$, что $|t_\delta - t'_\delta| < \delta$ и

$$|G(x_\delta; t'_\delta) - G(x_\delta; t_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Беря последовательно $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, мы найдем таким образом последовательность $\{x_n\}$ элементов из E и две числовые последовательности $\{t_n\}, \{t'_n\}$ так, что $|t'_n - t_n| < \frac{1}{n}$ и

$$|G(x_n; t'_n) - G(x_n; t_n)| \geq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Можно (переходя, если нужно, к подпоследовательности) считать, что последовательность $\{t_n\}$ имеет предел: $t_n \rightarrow t_0$. Тогда и $t'_n \rightarrow t_0$.

Рассмотрим выражение

$$f_n(x) = G(x; t'_n) - G(x; t_n) \quad (x \in X; n = 1, 2, \dots).$$

Нетрудно видеть, что f_n является линейным функционалом в пространстве X . Действительно, аддитивность f_n очевидна, а линейность ясна из неравенства

$$|f_n(x)| \leq |G(x; t'_n)| + |G(x; t_n)| \leq 2\|G(x)\| = 2\|x\|.$$

Вследствие непрерывности функции $G(x; t)$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [G(x; t'_n) - G(x; t_n)] = G(x; t_0) - G(x; t_0) = 0,$$

следовательно, по условию $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ равномерно на E , что, очевидно, противоречит (8).

Итак, $\tilde{E}$ удовлетворяет условиям критерия компактности множества в пространстве C . Множество E , будучи изометрично компактному множеству $\tilde{E}$, само компактно, что и требовалось доказать.

Необходимость. Мы докажем, что если последовательность $\{U_n\}$ линейных операций, переводящих данное пространство X в нормированное пространство Y , такова, что для $x \in X$

$$U_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (9)$$

то в случае компактности E (9) имеет место равномерно на E .

Так как X есть B -пространство, то из (9) вытекает ограниченность норм операций U_n (см. VII.1.1): $\|U_n\| \leq M$. Поскольку E компактно, для него существует конечная $\frac{\varepsilon}{2M}$ -сеть: $x_1, x_2, \dots, x_m$. Для достаточно больших n имеем

$$\|U_n(x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (10)$$

Далее, для произвольного $x \in E$ найдем элемент x_k так, что

$$\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (11)$$

Тогда для тех же n будем иметь

$$\|U_n(x)\| \leq \|U_n(x_k)\| + \|U_n(x - x_k)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|U_n\| \|x - x_k\| \leq \varepsilon,$$

т. е. $U_n(x) \rightarrow 0$ равномерно на E .

§ 2. Вполне непрерывные операции

2.1. Как было указано в главе III, всякая линейная операция из одного конечномерного пространства в другое также конечномерное пространство определяется некоторой прямоугольной матрицей. Изучение такого рода операций представляет поэтому сравнительно легкую задачу, так как свойства конечных матриц хорошо известны из алгебры. Если же рассмотреть операцию в произвольном нормированном пространстве, то далеко не всегда удастся установить у нее наличие всех свойств, аналогичных свойствам «конечномерных» операций. В этом отношении ближе всего подходят к последним так называемые вполне непрерывные операции. Основные свойства вполне непрерывных операций, сближающие их с «конечномерными», устанавливаются лишь в главе XIII. Здесь же мы дадим лишь определение, укажем на простейшие следствия, вытекающие из него, и более подробно рассмотрим только вполне непрерывные операции в гильбертовом пространстве.

Произвольная операция U , отображающая одно нормированное пространство X в другое нормированное пространство Y , называется *компактной*, если она преобразует каждое множество, ограниченное в X , во множество, компактное в Y . Если при этом U непрерывна, то она называется *вполне непрерывной*.

В дальнейшем мы будем использовать это определение почти исключительно для случая, когда U — аддитивная операция. Как нетрудно показать, каждая компактная аддитивная операция вполне непрерывна. Действительно, единичная сфера пространства X переводится операцией в компактное и, тем более, ограниченное множество пространства Y , так что $\sup_{\|x\|=1} \|U(x)\| < \infty$, т. е. U — ограниченная операция.

Отметим наконец, что для указанного случая в определении можно ограничиться требованием, чтобы единичная сфера (или сфера любого другого радиуса) переводилась операцией U в компактное множество.

Определение вполне непрерывной операции и простейшие свойства этого класса операций, рассмотренные в настоящем параграфе, были высказаны

Гильбертом (см. Гильберт) для пространства L^2 . В общем случае см. Банах-1.

Упомянутые выше конечномерные операции будут, разумеется, вполне непрерывными. Другой тривиальный пример вполне непрерывной операции представляет линейный функционал в пространстве X , если его рассматривать как операцию из X в пространство R вещественных чисел.

Более интересным примером вполне непрерывной операции является введенная в § 1 операция U_h (см. IX.1.1.). Действительно, как нетрудно проверить, компактность множества $U_h(E)$ есть следствие только ограниченности множества E .

Рассмотрим, наконец, интегральную операцию U с непрерывным ядром

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt.$$

Будем считать U операцией из C в C . Покажем, что U вполне непрерывна. Действительно, если E — ограниченное множество в C ($\|x\| \leq M$ для $x \in E$), то $U(E)$ также, очевидно, ограничено ($\|y\| \leq M \|U\|$ для $y \in U(E)$). Далее, если $x \in E$, то $(y = U(x))$

$$\begin{aligned} |y(s') - y(s)| &\leq \int_a^b |K(s', t) - K(s, t)| |x(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_a^b |K(s', t) - K(s, t)| dt. \end{aligned}$$

Если s и s' достаточно близки, то правая часть сколь угодно мала независимо от $x \in E$. Это показывает, что функции множества $U(E)$ равномерно непрерывны. Таким образом, $U(E)$ компактно в C .

Используя теорему 2 (1. IX), можно показать, что U будет вполне непрерывной, если ее рассматривать и как операцию из L^p в L^r .

Все указанные факты вместе с доказательствами переносятся на пространства C_T и L_T^p , где T — замкнутое ограниченное множество в R^n .

2.2. Докажем три простые теоремы о вполне непрерывных операциях.

Теорема 1 (2. IX). Если U — вполне непрерывная операция, переводящая пространство X в пространство Y , то область значений $Y_0 = \Delta_U$ операции U сепарабельна.

Доказательство. Обозначим через K_n сферу в пространстве X с центром в точке 0 и радиусом n , а через Q_n — множество $U(K_n)$

пространства Y , т. е. множество элементов вида $y = U(x)$ ($x \in K_n$). Так как

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

то

$$Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Но Q_n компактно и поэтому сепарабельно (I. 3.2). А тогда сепарабельно и Y_0 .

Теорема 2 (2.IX). а) Линейная комбинация $U = \alpha U_1 + \beta U_2$ вполне непрерывных операций U_1 и U_2 , переводящих пространство X в пространство Y , есть операция вполне непрерывная.

б) Если U — линейная операция из X в Y , а V — из Y в Z и если одна из этих операций вполне непрерывна, то и произведение VU также вполне непрерывно.

Доказательство. а) Пусть $E \subset X$ — ограниченное множество, и пусть $\{y_n\} \subset U(E)$. Имеем

$$y_n = \alpha U_1(x_n) + \beta U_2(x_n) \quad (x_n \in E; n = 1, 2, \dots).$$

Из последовательности $\{U_1(x_n)\}$ можно, вследствие полной непрерывности операции U_1 , выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{U_1(x_{n_k})\}$. На том же основании можно извлечь сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{U_2(x_{n_k})\}$. Пусть это будет $\{U_2(x_{n_{kj}})\}$. Очевидно, последовательность $\{U(x_{n_{kj}})\}$ сходится, т. е. $U(E)$ компактно.

б) Это предложение следует непосредственно из того легко проверяемого факта, что линейная операция переводит ограниченное множество в ограниченное, а компактное — в компактное.

Теорема 3 (2.IX). Пусть $\{U_n\}$ — последовательность линейных операций из X в Y , сходящаяся к операции U (в пространстве операций $[X \rightarrow Y]$). Тогда, если U_n ($n = 1, 2, \dots$) вполне непрерывны, то и U вполне непрерывна.

Доказательство. Пусть K — единичная сфера пространства X . Покажем, что $U(K)$ компактно. Возьмем U_{n_0} так, что

$$\|U_{n_0} - U\| < \varepsilon.$$

Множество $U_{n_0}(K)$ компактно, а так как для $y \in U(K)$

$$\begin{aligned} \|y - y_{n_0}\| &= \|U(x) - U_{n_0}(x)\| \leq \|U - U_{n_0}\| \|x\| < \varepsilon \\ (y_{n_0} &= U_{n_0}(x); y = U(x); x \in K), \end{aligned}$$

то $U_{n_0}(K)$ представляет собой ε -сеть для $U(K)$. По замечанию к теореме Хаусдорфа $U(K)$ компактно, а это и означает полную непрерывность операции U .

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы нельзя заменить сходимость в пространстве операций, т. е. по норме, сходимостью на X . Действительно, как было указано выше, операции U_h (см. IX.1.1) вполне непрерывны и

$$U_h(x) \rightarrow x \text{ в } L^p \quad (x \in L^p).$$

Но тождественная операция в L^p не является вполне непрерывной. Действительно, теорему 2(2.II) можно переформулировать так: для того чтобы тождественная операция в нормированном пространстве X была вполне непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы X было конечномерно.

§ 3. Сопряженные операции

3.1. Пусть имеется линейная операция U , переводящая нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Пусть g — линейный функционал в пространстве Y , иначе говоря, — элемент сопряженного пространства Y^* . Для произвольного $x \in X$ положим

$$f(x) = g(U(x)). \quad (1)$$

Функционал f есть, таким образом, произведение функционала g , рассматриваемого как линейная операция из Y в пространство R вещественных (или комплексных) чисел, и операции U : $f = gU$. Поэтому f — линейный функционал, причем

$$\|f\| \leq \|g\| \|U\| \quad (2)$$

(см. V. 2.1).

Итак, формула (1) соотносит каждому функционалу $g \in Y^*$ некоторый функционал $f \in X^*$. Операция, осуществляющая это соответствие, называется *сопряженной* по отношению к данной операции U и обозначается U^* ; т. е. $f = U^*(g)$ означает (1), иначе говоря, $U^*(g) = gU$.

Таким образом, каждой линейной операции U из X в Y соответствует сопряженная операция U^* , переводящая Y^* в X^* . Мы докажем, что U^* , так же, как и U , является линейной операцией.

Теорема 1 (3. IX). *Сопряженная операция U^* является линейной операцией, переводящей пространство Y^* в X^* , при этом*

$$\|U^*\| = \|U\|. \quad (3)$$

Доказательство. Проверим аддитивность операции U^* . Если $g = \lambda g_1 + \mu g_2$ и $f = U^*(g)$, то

$$f(x) = g(U(x)) = \lambda g_1(U(x)) + \mu g_2(U(x)) = \lambda U^*(g_1)(x) + \mu U^*(g_2)(x).$$

Отсюда

$$U^*(g) = \lambda U^*(g_1) + \mu U^*(g_2).$$

Ограниченность U^* вытекает из неравенства (2), на основании которого

$$\|U^*\| \leq \|U\|.$$

Возьмем далее произвольный $x \in X$, и пусть $y = U(x)$. Построим функционал $g \in Y^*$ такой, что

$$g(y) = \|y\|; \quad \|g\| = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|U(x)\| &= \|y\| = g(y) = (gU)(x) = \\ &= U^*(g)(x) \leq \|U^*(g)\| \|x\| \leq \|U^*\| \|x\| \end{aligned}$$

откуда ясно, что

$$\|U\| \leq \|U^*\|.$$

Отметим еще, что если U_1 и U_2 — две линейные операции из пространства X в Y и

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2,$$

то

$$U^* = \lambda U_1^* + \mu U_2^*.$$

Действительно, ($g \in Y^*$, $x \in X$)

$$\begin{aligned} U^*(g)(x) &= g(U(x)) = g(\lambda U_1(x) + \mu U_2(x)) = \\ &= \lambda g(U_1(x)) + \mu g(U_2(x)) = [\lambda U_1^*(g)](x) + [\mu U_2^*(g)](x) \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Если X и Y — комплексные пространства, то указанная формула должна быть заменена формулой

$$U^* = \bar{\lambda} U_1^* + \bar{\mu} U_2^*.$$

В самом деле, повторяя предыдущие выкладки, но, пользуясь правилом умножения функционала на число в комплексном пространстве ((V. 1.2) формула (4)), будем иметь

$$\begin{aligned} U^*(g)(x) &= \lambda [g(U_1(x))] + \mu [g(U_2(x))] = (\bar{\lambda} g)(U_1(x)) + (\bar{\mu} g)(U_2(x)) = \\ &= U_1^*(\bar{\lambda} g)(x) + U_2^*(\bar{\mu} g)(x) = [\bar{\lambda} U_1^*(g) + \bar{\mu} U_2^*(g)](x). \end{aligned}$$

Пусть V , U — линейные операции из пространства X в Y и соответственно из пространства Y в Z . Если $W = UV$, то $W^* = V^*U^*$.

Действительно, обозначая $f = W^*(g)$, $f_1 = U^*(g)$ ($g \in Z^*$), можем написать

$$f(x) = g(W(x)) = g(UV(x)) = f_1(V(x)) = V^*U^*(g)(x) \quad (x \in X).$$

3.2. Рассмотрим вещественные конечномерные пространства X и Y , размерность которых соответственно равна μ и ν , и линейную операцию U из X в Y . Операция U определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix}$$

с помощью формул

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots, \nu), \quad (4)$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mu}) \in X, \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\nu}) \in Y.$$

Пусть $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\nu})$ — функционал в пространстве Y

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j \eta_j.$$

Функционал $f = U^*(g)$ будет иметь вид

$$f(x) = g(U(x)) = \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk} \xi_k = \sum_{k=1}^{\mu} \left(\sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} \psi_j \right) \xi_k,$$

т. е. $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu})$, где

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} \psi_j = \sum_{j=1}^{\nu} a_{kj}^* \psi_j \quad (a_{kj}^* = a_{jk}; j = 1, 2, \dots, \nu, k = 1, 2, \dots, \mu).$$

Таким образом, операция U^* определяется матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1\nu}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2\nu}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1}^* & a_{\mu 2}^* & \dots & a_{\mu\nu}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{\nu 1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2\mu} & a_{1\mu} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix},$$

которая получается из A заменой строк столбцами.

Пусть теперь U — интегральная операция с непрерывным ядром

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt.$$

Будем считать U операцией в L^p ($p > 1$).

Беря функционал $g \in (L^p)^*$

$$g(y) = \int_a^b \psi(s) y(s) ds \quad \left(y \in L^p, \psi \in L^q; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} g(U(x)) &= \int_a^b \psi(s) \left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \right] ds = \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t) \psi(s) ds \right] x(t) dt = \int_a^b \varphi(t) x(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, сопряженная операция U^* также является интегральной с ядром $K^*(s, t) = K(t, s)$:

$$f = U^*(g), \quad \varphi(t) = \int_a^b K^*(t, s) \psi(s) ds = \int_a^b K(s, t) \psi(s) ds.$$

З а м е ч а н и е. Если рассматривать комплексные конечномерные пространства, то сопряженная операция будет определяться матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1\nu}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2\nu}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1}^* & a_{\mu 2}^* & \dots & a_{\mu \nu}^* \end{pmatrix} \quad (a_{jk}^* = \overline{a_{kj}}, j = 1, 2, \dots, \mu; k = 1, 2, \dots, \nu).$$

Чтобы получить этот результат, достаточно вспомнить, что функционалы $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu) \in X^*$ и $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu) \in Y^*$ определяются формулами

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\mu} \overline{\varphi_k} \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in X),$$

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\nu} \overline{\psi_k} \eta_k \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in Y).$$

Аналогично в случае комплексного пространства L^p операция, сопряженная к интегральной, также будет интегральной с ядром

$$K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}$$

(ср. III. 3.3).

3.3. Рассматривая операцию U^* как исходную, можно образовать для нее сопряженную, которую будем называть *второй сопряженной*

данной операции U и обозначать U^{**} . Согласно определению и по теореме 1 это будет линейная операция из пространства X^{**} в пространство Y^{**} . Отождествляя пространство X с подпространством $X_0^{**} \subset X^{**}$ и пространство Y с подпространством $Y_0^{**} \subset Y^{**}$, *) докажем, что на $X_0^{**} = X$ операция U^{**} совпадает с U . Точнее говоря, имеет место

Теорема 2 (3.IX). Если X_x — элемент из X_0^{**} (т. е. функционал в X^* , определяемый элементом $x \in X$), то

$$U^{**}(X_x) = Y_{U(x)}, \quad (5)$$

где Y_y есть элемент из Y_0^{**} , порождаемый элементом $y \in Y$.

Доказательство. Пусть $g \in Y^*$. По определению сопряженной операции, учитывая вид функционалов X_x и Y_y , будем иметь

$$U^{**}(X_x)(g) = X_x(U^*(g)) = U^*(g)(x) = g(U(x)) = Y_{U(x)}(g),$$

откуда и следует (5).

Следствие. Если пространство X рефлексивно, то $U^{**} = U$. (Равенство надо понимать с учетом того, что соответствующие элементы пространств X и X^{**} , а также пространств Y и Y^{**} предполагаются отождествленными).

3.4. Свойство полной непрерывности сохраняется при переходе от данной операции к сопряженной.

Теорема 3 (3.IX). Пусть U — линейная операция, переводящая нормированное пространство X в B -пространство Y . Тогда, если одна из операций U и U^* вполне непрерывна, то вполне непрерывна и другая.

Доказательство. Предположим сначала, что вполне непрерывна операция U , и возьмем ограниченную последовательность $\{g_n\}$ функционалов в пространстве Y ($\|g_n\| \leq M$; $n = 1, 2, \dots$). Докажем, что из последовательности функционалов $\{U^*(g_n)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Этим будет доказана полная непрерывность операции U^* .

Обозначим через Y_0 замыкание множества $U(X)$. По теореме 1 (2.IX) Y_0 — сепарабельное пространство. Будем рассматривать функционалы g_n только на Y_0 . Так как последовательность функционалов $\{g_n\}$ ограничена, то по теореме 2 (1.VIII) из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что это уже сделано, т. е. что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = g(y) \quad (y \in Y_0).$$

При этом g будет линейным функционалом в Y_0 . Поскольку его можно распространить на все Y с сохранением нормы, можно

*) По поводу этих и дальнейших обозначений см. V.1.2.

считать, что $g \in Y^*$. Отметим, что

$$\|g\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| \leq M.$$

Положив $f = U^*(g)$; $f_n = U^*(g_n)$, будем иметь для любого $x \in X$

$$f_n(x) = g_n(U(x)) \rightarrow g(U(x)) = f(x),$$

так как $U(x) \in Y_0$. Таким образом, получаем

$$f_n \rightarrow f.$$

Покажем, что имеет место и сходимость по норме. Допустим противное. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|f_n - f\| \geq m > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Найдем для каждого $n = 1, 2, \dots$ элемент x_n так, что

$$\|x_n\| = 1; \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| > \frac{1}{2} \|f_n - f\| \geq \frac{1}{2} m \quad (n = 1, 2, \dots),$$

т. е. полагая $y_n = U(x_n)$,

$$|g_n(y_n) - g(y_n)| \geq \frac{1}{2} m \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Так как операция U вполне непрерывна, а $\|x_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) то из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$. Пусть $y_{n_k} \rightarrow y_0$. Тогда, учитывая, что $y_0 \in Y_0$, имеем

$$\begin{aligned} |g_{n_k}(y_{n_k}) - g(y_{n_k})| &\leq |g_{n_k}(y_{n_k}) - g_{n_k}(y_0)| + \\ &\quad + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| + |g(y_0) - g(y_{n_k})| \leq \\ &\leq 2M \|y_{n_k} - y_0\| + |g_{n_k}(y_0) - g(y_0)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

что противоречит (6).

Докажем теперь, что если U^* вполне непрерывна, то будет вполне непрерывной и U .

Рассмотрим операцию U^{**} . По доказанному эта операция вполне непрерывна, а так как согласно теореме 2 ее можно трактовать как распространение операции U , то и эта операция оказывается вполне непрерывной. Действительно, если $E \subset X$ — ограниченное множество, то $U(E)$ компактно в Y^{**} . А тогда, поскольку $Y = Y_0^{**}$ замкнуто в Y^{**} , $U(E)$ будет компактно и в Y (см. I.3.1).

3.5. Понятие сопряженной операции позволяет высказать удобный критерий полной непрерывности.

Теорема 4 (3. IX). Пусть U — линейная операция, переводящая нормированное пространство X в сепарабельное B -пространство Y . Для того чтобы U была вполне непрерывной, необхо-

димо и достаточно, чтобы сопряженная операция U^* переводила всякую слабо сходящуюся к нулю последовательность $\{g_n\}$ функционалов в пространстве Y в последовательность $\{f_n\}$ функционалов в пространстве X , сходящуюся к нулю по норме.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\{f_n\}$ не сходится по норме к нулю. Можно считать, что

$$\|f_n\| \geq m > 0. \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

По предыдущей теореме U^* — вполне непрерывная операция, и так как последовательность $\{g_n\}$ ограничена (теорема 1 (1. VIII)), из $\{f_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$. Пусть

$$f_{n_k} \rightarrow f. \quad (8)$$

Для любого $x \in X$ имеем

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(U(x)) = 0,$$

так как $g_{n_k} \rightarrow 0$. Следовательно, $f = 0$, а тогда (8) противоречит (7).

Достаточность. Пусть K — единичная сфера пространства X . Докажем, что $U(K)$ компактно в Y . Для этого проверим, что для $U(K)$ выполнены условия теоремы Гельфанда (IX. 1.4). Пусть $g_n \rightarrow 0$ ($g_n \in Y^*$). Если бы на множестве $U(K)$ сходимость $g_n(y) \rightarrow 0$ была неравномерной, то нашлись бы $\epsilon > 0$, последовательности чисел $\{n_k\}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) и элементов $\{y_k\} \subset U(K)$ так, что

$$|g_{n_k}(y_k)| \geq \epsilon. \quad (9)$$

Так как $y_k = U(x_k)$, где $x_k \in K$, то (9) можно переписать так:

$$\|U^*(g_{n_k})(x_k)\| \geq \epsilon.$$

И тем более

$$\|U^*(g_{n_k})\| \geq \epsilon \quad (k = 1, 2, \dots),$$

что противоречит условию теоремы.

Теорема полностью доказана.

3.6. Для операции U в гильбертовом пространстве H понятие сопряженной уже было определено в III. 3.3. Покажем, что новое определение приводит по существу к тому же самому.

Пусть g — линейный функционал в H . Согласно III. 3.2 существует элемент $z \in H$ такой, что

$$g(y) = (y, z) \quad (y \in H). \quad (10)$$

Обозначим далее $f = U^*g$ и пусть функционал f определяется элементом z^* :

$$f(x) = (x, z^*) \quad (x \in H). \quad (11)$$

Учитывая равенства (10) и (11), перепишем соотношение $f(x) = g(Ux)$ в виде

$$(x, z^*) = (Ux, z) \quad (x \in H). \quad (12)$$

Операция U^* определена в H^* . Так как H^* линейно изометрично самому H , то операцию U^* можно рассматривать и как операцию в H (очевидно также линейную), которую мы будем обозначать тем же символом U^* . Так как функционал g соответствует элементу z , а f — элементу z^* , то $z^* = U^*z$ и (12) можно переписать так:

$$(Ux, z) = (x, U^*z) \quad (x \in H),$$

что совпадает с прежним определением сопряженной операции.

Определение сопряженной операции для случая различных операций в L^2 даны Гильбертом (см. Г и л ь б е р т). Для других частных случаев см. Р и с с-л. Общее определение — [1216], [30], Б а н а х-1.

§ 4. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

4.1. В этом параграфе проводится детальный анализ структуры вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве H . Как оказывается, строение такого оператора напоминает структуру симметричной матрицы. Как и в случае матрицы, основную роль в выяснении свойств вполне непрерывного самосопряженного оператора играют собственные значения и связанные с ними понятия.

Результаты этого параграфа были установлены для интегральных операторов в L^2 — Гильбертом и Шмидтом, в общем случае — Нейманом (для сепарабельного H) в [83] и Реллихом (произвольное H) в [95].

Собственным значением оператора U называется такое число λ , что существует элемент $x_0 \neq 0$, обладающий свойством

$$Ux_0 = \lambda x_0.$$

Элемент x , для которого имеет место равенство $Ux = \lambda x$, называется *собственным элементом*, принадлежащим (соответствующим) данному собственному значению λ . Собственные элементы, принадлежащие данному собственному значению λ , образуют отвечающее ему *собственное подпространство* H_λ . Нетрудно проверить, что H_λ действительно является подпространством пространства H .*)

*) Все высказанные выше определения могут быть отнесены и к случаю, когда рассматривается произвольное нормированное пространство X и операция U в нем. Собственное подпространство мы будем обозначать в этом случае через X_λ .

4.2. Отметим некоторые простейшие факты, касающиеся собственных значений и элементов самосопряженного оператора U в гильбертовом пространстве H .

I. При любом $x \in H$ выражение (Ux, x) вещественно (ср. V. 4.2). Это следует из равенства

$$(Ux, x) = (x, Ux) = \overline{(Ux, x)}.$$

II. Имеет место соотношение

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|.$$

Обозначим $Q = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|$. Так как при $\|x\| = 1$

$$|(Ux, x)| \leq \|Ux\| \|x\| = \|Ux\| \leq \|U\|,$$

то $Q \leq \|U\|$.

Далее, из легко проверяемого тождества (см. V. 4.2):

$$\begin{aligned} (Ux, y) = & \frac{1}{4} \{ [(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + \\ & + i [(U(x+iy), x+iy) - (U(x-iy), x-iy)] \} \end{aligned} \quad (1)$$

вследствие I находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Ux, y) = & \frac{1}{4} [(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] \leq \\ \leq & \frac{1}{4} Q [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = \frac{1}{2} Q [\|x\|^2 + \|y\|^2] \end{aligned}$$

(по поводу последнего равенства см. II. 7.1). Беря здесь x с $\|x\| = 1$ и $y = \frac{Ux}{\|Ux\|}$, получим

$$\|Ux\| = \operatorname{Re}(Ux, y) \leq Q,$$

откуда

$$\|U\| \leq Q.$$

III. Собственные значения оператора U вещественны.

Действительно, если λ — собственное значение, а x — соответствующий ему собственный элемент, то

$$\lambda = \frac{(Ux, x)}{(x, x)}.$$

Ввиду самосопряженности U числитель в этом выражении вещественен, а тогда и λ вещественно.

IV. Собственные подпространства H_{λ_1} и H_{λ_2} , отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 оператора U ортогональны.

В самом деле, пусть x и y — элементы из H_{λ_1} и H_{λ_2} соответственно. Так как $Ux = \lambda_1 x$, $Uy = \lambda_2 y$, то, предполагая, например, $\lambda_1 \neq 0$, будем иметь

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} (Ux, y) = \frac{1}{\lambda_1} (x, Uy) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (x, y),$$

что возможно лишь в случае, когда $(x, y) = 0$.

4.3. Пусть теперь U означает не только самосопряженный, но и вполне непрерывный оператор. Имеет место

Теорема 1 (4. IX). *Оператор U имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Доказательство. Так как в случае $U = 0$ утверждение теоремы очевидно, то мы будем считать $U \neq 0$.

Введем в рассмотрение *границы* оператора

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x); \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

Согласно II $\|U\| = \max[|m|, M]$. Докажем, что

$$\lambda_1 = \begin{cases} m, & \text{если } \|U\| = |m| \\ M, & \text{если } \|U\| = M \end{cases}$$

является собственным значением оператора U .

Действительно, рассмотрим, например, случай, когда $\|U\| = M$. По определению числа M найдется последовательность нормированных элементов $\{x_n\}$ такая, что

$$(Ux_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M = \lambda_1. \quad (2)$$

Так как $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то ввиду полной непрерывности оператора U из последовательности $\{Ux_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что это уже сделано, т. е. что $\{Ux_n\}$ сходится. Пусть, например, $Ux_n \rightarrow y_0$. Из соотношения

$$\|Ux_n - \lambda_1 x_n\|^2 = \|Ux_n\|^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n) + \lambda_1^2 \leq \|U\|^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n),$$

учитывая, что $\lambda_1^2 = \|U\|^2$, получаем в силу (2), что

$$Ux_n - \lambda_1 x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

А тогда и

$$x_n = \frac{1}{\lambda_1} [Ux_n - (Ux_n - \lambda_1 x_n)]$$

имеет предел. Именно, $x_n \rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda_1} y_0$. Так как $Ux_n \rightarrow Ux_0 = y_0$, то $y_0 = Ux_0 = \lambda_1 x_0$. Поскольку $x_0 \neq 0$ ($\|x_0\| = 1$), то λ_1 является собственным значением.

Теорема доказана.

Следствие. Если оператор U не имеет отличных от нуля собственных значений, то $U = 0$.

Замечание. Найденное в теореме собственное значение λ_1 оператора U является наибольшим по абсолютной величине.

В самом деле, если λ — некоторое собственное значение, а x — соответствующий элемент, который можно считать нормированным, то

$$|\lambda| = |\lambda| (x, x) = |(Ux, x)| \leq \|U\| = |\lambda_1|.$$

4.4. Обозначим через P_λ проектор (см. III. 3.4), проектирующий на собственное подпространство H_λ . Следующая теорема существенно уточняет теорему 1.

Теорема 2 (4. IX). Множество собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора U не более чем счетно. При этом

$$U = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — различные собственные значения оператора U (сходимость ряда понимается как сходимость по норме в пространстве операций).

Доказательство. Пусть λ — некоторое собственное значение оператора U . Справедливо соотношение

$$\lambda P_\lambda = U P_\lambda = P_\lambda U. \quad (4)$$

Действительно, так как $P_\lambda x \in H_\lambda$ при любом $x \in H$, то $U P_\lambda x = \lambda P_\lambda x$. Перестановочность операторов P_λ и U следует из того, что их произведение $U P_\lambda = \lambda P_\lambda$ — самосопряженный оператор (см. V. 4.1).

Рассмотрим оператор

$$U_2 = U_1 - \lambda_1 P_{\lambda_1} \quad (U_1 = U). \quad (5)$$

Ввиду (4) можно записать

$$U_2 = \tilde{P}_1 U_1 = U_1 \tilde{P}_1, \quad (6)$$

где обозначено $\tilde{P}_1 = I - P_{\lambda_1}$. Отсюда следует, что U_2 — самосопряженный и вполне непрерывный оператор (последнее на основании теоремы 2 (2. IX)). Соотношение (6) показывает также, что

$$\|U_2\| \leq \|\tilde{P}_1\| \|U_1\| \leq \|U_1\|.$$

Применяя к оператору U_2 предыдущую теорему, найдем его собственное значение λ_2 . При этом

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2|,$$

так как $|\lambda_1| = \|U_1\|$, $|\lambda_2| = \|U_2\|$.

Докажем, что λ_1 не является собственным значением оператора U_2 . В самом деле, в противном случае нашелся бы элемент $x \neq 0$ такой, что

$$U_2x = \lambda_1x$$

или в силу (5)

$$U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = \lambda_1x. \quad (7)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор P_{λ_1} , получим вследствие (4)

$$\lambda_1 P_{\lambda_1}x = U P_{\lambda_1}x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = 0.$$

Следовательно, из (7)

$$U_1x = \lambda_1x,$$

т. е. $x \in H_{\lambda_1}$ и поэтому $x = P_{\lambda_1}x = 0$, что приводит к противоречию.

Установим еще, что каждое отличное от нуля, собственное значение оператора U_2 является вместе с тем и собственным значением оператора U_1 , причем соответствующие собственные подпространства совпадают.

Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение оператора U_2 и $x \neq 0$ — такой элемент, что $U_2x = \lambda x$. В силу (6) имеем

$$U_1\tilde{P}_1x = \lambda x, \quad (8)$$

откуда

$$\tilde{P}_1U_1\tilde{P}_1x = \lambda\tilde{P}_1x.$$

С другой стороны,

$$\tilde{P}_1U_1\tilde{P}_1x = U_1\tilde{P}_1^2x = U_1\tilde{P}_1x = \lambda x,$$

поэтому $\tilde{P}_1x = x$. Таким образом, из (8) получаем

$$U_1x = \lambda x,$$

т. е. λ — собственное значение оператора U_1 . Если теперь под x подразумевать собственный элемент оператора U_1 , принадлежащий собственному значению λ , то, поскольку $\lambda \neq \lambda_1$, подпространства H_λ и H_{λ_1} ортогональны (см. III из 4.3), поэтому $P_{\lambda_1}x = 0$ и в соответствии с (5)

$$U_2x = U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = U_1x = \lambda x.$$

Таким образом, x является собственным элементом оператора U_2 .

Если оператор U_2 отличен от тождественного нуля, то, исходя из него, построим оператор $U_3 = U_2 - \lambda_2 P_{\lambda_2}$ и т. д. Продолжая этот процесс, построим вполне непрерывные самосопряженные операторы

$U_1 = U, U_2, \dots, U_n$ и собственные числа этих операторов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \dots, \lambda_n$ так, что

$$U_{k+1} = U_k - \lambda_k P_{\lambda_k} = U - \sum_{j=1}^k \lambda_j P_{\lambda_j} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

$$\|U_k\| = |\lambda_k| \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

При этом согласно доказанному λ_k будут попарно различными собственными значениями оператора $U_1 = U$.

Предположим, что $U_n = 0$. Тогда

$$U = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j P_{\lambda_j}. \quad (9)$$

Если же $U_n \neq 0$ ни при одном $n = 1, 2, \dots$, то процесс приводит к последовательности операторов $U_1, U_2, \dots$ и собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Докажем, что в этом случае $\lambda_n \rightarrow 0$. В самом деле, в противном случае для всех $n = 1, 2, \dots$

$$|\lambda_n| \geq \lambda_0 > 0.$$

Возьмем в подпространстве H_{λ_n} нормированный элемент x_n . Различные элементы x_n попарно ортогональны, поэтому

$$\|Ux_m - Ux_n\|^2 = \|\lambda_m x_m - \lambda_n x_n\|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geq 2\lambda_0^2 \quad (m \neq n),$$

вследствие чего ни последовательность $\{Ux_n\}$, ни какая-либо ее подпоследовательность не сходятся, а это противоречит полной непрерывности оператора U . Поскольку $\|U_n\| = |\lambda_n|$, то из доказанного вытекает, что $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и, следовательно,

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}.$$

Таким образом, представление U в форме (3) установлено.

Докажем, что, кроме $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, оператор U не имеет других не равных нулю собственных значений. Действительно, если бы λ было таким собственным значением, то для некоторого $x \neq 0$ оказалось бы $Ux = \lambda x$, т. е.

$$\lambda x = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} x.$$

Элементы $P_{\lambda_k} x$ входят в H_{λ_k} и потому попарно ортогональны. Следовательно,

$$\lambda P_{\lambda_m} x = \lambda_m P_{\lambda_m} x \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Так как $\lambda \neq \lambda_m$, то $P_{\lambda_m} x = 0$.

Таким образом, $x = 0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно проверить, что собственное подпространство $\mathbf{H}_{\lambda_k}$, отвечающее отличному от нуля собственному значению, — конечномерно.

Действительно, всякое ограниченное множество E в $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ является образом ограниченного множества $\tilde{E}$ ($\tilde{E}$ состоит из всех элементов z вида $z = \frac{1}{\lambda_k} x$, где $x \in E$). Поэтому ввиду полной непрерывности оператора U множество E компактно, а это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ конечномерно (см. теорему 2 (2. II)).

З а м е ч а н и е 2. Из соотношения (6) вытекает, что собственное значение λ_k можно определить как

$$\lambda_k = \pm \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathbf{H}_{\lambda_j}}} |(Ux, x)| \quad (j = 1, 2, \dots, k-1).$$

4.5. Обозначим через $\mathbf{H}_0$ собственное подпространство, отвечающее нулевому собственному значению, и через $\tilde{\mathbf{H}}$ его ортогональное дополнение. Так как для любого $x \in \mathbf{H}$, $y \in \mathbf{H}_0$

$$(Ux, y) = (x, Uy) = 0,$$

то $Ux \perp \mathbf{H}_0$, т. е. $U(\mathbf{H}) \subset \tilde{\mathbf{H}}$. Наоборот, если $y \perp U(\mathbf{H})$, то для любого $x \in \mathbf{H}$

$$0 = (Ux, y) = (x, Uy),$$

откуда вытекает, что $Uy = 0$, т. е. $y \in \mathbf{H}_0$. Таким образом $\tilde{\mathbf{H}} = \overline{U(\mathbf{H})}$.

Выберем в каждом из подпространств $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ полную ортогональную систему. В силу сделанного выше замечания она будет конечна при любом $k = 1, 2, \dots$. Объединяя эти системы в одну, получим ортонормальную систему $x_1, x_2, \dots$, состоящую из собственных элементов оператора U . Собственное значение, которому соответствует элемент x_k , будем обозначать по-прежнему λ_k . Таким образом, среди собственных значений будут, вообще говоря, равные. *) Из теоремы 2 следует, что построенная ортонормальная система будет полной в $\tilde{\mathbf{H}}$ и, следовательно, каждый элемент $z \in \mathbf{H}$ можно представить в виде

$$z = x_0 + \tilde{x}, \quad (10)$$

где

$$\tilde{x}_0 \in \mathbf{H}_0, \quad \tilde{x} = \sum_k c_k x_k \in \tilde{\mathbf{H}} \quad (c_k = (\tilde{x}, x_k) = (z, x_k); k = 1, 2, \dots).$$

*) Удобство принятого способа обозначений состоит в том, что не только собственный элемент определяет собственное значение, но и, наоборот, собственное значение однозначно (с точностью до множителя) определяет собственный элемент.

В частности, если $z = Ux$, то, как было отмечено выше, $z \in \tilde{H}$ и поэтому

$$z = \sum_k c_k x_k \quad (c_k = (z, x_k) = (Ux, x_k) = (x, Ux_k) = \lambda_k (x, x_k)).$$

Рассмотрим уравнение

$$x - \mu Ux = y, \quad (11)$$

в котором y — фиксированный элемент из H , μ — числовой параметр.

Представляя y и искомый элемент x в виде (10), приходим к уравнению

$$x_0 + \sum_k c_k x_k - \mu \sum_k c_k \lambda_k x_k = y_0 + \sum_k d_k x_k \quad (c_k = (x, x_k), d_k = (y, x_k)),$$

откуда

$$x_0 = y_0, \quad c_k (1 - \mu \lambda_k) = d_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и, следовательно,

$$x_0 = y_0, \quad c_k = \frac{d_k}{1 - \mu \lambda_k}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

если только ни при одном $k = 1, 2, \dots$

$$1 - \mu \lambda_k \neq 0.$$

При этом

$$\sum |c_k|^2 \leq \frac{1}{\min_k |1 - \mu \lambda_k|^2} \sum |d_k|^2 < \infty,$$

и решение существует и единственно. Обозначая через x^* искомое решение, будем иметь в этом случае

$$x^* = y_0 + \sum_k \frac{d_k}{1 - \mu \lambda_k} x_k.$$

Если же $\mu \lambda_k = 1$, то решение существует лишь тогда, когда соответствующие коэффициенты $d_k = 0$, т. е. когда правая часть уравнения (11) — элемент y — ортогональна всем собственным элементам, принадлежащим собственному значению $\frac{1}{\mu}$. При этом, поскольку соответствующие коэффициенты c_k могут быть выбраны произвольно, решение не единственно: если x^* — некоторое решение, то решением будет и $x^* + \bar{x}$, где $\bar{x}$ — произвольный элемент из $H_{\frac{1}{\mu}}$.

Значения

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

мы будем называть *характеристическими значениями* уравнения (11), а собственные элементы, принадлежащие собственному значению λ_k , *характеристическими элементами*, соответствующими характеристическому значению μ_k .

Если подразумевать под U интегральный оператор в L^2 с непрерывным симметричным ядром,

$$y = Ux, \quad y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt,$$

то приведенные выше общие факты обратятся в хорошо известные результаты теории интегральных уравнений, на формулировке которых мы не останавливаемся.

Далее, трактуя симметричную матрицу как оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, можно из изложенного выше получить известные теоремы теории матриц.

4.6. Пусть H — сепарабельное пространство. Для матричного представления (см. III.3.1.) вполне непрерывного самосопряженного оператора U выберем полную ортонормальную систему следующим образом: к построенной выше системе в $\tilde{H}$ присоединим ортонормальную полную в H_0 систему. Обозначая получившуюся систему через $\{x_k\}$, а соответствующие собственные значения через $\{\lambda_k\}$ (таким образом, λ_k может равняться нулю), получим, что представляющая оператор U матрица есть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Диагональные элементы этой матрицы суть собственные значения, а все остальные равны нулю.

Можно показать, что если U допускает матричное представление матрицей вида (13), где λ_k вещественные и $\lambda_k \rightarrow 0$, то U — вполне непрерывный самосопряженный оператор.

§ 5. Интегральное представление самосопряженного оператора

В этом параграфе для произвольного самосопряженного оператора устанавливается представление в виде некоторого абстрактного интеграла типа интеграла Стильтьеса, которое, если рассматриваемый оператор вполне непрерывен, сводится к формуле (3) предыдущего параграфа.

Для операторов в конкретных пространствах такое представление было указано Гильбертом (см. Г и л ь б е р т), в общем случае — Нейманом [83]. Идея приводимых ниже рассуждений принадлежит Ф. Риссу.

Основным средством исследования здесь является понятие функции от оператора. С частными случаями этого понятия мы уже встречались раньше: так, например, для операторов в нормированном пространстве были определены степени с целыми показателями, а для положительных операторов в гильбертовом пространстве — квадратный корень. Ниже соответствие между функциями вещественного аргумента и операторами систематически распространяется на все непрерывные функции.

5.1. Пусть U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Как и в предыдущем параграфе, обозначим границы оператора U

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

Пусть далее $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n$. Положим по определению

$$\varphi(U) = c_0 I + c_1 U + \dots + c_n U^n.$$

Оператор $\varphi(U)$ называется *операторным полиномом*.

Отметим некоторые свойства операторных полиномов:

I. $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi}(U)$. В частности, если $\varphi(t)$ — вещественный полином, то $\varphi(U)$ — самосопряженный оператор.

II. Если $\varphi(t) = \alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \alpha \varphi_1(U) + \beta \varphi_2(U)$.

III. Если $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$, то $\varphi(U) = \varphi_1(U) \varphi_2(U)$.

IV. Операторный полином перестановочен с любым оператором, перестановочным с U , т. е. $UV = VU$ влечет $\varphi(U)V = V\varphi(U)$.

V. Если $\varphi(t) \geq 0$ для $t \in [m, M]$, то оператор $\varphi(U)$ положителен.

Ввиду очевидности первых четырех свойств, остановимся лишь на доказательстве пятого.

Поскольку полином $\varphi(t)$ положителен в промежутке $[m, M]$, внутри этого промежутка он не может иметь корней нечетной кратности, кроме того, так как при переходе через корень нечетной кратности знак полинома меняется, а знак $\varphi(t)$ для достаточно больших t совпадает со знаком старшего коэффициента c_n , то в случае $c_n > 0$ число корней нечетной кратности, превосходящих или равных M , будет четным, а если $c_n < 0$, — нечетным. Принимая все это во внимание, можно убедиться, что $\varphi(t)$ допускает представление в виде

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_s(t),$$

где множители $\varphi_k(t)$ имеют одну из следующих форм:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} a & (a > 0), \\ (t + \alpha_k)^2 + \beta_k & (\alpha_k \text{ — вещественное, } \beta_k \geq 0), \\ t - t_k & (t_k \leq m), \\ t_k - t & (t_k \geq M). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что во всяком случае $\varphi_k(U) \geq 0$.

Действительно, если, например, $\varphi_k(t) = t - t_k$ ($t_k \leq m$), то $\varphi_k(U) = U - t_k I$ и

$$(\varphi_k(U)x, x) = (Ux, x) - t_k(x, x) \geq (m - t_k)(x, x) \geq 0.$$

В силу III

$$\varphi(U) = \varphi_1(U) \varphi_2(U) \dots \varphi_s(U).$$

Но операторы $\varphi_k(U)$ перестановочны между собой (свойство IV), а тогда применимо следствие к теореме 2(4. V), на основании которого произведение $\varphi(U)$ также является положительным оператором.

Отметим еще два свойства операторных полиномов, вытекающие из указанных выше.

VI. Если $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ в промежутке $[m, M]$, то $\varphi_1(U) \leq \varphi_2(U)$.

VII. $\|\varphi(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \|\varphi(U)\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) = \sup_{\|x\|=1} (\bar{\varphi}(U)\varphi(U)x, x) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x), \end{aligned}$$

где обозначено $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$. Если $l = \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$, то

$$0 \leq \psi(t) \leq l^2 \quad (t \in [m, M]),$$

и потому

$$0 \leq \psi(U) \leq l^2 I.$$

Следовательно,

$$\sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x) \leq l^2.$$

5.2. Пусть теперь $\varphi(t)$ — непрерывная в промежутке $[m, M]$ функция. Существует последовательность полиномов $\{\varphi_n(t)\}$, равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$ в $[m, M]$. Нетрудно видеть, что последовательность операторов $\{\varphi_n(U)\}$ будет сходиться к некоторому оператору. В самом деле,

$$\|\varphi_{n+p}(U) - \varphi_n(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Если имеется другая последовательность полиномов, также равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$ (в $[m, M]$), то последовательность соответствующих операторных полиномов будет сходиться к тому же предельному оператору, что и первоначальная последовательность. В этом можно убедиться, объединяя обе последовательности в одну. Высказанные соображения дают основания для обозначения

$$\varphi(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(U).$$

Оператор $\varphi(U)$ будем называть *операторной функцией*.

Свойства операторных функций сформулированы в следующей теореме:

Теорема 1 (5. IX). а) $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi(U)}$. В частности, если $\varphi(t)$ вещественная при $t \in [m, M]$, то $\varphi(U)$ — самосопряженный оператор.

б) Если $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ ($t \in [m, M]$), то $\varphi(U) = \alpha\varphi_1(U) + \beta\varphi_2(U)$.

с) Если $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ ($t \in [m, M]$), то $\varphi(U) = \varphi_1(U)\varphi_2(U)$.

д) Оператор $\varphi(U)$ перестановочен с любым оператором, перестановочным с U .

е) Если $\varphi(t) \geq \psi(t)$ ($t \in [m, M]$), то $\varphi(U) \geq \psi(U)$.

ф) $\|\varphi(U)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$. *)

г) Если последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ непрерывных функций равномерно сходится в промежутке $[m, M]$ к функции $\varphi(t)$, то $\|\varphi_n(U) - \varphi(U)\| \rightarrow 0$.

h) Если P — проектор, перестановочный с U , то

$$P\varphi(U) = P\varphi(PU).$$

Доказательство. Справедливость утверждений а) — г) без труда устанавливается с помощью свойств операторных полиномов.

Что касается пункта h), то, если $\varphi(t)$ — полином, доказываемое соотношение легко проверяется, если учесть, что $P^2 = P$ и, следовательно, $P^k = P$ ($k = 1, 2, \dots$). В случае, когда $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная функция, надо использовать предельный переход.

5.3. Для того чтобы однозначно определить оператор $\varphi(U)$, нет необходимости знать значения функции $\varphi(t)$ на всем промежутке $[m, M]$. Оказывается достаточно задать $\varphi(t)$ лишь на некотором замкнутом множестве $S_U \subset [m, M]$, называемом спектром оператора U .

Будем говорить, что число λ является точкой спектра самосопряженного оператора U , если существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\|x_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad Ux_n - \lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Иначе говоря, λ есть точка спектра, если

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| = 0, \quad (2)$$

совокупность всех точек спектра называется *спектром* оператора U **) и обозначается S_U .

*) Ниже (в 5.3) будет установлено точное выражение для $\|\varphi(U)\|$.

**) Это определение формально имеет смысл и в случае, когда U — произвольная линейная операция в произвольном нормированном пространстве. Однако для общего случая будет дано иное определение спектра, эквивалентное данному лишь в случае, если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве.

Ясно, что каждое собственное значение входит в спектр, который, однако, может содержать точки, не являющиеся собственными значениями. Так, в случае, когда оператор U вполне непрерывен, а пространство H бесконечномерно, $\lambda = 0$ будет точкой спектра, хотя, как легко видеть, не всегда есть собственное значение.

Пусть λ — точка спектра. Из (1) получаем

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ux_n, x_n).$$

Отсюда вытекает, что спектр оператора U расположен на вещественной прямой и заключен в промежутке $[m, M]$. Покажем, что *границы оператора U являются точками спектра*.

Будем считать, что $0 \leq m \leq M$ *) и рассмотрим точку $\lambda = M$. Учитывая, что $\|U\| = \lambda$, будем иметь для $\|x\| = 1$

$$\|Ux - \lambda x\|^2 = \|Ux\|^2 - 2\lambda (Ux, x) + \lambda^2 \leq 2\lambda [\lambda - (Ux, x)],$$

откуда

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\|^2 \leq 2\lambda [\lambda - \sup_{\|x\|=1} (Ux, x)] = 0,$$

а это вследствие (2) означает, что $\lambda \in S_U$.

Можно далее доказать, что S_U — замкнутое множество.

В самом деле, если $\lambda_0 \in \overline{S_U}$, то из (2)

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| = d > 0.$$

Тогда, если $|\lambda - \lambda_0| < \frac{d}{2}$, то

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geq \inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| - \sup_{\|x\|=1} \|\lambda_0 x - \lambda x\| < d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0,$$

и, следовательно, дополнение множества S_U открыто.

Прежде чем формулировать основной результат, докажем два вспомогательных предложения.

Лемма 1. Пусть $\varphi(t)$ — вещественный полином. Тогда $S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U)$, т. е. спектр оператора $\varphi(U)$ состоит из всех μ , представимых в виде $\mu = \varphi(\lambda)$ ($\lambda \in S_U$).

Доказательство. Пусть μ — некоторое вещественное число и $t_1, t_2, \dots, t_s$ — все корни уравнения

$$\varphi(t) = \mu.$$

Очевидно, оператор $\varphi(U) - \mu I$ допускает представление в виде произведения

$$\varphi(U) - \mu I = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \dots (U - t_s I). \quad (3)$$

*) Выполнения этого условия всегда можно добиться, прибавив к оператору U оператор вида μI ; при этом спектр и границы оператора U переместятся по вещественной оси на μ вправо.

Возьмем $\lambda \in S_U$. Найдется последовательность $\{x_n\}$ нормированных элементов, такая, что $Ux_n - \lambda x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим в разложении (3) $\mu = \varphi(\lambda)$, $t_s = \lambda$

$$\varphi(U)x_n - \mu x_n = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \dots (U - t_{s-1} I)(Ux_n - \lambda x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. $\mu \in S_\varphi(U)$.

Наоборот, если ни одно из t_k не принадлежит спектру оператора U , то

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - t_s x\| = \rho_s > 0,$$

$$\inf_{\|x\|=1} \|(U - t_{s-1} I)(Ux - t_s x)\| \geq \inf_{\|y\| \geq \rho_s} \|Uy - t_{s-1} y\| = \rho_{s-1} > 0$$

и, продолжая так дальше, найдем

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = \rho_1 > 0.$$

Следовательно, $\mu = \varphi(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, s$) не входит в $S_\varphi(U)$.

Лемма 2. Если $\varphi(t)$ — полином, то

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\varphi(U)\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) = \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\overline{\varphi(U)} \varphi(U)x, x) = \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x), \end{aligned} \quad (4)$$

где положено $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$.

Таким образом, $\|\varphi(U)\|^2$ есть верхняя граница оператора $\psi(U)$. Но верхняя граница положительного оператора $\psi(U)$ совпадает с точной верхней границей спектра этого оператора.

$$M_\psi(U) = \sup S_\psi(U). \quad (5)$$

В соответствии с результатом леммы 1

$$\sup S_\psi(U) = \sup \psi(S_U) = \sup_{t \in S_U} \psi(t) = \left[\sup_{t \in S_U} |\varphi(t)| \right]^2.$$

При этом ввиду замкнутости множества S_U супремум можно заменить на максимум. Сопоставляя последнее равенство с соотношениями (4) и (5), получим требуемый результат.

Основная теорема теперь без труда может быть доказана.

Теорема 2 (5. IX). Если $\varphi(t)$ — непрерывная в $[m, M]$ функция, то

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|. \quad (6)$$

Действительно, пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к $\varphi(t)$. По лемме 2

$$\|\varphi_n(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi_n(t)| = \|\varphi_n\|_C.$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (6).

Следствие. Если φ_1 и φ_2 — непрерывные в $[t, M]$ функции, совпадающие на спектре оператора U , то $\varphi_1(U) = \varphi_2(U)$.

Пусть $\varphi(t)$ задана и непрерывна на спектре оператора U . Распространив ее с сохранением непрерывности на весь промежуток $[t, M]$, получим непрерывную в $[t, M]$ функцию $\tilde{\varphi}(t)$. По определению полагаем

$$\varphi(U) = \tilde{\varphi}(U).$$

В силу установленного выше оператор $\varphi(U)$ не зависит от способа распространения функции $\varphi(t)$ и определяется только значениями функции φ на S_U . Ясно, что свойства операторных функций, сформулированные в теореме 1, переносятся на функции только что определенные (в формулировке теоремы 1 следует всюду заменить промежуток $[t, M]$ множеством S_U).

Расширение понятия операторной функции позволяет доказать важную теорему, характеризующую спектр самосопряженного оператора.

Будем говорить, что комплексное число λ есть *регулярное значение* оператора U , если оно не принадлежит спектру этого оператора.

Теорема 3 (5.IX). Для того чтобы λ было регулярным значением оператора U , необходимо и достаточно, чтобы в H существовал линейный обратный оператор

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1}. *$$

Доказательство. Необходимость. Пусть λ — регулярное значение. Зададим на S_U функцию ρ_λ :

$$\rho_\lambda(t) = \frac{1}{t - \lambda}$$

и положим $R_\lambda = \rho_\lambda(U)$. Так как

$$(t - \lambda) \rho_\lambda(t) = 1 \quad (t \in S_U),$$

то по теореме 1

$$(U - \lambda I) R_\lambda = R_\lambda (U - \lambda I) = I,$$

откуда

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1}.$$

*) Именно эта теорема служит основанием для определения спектра в общем случае произвольного линейного оператора в произвольном нормированном пространстве (см. главу XIII).

Достаточность. Если существует линейный обратный (хотя бы левый) оператор

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1},$$

то при $\|x\| = 1$

$$\|R_\lambda (U - \lambda I) x\| = \|x\| = 1.$$

Следовательно,

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geq \frac{1}{\|R_\lambda\|} > 0.$$

Доказанная теорема позволяет распространить результат леммы 1 на произвольные вещественные непрерывные функции.

Теорема 4 (5.IX). Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная на S_U вещественная функция. Тогда

$$S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in \overline{\varphi(S_U)}$. Функция ψ :

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t) - \mu} \quad (t \in S_U)$$

непрерывна на S_U , поэтому имеет смысл оператор $\psi(U)$. Очевидно,

$$\psi(U) = [\varphi(U) - \mu I]^{-1}.$$

Следовательно, по теореме 3 $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

Предположим теперь, что $\mu = \varphi(\lambda)$, где $\lambda \in S_U$. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на S_U к $\varphi(t)$. Имеем

$$\|\varphi(U)x - \mu x\| \leq \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| + \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\| \|x\| + |\mu - \varphi_n(\lambda)| \|x\|.$$

А так как в силу леммы 1

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| = 0,$$

то

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| \leq \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\| + |\mu - \varphi_n(\lambda)|.$$

Устремляя здесь $n \rightarrow \infty$, найдем

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = 0,$$

т. е. $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

5.4. С каждым самосопряженным оператором U можно связать семейство проекторов, которое позволяет построить представление как самого оператора U , так и операторных функций в форме интеграла типа интеграла Стильбеса.

Пусть U — самосопряженный оператор. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda^+(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq \lambda) \\ t - \lambda & (t > \lambda) \end{cases}$$

и введем обозначение

$$U_{\lambda}^{+} = \varphi_{\lambda}^{+}(U).$$

Пусть далее H_{λ}^{+} означает множество всех элементов, для которых $U_{\lambda}^{+}x = 0$, т. е., иначе говоря, H_{λ}^{+} есть собственное подпространство оператора U_{λ}^{+} , отвечающее нулевому собственному значению. Обозначим, наконец, проектор, проектирующий на подпространство H_{λ}^{+} , через I_{λ} .

Свойства проекторов I_{λ} , как показывает приведенная ниже теорема, тесно связаны со спектром оператора U , вследствие чего семейство проекторов I_{λ} называется *спектральной функцией* оператора U .

Теорема 5 (5.IX). а) Если $\lambda < m$, то $I_{\lambda} = 0$; если $\lambda > M$, то $I_{\lambda} = I$.

б) Если $\lambda \leq \mu$, то $I_{\lambda} \leq I_{\mu}$.

с) Спектральная функция как функция от λ непрерывна справа в том смысле, что

$$I_{\lambda} = I_{\lambda+0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} I_{\mu} \text{ на } H.$$

д) Проектор I_{λ} ($-\infty < \lambda < \infty$) перестановочен с каждым оператором, перестановочным с U .

е) Каждое вещественное регулярное значение λ оператора U есть точка постоянства спектральной функции, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что $I_{\lambda-\delta} = I_{\lambda+\delta}$. И, наоборот, точки постоянства спектральной функции суть регулярные значения оператора U .

ф) Вещественное λ тогда и только тогда является собственным значением оператора U , когда $I_{\lambda} = I_{\lambda+0} \neq I_{\lambda-0}$, где $I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_{\mu}$ на H . При этом оператор $P_{\lambda} = I_{\lambda} - I_{\lambda-0}$ является проектором на собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ .

г) Если $\varphi(t) \geq 0$ в промежутке $[\lambda, \mu]$, то $[I_{\mu} - I_{\lambda}] \varphi(U) \geq 0$.*

Доказательство. а) Если $\lambda < m$, то $U_{\lambda}^{+} = U - \lambda I$. Поэтому для $x \neq 0$

$$(U_{\lambda}^{+}x, x) = (Ux, x) - \lambda(x, x) \geq (m - \lambda)(x, x) > 0,$$

так что H_{λ}^{+} состоит только из нулевого элемента.

В случае $\lambda > M$ имеем $U_{\lambda}^{+} = 0$ и $H_{\lambda}^{+} = H$.

* Очевидно, достаточно требовать выполнения неравенства $\varphi(t) \geq 0$ лишь в точках спектра, входящих в промежуток $[\lambda, \mu]$.

б) Если $\lambda \leq \mu$, то $\varphi_\lambda^+(t) \geq \varphi_\mu^+(t)$ и, следовательно, по теореме 1 $U_\lambda^+ \geq U_\mu^+$. Кроме того, $U_\mu^+ \geq 0$. Поэтому

$$0 \leq (U_\mu^+ x, x) \leq (U_\lambda^+ x, x) \quad (x \in \mathbf{H}).$$

Если $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$, то $U_\lambda^+ x = 0$ и, следовательно,

$$(U_\mu^+ x, x) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $U_\mu^+ x = 0$, *) т. е. $x \in \mathbf{H}_\mu^+$. Таким образом, $\mathbf{H}_\lambda^+ \subset \mathbf{H}_\mu^+$, что соответствует требуемому соотношению между проекторами: $I_\lambda \leq I_\mu$ (V.4.7, лемма).

с) Поскольку I_λ убывает с убыванием λ , то по теореме 7 (4.V) $I_{\lambda+0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} I_\mu$ на $\mathbf{H}$ существует и представляет собой проектор.

Обозначим через $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+$ соответствующее ему подпространство. Так как $I_\lambda \leq I_{\lambda+0}$, то $\mathbf{H}_\lambda^+ \subset \mathbf{H}_{\lambda+0}^+$. Пусть $x \in \mathbf{H}_{\lambda+0}^+$. Поскольку, очевидно, $x \in \mathbf{H}_\mu^+$ ($\mu > \lambda$), $I_\mu x = x$. Следовательно, $U_\mu^+ x = 0$; но

$$\|U_\mu^+ - U_\lambda^+\| = \max_{t \in S_U} |\varphi_\mu^+(t) - \varphi_\lambda^+(t)| \leq \mu - \lambda,$$

так что

$$U_\lambda^+ x = \lim_{\mu \rightarrow \lambda+0} U_\mu^+ x = 0,$$

откуда $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$. Таким образом, $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+ \subset \mathbf{H}_\lambda^+$, что вместе с предыдущим дает равенство $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+ = \mathbf{H}_\lambda^+$, или, иначе, $I_{\lambda+0} = I_\lambda$.

д) Пусть V — оператор, перестановочный с U . По теореме 1 оператор V перестановочен и с U_λ^+ . Используя это, будем иметь для $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$

$$U_\lambda^+ Vx = VU_\lambda^+ x = 0,$$

т. е. $Vx \in \mathbf{H}_\lambda^+$. Если x — произвольный элемент из $\mathbf{H}$, то по доказанному $VI_\lambda x \in \mathbf{H}_\lambda^+$, следовательно,

$$VI_\lambda = I_\lambda VI_\lambda. \quad (7)$$

Оператор V^* также перестановочен с U , поэтому в (7) можно заменить V на V^* :

$$V^* I_\lambda = I_\lambda V^* I_\lambda.$$

Переходя в обеих частях последнего равенства к сопряженным операторам, будем иметь

$$I_\lambda V = I_\lambda V I_\lambda.$$

*) Если для положительного оператора V и некоторого $x \in \mathbf{H}$ имеет место $(Vx, x) = 0$, то $Vx = 0$. В самом деле, $0 = (Vx, x) = (\| \sqrt{V} \|^2 x, x) = (\sqrt{V} x, \sqrt{V} x)$, т. е. $\sqrt{V} x = 0$, а тогда и $Vx = \sqrt{V} \sqrt{V} x = 0$.

Сравнивая это с (7), получим

$$I_{\lambda}V = VI_{\lambda}.$$

е) Введем оператор

$$U_{\lambda}^{-} = \varphi_{\lambda}^{-}(U),$$

где

$$\varphi_{\lambda}^{-}(t) = \begin{cases} t - \lambda & (t \leq \lambda) \\ 0 & (t > \lambda) \end{cases},$$

и докажем справедливость соотношения

$$U_{\lambda}^{-} = I_{\lambda}(U - \lambda I). \quad (8)$$

Действительно, так как

$$U - \lambda I = U_{\lambda}^{+} + U_{\lambda}^{-}, \quad (9)$$

то для $x \in \mathbf{H}_{\lambda}^{+}$

$$Ux - \lambda x = U_{\lambda}^{-}x.$$

Если же x — произвольный элемент из $\mathbf{H}$, то можно написать

$$I_{\lambda}(Ux - \lambda x) = (U - \lambda I)I_{\lambda}x = U_{\lambda}^{-}I_{\lambda}x = I_{\lambda}U_{\lambda}^{-}x. \quad (10)$$

Но так как $U_{\lambda}^{+}U_{\lambda}^{-} = 0$, т. е. $U_{\lambda}^{+}(U_{\lambda}^{-}x) = 0$, то $U_{\lambda}^{-}x \in \mathbf{H}_{\lambda}^{+}$, следовательно $I_{\lambda}U_{\lambda}^{-}x = U_{\lambda}^{-}x$, что и приводит к формуле (8).

Предположим теперь, что λ_0 есть точка постоянства спектральной функции, т. е. существует промежуток (λ, μ) , содержащий λ_0 , такой, что $I_{\lambda} = I_{\mu}$. Рассмотрим оператор

$$P = \frac{U_{\lambda}^{-} - U_{\mu}^{-}}{\mu - \lambda}.$$

Используя формулу (8), будем иметь

$$P = \frac{I_{\lambda}(U - \lambda I) - I_{\mu}(U - \mu I)}{\mu - \lambda} = I_{\lambda},$$

т. е. P — проектор. Вместе с тем

$$P = \sigma(U),$$

где $\sigma(t)$ — функция, равная единице для $t \leq \lambda$, нулю для $t \geq \mu$ и линейная в промежутке $[\lambda, \mu]$.

Допустим, что в промежутке (λ, μ) имеются точки спектра оператора U , пусть, например, $\tilde{\lambda}$ одна из таких точек. С одной стороны, имеем

$$Q = P - P^2 = 0.$$

Между тем, согласно теореме 2,

$$\|Q\| = \max_{t \in S_U} |\sigma(t) - \sigma^2(t)| \geq \sigma(\tilde{\lambda}) - \sigma^2(\tilde{\lambda}) > 0.$$

Таким образом, λ_0 как точка промежутка (λ, μ) , представляет собой регулярное значение.

Предположим теперь, что λ — точка роста спектральной функции. Это означает, что при любом $\delta > 0$

$$I_{\lambda+\delta} - I_{\lambda-\delta} \neq 0.$$

Рассмотрим $x \in H_{\lambda+\delta}^+ \ominus H_{\lambda-\delta}^+$. Поскольку $x \in H_{\lambda+\delta}^+$, то $U_{\lambda+\delta}^+ x = 0$. Но так как

$$\|U_{\lambda+\delta}^+ - U_{\lambda}^+\| \leq \delta,$$

то

$$\|U_{\lambda}^+ x\| \leq \delta \|x\|.$$

Далее, $x \perp H_{\lambda-\delta}^+$, т. е. $I_{\lambda-\delta} x = 0$. Следовательно,

$$I_{\lambda-\delta} U_{\lambda-\delta}^- x = U_{\lambda-\delta}^- I_{\lambda-\delta} x = 0,$$

откуда получаем $U_{\lambda-\delta}^- x \perp H_{\lambda-\delta}^+$. Но, как уже отмечалось выше, всегда $U_{\lambda-\delta}^- x \in H_{\lambda-\delta}^+$. Таким образом, для рассматриваемого случая $U_{\lambda-\delta}^- x = 0$. Аналогично предыдущему имеем

$$\|U_{\lambda-\delta}^- - U_{\lambda}^-\| \leq \delta,$$

откуда

$$\|U_{\lambda}^- x\| \leq \delta \|x\|.$$

Ввиду (9) получаем

$$\|Ux - \lambda x\| \leq \|U_{\lambda}^+ x\| + \|U_{\lambda}^- x\| \leq 2\delta \|x\|. \quad (11)$$

Беря последовательность $\delta_n \rightarrow 0$ и соответствующую последовательность нормированных элементов $x_n \in H_{\lambda+\delta_n}^+ \ominus H_{\lambda-\delta_n}^+$, найдем

$$\|Ux_n - \lambda x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а это означает, что λ принадлежит спектру оператора U .

г) Отметим прежде всего, что вследствие монотонности спектральной функции существует

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_{\mu} \quad \text{на } H,$$

причем $I_{\lambda-0}$ является проектором. Очевидно также $I_{\lambda-0} \leq I_{\lambda}$.

Предположим теперь, что в точке λ

$$I_{\lambda-0} \neq I_{\lambda+0} = I_{\lambda}.$$

Обозначая через $H_{\lambda-0}^+$ подпространство, соответствующее проектору $I_{\lambda-0}$, возьмем $x \in H_{\lambda}^+ \ominus H_{\lambda-0}^+$. Очевидно, $x \in H_{\lambda+\delta}^+ \ominus H_{\lambda-\delta}^+$ при любом $\delta > 0$. Поскольку неравенство (11) выполняется при любом δ , а левая его часть от δ не зависит, то

$$\|Ux - \lambda x\| = 0,$$

т. е. λ является собственным значением оператора U , а x есть соответствующий собственный элемент. Если обозначить, как обычно, через H_λ собственное подпространство и через P_λ проектор на H_λ , то из доказанного вытекает, что

$$H_\lambda \supset H_\lambda^+ \ominus H_{\lambda-0}^+ \quad (P_\lambda \geq I_\lambda - I_{\lambda-0}).$$

Рассмотрим далее проектор

$$I'_\mu = P_\lambda - I_\mu P_\lambda \quad (-\infty < \mu < \infty)$$

и докажем, что $I'_\mu x = 0$ равносильно равенству $P_\lambda U_\mu^+ x = 0$. В самом деле, если $I'_\mu x = 0$, то $P_\lambda x = I_\mu P_\lambda x$, откуда $P_\lambda U_\mu^+ x = U_\mu^+ P_\lambda x = 0$. Если, наоборот, $P_\lambda U_\mu^+ x = 0$, то $P_\lambda x \in H_\mu^+$ и $I_\mu P_\lambda x = P_\lambda x$, т. е. $I'_\mu x = 0$.

Пользуясь пунктом h) теоремы 1, будем иметь

$$P_\lambda U_\mu^+ = P_\lambda \varphi_\lambda^+ (P_\lambda U).$$

Но

$$P_\lambda U = \lambda P_\lambda,$$

так что непосредственно из определения операторной функции получаем

$$P_\lambda U_\mu^+ = \begin{cases} (\lambda - \mu) P_\lambda & \mu < \lambda, \\ 0 & \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\mu < \lambda$ равенство $I'_\mu x = 0$ равносильно тому, что $P_\lambda x = 0$, т. е. при $\mu < \lambda$ будет $I'_\mu = P_\lambda$. Если же $\mu \geq \lambda$, то $I'_\mu = 0$. Таким образом,

$$I_\mu P_\lambda = \begin{cases} 0 & \mu < \lambda, \\ P_\lambda & \mu \geq \lambda. \end{cases}$$

Но

$$I_\mu = I_\mu P_\lambda + I_\mu (I - P_\lambda).$$

Следовательно,

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} I_\mu = I_{\lambda-0} (I - P_\lambda).$$

Вычитая это из равенства

$$I_\lambda = I_\lambda P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda) = P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda),$$

получим

$$I_\lambda - I_{\lambda-0} = P_\lambda + (I_\lambda - I_{\lambda-0}) (I - P_\lambda) \geq P_\lambda.$$

Так как $P_\lambda \neq 0$, то тем более $I_\lambda - I_{\lambda-0} \neq 0$, т. е. спектральная функция имеет скачок в точке λ . Кроме того, учитывая полученное ранее соотношение, найдем

$$P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}.$$

г) Предположим сначала, что $\varphi(t) = 0$ в промежутке $[\lambda, \mu]$ и докажем, что $[I_\mu - I_\lambda] \varphi(U) = 0$. С этой целью рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}(t)$, совпадающую в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r (\lambda_k \leq \lambda, \lambda_r = \lambda)$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s (\mu_k \geq \mu, \mu_1 = \mu)$ с функцией $\varphi(t)$ и линейную в промежутках между этими точками. Ясно, что

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi_{\lambda_k}^-(t) + \sum_{k=1}^s \beta_k \varphi_{\mu_k}^+(t),$$

и, следовательно,

$$\tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^r \alpha_k U_{\lambda_k}^- + \sum_{k=1}^s \beta_k U_{\mu_k}^+.$$

Проверим, что

$$[I_\mu - I_\lambda] \tilde{\varphi}(U) = 0. \quad (12)$$

В сумме

$$[I_\mu - I_\lambda] \tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^r \alpha_k [I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- + \sum_{k=1}^s \beta_k [I_\mu - I_\lambda] U_{\mu_k}^+$$

рассмотрим по отдельности каждое слагаемое. Используя формулу (8), получим

$$[I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- = [I_\mu - I_\lambda] I_{\lambda_k}(U - \lambda_k I) = [I_\mu I_{\lambda_k} - I_\lambda I_{\lambda_k}](U - \lambda_k I).$$

Но $I_{\lambda_k} \leq I_\lambda \leq I_\mu$, поэтому $I_\mu I_{\lambda_k} = I_\lambda I_{\lambda_k} = I_{\lambda_k}$, откуда следует, что $[I_\mu - I_\lambda] U_{\lambda_k}^- = 0$. Далее, $[I_\mu - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ = I_\mu [I - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ = [I - I_\lambda] U_{\mu_k}^+ I_\mu = 0$.

Итак, (12) доказано.

Функция $\varphi(t)$ может быть представлена как предел равномерно сходящейся на промежутке $[m, M]$ последовательности кусочно-линейных функций рассмотренного вида. Поскольку соотношение вида (12) выполнено для каждой функции последовательности, то переход к пределу, возможный на основании пункта г) теоремы 1, приводит к требуемому соотношению: $[I_\mu - I_\lambda] \varphi(U) = 0$.

Будем теперь считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы, т. е. что $\varphi(t) \geq 0$ для $t \in [\lambda, \mu]$. Рассмотрим наряду с функцией $\varphi(t)$ функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(\lambda) & t < \lambda \\ \varphi(t) & \lambda \leq t \leq \mu \\ \varphi(\mu) & t > \mu \end{cases}.$$

Поскольку $\psi(t) \geq 0$ для всех t , то $\psi(U) \geq 0$ и поэтому тем более $[I_\mu - I_\lambda] \psi(U) \geq 0$. Но в промежутке $[\lambda, \mu]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают, следовательно, по доказанному выше

$$[I_\mu - I_\lambda] [\varphi(U) - \psi(U)] = 0,$$

откуда получаем

$$[I_\mu - I_\lambda] \varphi(U) = [I_\mu - I_\lambda] \psi(U) \geq 0.$$

Доказательство теоремы закончено.

5.5. Перейдем теперь к интегральному представлению операторных функций. Пусть $\varphi(t)$ — вещественная непрерывная ограниченная функция, заданная на $(-\infty, \infty)$. *) Рассмотрим разбиение числовой прямой точками $-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} = \infty$ ($\lambda_1 < m$, $\lambda_n > M$) и образуем суммы

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} l_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}]; \quad S = \sum_{k=1}^{n-1} L_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}], \quad (13)$$

где

$$l_k = \inf_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t), \quad L_k = \sup_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t).$$

Поскольку в промежутке $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$l_k \leq \varphi(t) \leq L_k,$$

то по пункту g) теоремы 5

$$l_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leq [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \varphi(U) \leq L_k [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}].$$

Складывая все эти соотношения, получим

$$s \leq \varphi(U) \leq S. \quad (14)$$

Но, с другой стороны,

$$S - s = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k - l_k) [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leq \delta I,$$

где через δ обозначен $\max_{k=1, 2, \dots, n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$. Поэтому если $\delta \rightarrow 0$, то

$\|S - s\| \rightarrow 0$. А вследствие того, что $0 \leq S - \varphi(U) \leq S - s$, будем иметь $S \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \varphi(U)$ и аналогично $s \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \varphi(U)$.

Образуем теперь «интегральную» сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \quad (\lambda_k \leq \xi_k \leq \lambda_{k+1}). \quad (15)$$

Без труда проверяем, что

$$s \leq \sigma \leq S$$

и, следовательно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} S = \varphi(U).$$

*) Можно считать, что $\varphi(t)$ первоначально задана на спектре оператора U , а затем распространена на всю числовую прямую с сохранением указанных свойств.

Но $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma$ можно рассматривать как интеграл:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dI_t. \quad (16)$$

Таким образом, мы получаем формулу

$$\varphi(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dI_t. \quad (17)$$

В частности, если $\varphi(t) = t$, формула (17) дает *интегральное представление* оператора U

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} t dI_t. \quad (18)$$

Свойства операторных функций, приведенные в теореме 1 и в 5.3, могут быть сформулированы в терминах операторного интеграла (16). Укажем еще на формулу, связывающую понятие операторной функции с обычным интегралом Стильтьеса

$$(\varphi(U)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d(I_t x, y)$$

и вытекающее отсюда соотношение

$$\|\varphi(U)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 d(I_t x, x).$$

Несложный вывод этого предоставляем читателю.

Интеграл вида (16) можно рассматривать и по промежутку $[\lambda, \mu]$. Нетрудно проверить, что

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t) dI_t = [I_{\mu} - I_{\lambda}] \varphi(U).$$

В частности, если $\lambda < m, \mu \geq M$, то

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t) dI_t = \varphi(U).$$

5.6. Для построения интеграла типа (16) нет необходимости предполагать, что семейство проекторов I_{λ} является спектральной функцией самосопряженного оператора. Достаточно, если семейство проекторов удовлетворяет условиям, сформулированным в пунктах а) и б) теоремы 5.

Пусть $\{E_\lambda\}$ — семейство проекторов, зависящих от вещественного параметра и удовлетворяющих условиям:

1) $E_\lambda \leq E_\mu$, если $\lambda \leq \mu$;

2) существуют числа m и M такие, что $E_\lambda = 0$ для $\lambda < m$ и $E_\lambda = I$ для $\lambda > M$.

Семейство $\{E_\lambda\}$ мы будем называть в этом случае *разложением единицы*.

При сделанных предположениях комплексная функция $(E_t x, y)$ вещественного аргумента будет функцией ограниченной вариации, каковы бы ни были элементы $x, y \in \mathbf{H}$. Это непосредственно вытекает из формулы

$$(E_t x, y) = \frac{1}{4} \{[(E_t(x+y), x+y) - (E_t(x-y), x-y)] + \\ + i[(E_t(x+yi), x+yi) - (E_t(x-yi), x-yi)]\}.$$

Таким образом, если $\varphi(t)$ — непрерывная ограниченная функция, то имеет смысл интеграл

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d(E_t x, y) \quad (x, y \in \mathbf{H}).$$

Нетрудно видеть, что функционал $J(\varphi; x, y)$ аддитивен и однороден по x и по y . *) Кроме того, поскольку

$$|J(\varphi; x, y)| \leq \sup |\varphi(t)| \bigvee_{-\infty}^{\infty} |(E_t x, y)| \leq \\ \leq \sup |\varphi(t)| \cdot \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+yi\|^2 + \|x-yi\|^2] = \\ = \sup |\varphi(t)| [\|x\|^2 + \|y\|^2], \quad (19)$$

то функционал $J(\varphi; x, y)$ непрерывен по x, y .

Фиксируя x , рассмотрим линейный функционал от y

$$f_x(y) = \overline{J(\varphi; x, y)}.$$

Учитывая общую форму линейного функционала в гильбертовом пространстве, будем иметь

$$f_x(y) = (y, \tilde{x}),$$

где элемент $\tilde{x} \in \mathbf{H}$ определяется лишь функционалом f_x , т. е. в конечном счете элементом x . Полагая $\tilde{x} = J(\varphi)x$, можем записать

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi)x, y).$$

*) По y однородность «второго рода»: $J(\varphi; x, \alpha y) = \bar{\alpha} J(\varphi; x, y)$.

Ясно, что оператор $J(\varphi)$ аддитивен и однороден. Далее, с помощью (19) получаем

$$\|J(\varphi)x\| = \left(J(\varphi)x, \frac{J(\varphi)x}{\|J(\varphi)x\|} \right) \leq \sup_{\|y\|=1} (J(\varphi)x, y) \leq \sup_t |\varphi(t)| [\|x\|^2 + 1],$$

откуда вытекает ограниченность оператора $J(\varphi)$.

Таким же точно образом можно определить интеграл по любому промежутку $[\lambda, \mu]$.

Докажем теперь, что оператор $J(\varphi)$ является пределом интегральных сумм вида (15):

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}] \quad (\lambda_1 < m, \lambda_n > M).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (J(\varphi)x, y) - (\sigma x, y) &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(t) d(E_t x, y) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(\xi_k) d(E_t x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)] d(E_t x, y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|J(\varphi) - \sigma\| &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(J(\varphi)x, y) - (\sigma x, y)| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)] d(E_t x, y) \right|. \end{aligned}$$

Обозначая через ω наибольшее колебание функции $\varphi(t)$ в промежутках $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, ..., $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$, можем продолжить оценку

$$\|J(\varphi) - \sigma\| \leq \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \bigvee_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [(E_t x, y)] = \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \bigvee_{-\infty}^{\infty} [(E_t x, y)] \leq 2\omega.$$

Если $\delta = \max_{k=1, 2, \dots, n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \rightarrow 0$, то $\omega \rightarrow 0$ и, следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = J(\varphi)$. Установленное обстоятельство дает основание для обо-

значения: $J(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dE_t$.

Пользуясь доказанным, укажем некоторые свойства оператора $J(\varphi)$.

I. $[J(\varphi)]^* = J(\bar{\varphi})$.

II. Если $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, то $J(\varphi) = \alpha J(\varphi_1) + \beta J(\varphi_2)$.

III. Если $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$, то

$$J(\varphi) = J(\varphi_1) J(\varphi_2) = J(\varphi_2) J(\varphi_1). \quad (20)$$

Остановимся на доказательстве последнего свойства. Для некоторого разбиения образуем интегральные суммы

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}],$$

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}], \quad \sigma'' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_2(\xi_k) [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}].$$

Так как при $j < k$ будет $\lambda_j < \lambda_{j+1} \leq \lambda_k < \lambda_{k+1}$, то

$$\begin{aligned} [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}] [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}] &= \\ &= E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_j} - E_{\lambda_k} E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_k} E_{\lambda_j} = \\ &= E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_j} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в произведении

$$\sigma' \sigma'' = \sum_{j, k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_j) \varphi_2(\xi_k) [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}] [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}]$$

могут быть отличными от нуля лишь слагаемые с $j = k$. Следовательно,

$$\sigma' \sigma'' = \sigma.$$

Переходя к пределу, получаем (20).

IV. Имеет место оценка

$$\|J(\varphi)\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|. \quad (21)$$

Действительно,

$$\|J(\varphi)x\|^2 = (J(\varphi)x, J(\varphi)x) = (J(|\varphi|^2)x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x).$$

$$\text{Так как} \quad (E_t x, x) = \begin{cases} 0 & t < m \\ \|x\|^2 & t > M, \end{cases}$$

то

$$\|J(\varphi)x\|^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M+\varepsilon} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x) \leq \max_{t \in [m-\varepsilon, M+\varepsilon]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2.$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, то в пределе (учитывая непрерывность функции $\varphi(t)$), получим

$$\|J(\varphi)x\|^2 \leq \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|^2 \|x\|^2,$$

что равносильно (21).

V. Если последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n\}$ равномерно сходится в промежутке $[m, M]$ к функции φ , то $J(\varphi_n) \rightarrow J(\varphi)$.

Свойства операторных интегралов $J(\varphi)$ совпадают со свойствами операторных функций. Причины этого обстоятельства становятся ясными из следующей теоремы:

Теорема 6 (5. IX). Пусть $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы, непрерывное справа, как функция параметра λ . Тогда $\{E_\lambda\}$ есть спектральная функция оператора

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t.$$

при этом

$$J(\varphi) = \varphi(U). \quad (22)$$

Доказательство. Справедливость равенства (22) без труда проверяется с помощью свойств II, III и V.

В частности,

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U) = J(\varphi_\lambda^+).$$

Откуда

$$(U_\lambda^+ x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda^+(t) d(E_t x, x) = \int_{\lambda}^{\infty} (t - \lambda) d(E_t x, x). \quad (23)$$

Если $I_\lambda x = x$, т. е. если $U_\lambda^+ x = 0$, то

$$\int_{\lambda}^{\infty} (t - \lambda) d(E_t x, x) = 0,$$

что может быть лишь в случае, когда

$$(E_t x, x) = \text{const. для } t > \lambda.$$

Отсюда

$$(E_t x, x) = (E_\infty x, x) = (x, x) \quad (t > \lambda)$$

и, следовательно,

$$E_t x = x \quad (t > \lambda).$$

Устремляя здесь $t \rightarrow \lambda + 0$, найдем

$$E_\lambda x = E_{\lambda+0} x = x,$$

т. е. $I_\lambda \leq E_\lambda$.

Наоборот, если $E_\lambda x = x$, то тем более $E_t x = x$ для $t > \lambda$. Из равенства (23) получаем тогда

$$(U_\lambda^+ x, x) = 0.$$

Следовательно,

$$U_\lambda^+ x = 0, *)$$

*) См. примечание на стр. 303.

а это означает, что $I_\lambda x = x$. Таким образом $I_\lambda \geq E_\lambda$, что вместе с предыдущим приводит к равенству $I_\lambda = E_\lambda$.

З а м е ч а н и е. Если разложение единицы не удовлетворяет требованию непрерывности справа, то можно показать, что

$$I_\lambda = E_{\lambda+0}.$$

Действительно, неравенство $I_\lambda \leq E_{\lambda+0}$ фактически получено при доказательстве теоремы. Далее, переходя к пределу в неравенстве $I_t \geq E_t$ при $t \rightarrow \lambda + 0$, получим противоположное неравенство

$$I_\lambda = I_{\lambda+0} \geq E_{\lambda+0}.$$

Пусть U — самосопряженный вполне непрерывный оператор и $\{\lambda_k\}$ — совокупность его собственных значений. Обозначая, как и раньше, через N_{λ_k} собственные подпространства и через P_{λ_k} проекторы на эти подпространства, введем операторы

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k \leq \lambda} P_{\lambda_k} \quad (-\infty < \lambda < \infty). \quad (24)$$

Нетрудно проверить, что семейство $\{E_\lambda\}$ представляет собой разложение единицы, непрерывное справа. Следовательно, $\{E_\lambda\}$ есть спектральная функция оператора

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t.$$

Но непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t dE_t = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k},$$

т. е., принимая во внимание формулу (3) предыдущего параграфа,

$$\tilde{U} = U.$$

Таким образом, проекторы (24) образуют спектральную функцию оператора U , и интегральное представление оператора U по формуле (18) совпадает с формулой (3) предыдущего параграфа.

5.7. Интегральное представление (17) дает путь для дальнейшего расширения понятия операторной функции. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$ такого рода, что при любых $x, y \in \mathbf{H}$ существует (и конечен) интеграл Лебега — Стильеса

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d(I_t x, y),$$

где $\{I_\lambda\}$ — спектральная функция оператора U . Как и выше, можно показать, что функционал $J(\varphi; x, y)$ допускает представление в форме

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi) x, y) \quad (x, y \in \mathbf{H}),$$

где $J(\varphi)$ — линейный оператор. Принимая во внимание формулу (22), естественно положить

$$\varphi(U) = J(\varphi).$$

К обобщению понятия операторной функции можно подойти и несколько иначе. Исходя из спектральной функции, можно определить операторную меру так же, как по вещественной монотонной функции определяется аддитивная функция множества. Если $\varphi(t)$ — характеристическая функция измеримого относительно операторной меры множества e , то $\varphi(U)$ есть значение операторной меры на e . Ясен смысл $\varphi(U)$ и в случае, когда $\varphi(t)$ — конечнозначная измеримая функция. Функция, измеримая относительно операторной меры, есть предел равномерно сходящейся последовательности конечнозначных измеримых функций, что и дает возможность определить $\varphi(U)$ для произвольной измеримой функции $\varphi(t)$.

Г Л А В А X

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

§ 1. Операции в пространствах последовательностей

1.1. Дадим описание линейных и, в частности, вполне непрерывных операций, переводящих пространство l^p в l^r ($p > 1, r \geq 1$). Пусть U — линейная операция из l^p в l^r :

$$y = U(x) \quad (x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad y = \{\eta_i\} \in l^r).$$

Обозначим $f_i(x) = \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Так как

$$|f_i(x)| = |\eta_i| \leq \|y\| \leq \|U\| \|x\|,$$

то ясно, что f_i есть линейный функционал в пространстве l^p . При этом $\|f_i\| \leq \|U\|$. По теореме об общей форме функционала в пространстве l^p функционал f_i может быть представлен в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta_i = f_i(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \\ (z_i = \{a_{ik}\} \in l^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \|z_i\| = \|f_i\|, \quad i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, операция U естественным образом определяет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$a_{ik} = f_i(x_k) \quad (x_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots); \quad i, k = 1, 2, \dots).$$

$\begin{matrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots \end{matrix}$

Пусть $x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad y = \{\eta_k\} \in l^r$. Напомним обозначение для «срезанных» элементов

$$[x]_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots), \quad [y]_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots)$$

и рассмотрим наряду с операцией U операции U_n и U_{nm} :

$$U_n(x) = [U(x)]_n, \quad U_{nm}(x) = U_n([x]_m) \quad (x \in I^p).$$

Положим еще

$$[a_{ik}]_n = \begin{cases} a_{ik} & (i \leq n), \\ 0 & (i > n), \end{cases} \quad [a_{ik}]_{mn} = \begin{cases} a_{ik} & (i \leq n, k \leq m) \\ 0 & (i > n \text{ или } k > m) \end{cases}$$

и введем матрицы

$$[A]_n = \begin{pmatrix} [a_{11}]_n & [a_{12}]_n & \dots & [a_{1k}]_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ [a_{i1}]_n & [a_{i2}]_n & \dots & [a_{ik}]_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$[A]_{nm} = \begin{pmatrix} [a_{11}]_{nm} & [a_{12}]_{nm} & \dots & [a_{1k}]_{nm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ [a_{i1}]_{nm} & [a_{i2}]_{nm} & \dots & [a_{ik}]_{nm} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что эти матрицы как раз и соответствуют операциям U_n и U_{nm} . В самом деле, сохраняя прежние обозначения за элементами x и $y = U(x)$ и, кроме того, полагая $U_n(x) = \{\eta_k\}_n$, $U_{nm}(x) = \{\eta_k\}_{nm}$, будем иметь

$$[\eta_i]_n = \begin{cases} \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k & (i \leq n) \\ 0 & (i > n), \end{cases}$$

т. е.

$$[\eta_i]_n = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_n \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$[\eta_i]_{nm} = \sum_{k=1}^m [a_{ik}]_n \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_{nm} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Докажем, что последовательности операций $\{U_n\}$ и $\{U_{nm}\}$ сходятся к U на каждом элементе из I^p .

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} [y]_n = y$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(x)]_n = U(x) \quad (x \in I^p).$$

Отметим также, что ввиду очевидного неравенства $\|[y]_n\| \leq \|y\|$, имеем $\|U_n(x)\| \leq \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|$, т. е.

$$\|U_n\| \leq \|U\|. \quad (3)$$

Возьмем N, M так, чтобы

$$\| [x]_m - x \| < \varepsilon, \quad \| U_n(x) - U(x) \| < \varepsilon \text{ при } m \geq M, n \geq N.$$

Тогда, если $m \geq M, n \geq N$, то

$$\begin{aligned} \| U(x) - U_{nm}(x) \| &\leq \| U(x) - U_n(x) \| + \\ &+ \| U_n(x) - U_n([x]_m) \| < \varepsilon + \| U_n \| \| x - [x]_m \| \leq \varepsilon + \| U \| \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} U_{nm}(x) = U(x) \quad (x \in I^p).$$

В случае, если U — вполне непрерывная операция, сходимость $U_n \rightarrow U$ и $U_{nm} \rightarrow U$ имеет место по норме в пространстве линейных операций.

Теорема 1 (1.X). Для того чтобы операция U была вполне непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U$ или $U_{nm} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} U$, т. е. чтобы имело место любое из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| U_n - U \| = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \| U_{nm} - U \| = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Достаточность. Операции U_n и U_{nm} вполне непрерывны, так как они переводят I^p в конечномерное (n -мерное) пространство. А тогда по теореме 3 (2. IX) будет вполне непрерывной операцией и $U = \lim U_n = \lim U_{nm}$.

Необходимость. Обозначим через Γ множество значений $U(x)$ при $\|x\| \leq 1$. Так как U вполне непрерывна, то Γ — компактное множество. Рассмотрим далее операции V_n :

$$V_n(y) = [y]_n \quad (y \in \Gamma; n = 1, 2, \dots).$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(y) = y \quad (y \in \Gamma). \quad (5)$$

Следовательно, по теореме Гельфанда (теорема 3 (1. IX)) на компактном множестве Γ сходимость (5) равномерная, т. е. для всех $y \in \Gamma$ и достаточно больших n ($n \geq N$)

$$\| [y]_n - y \| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\| U_n(x) - U(x) \| < \varepsilon \quad (\|x\| \leq 1, n \geq N),$$

а это и означает, что

$$\| U_n - U \| \leq \varepsilon \quad (n \geq N). \quad (6)$$

Таким образом, первое из соотношений (4) доказано.

Для установления второго исходим из того, что

$$U_N(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x), 0, \dots).$$

Если положить

$$f_{im}(x) = f_i([x]_m) = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k \quad (x = \{\xi_k\} \in I^p),$$

то для достаточно больших m ($m \geq M$) будем иметь

$$\|f_i - f_{im}\| = \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right\}^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \|U_N(x) - U_{Nm}(x)\| &= \\ &= \|(f_1(x) - f_{1m}(x), f_2(x) - f_{2m}(x), \dots, f_N(x) - f_{Nm}(x), 0, \dots)\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} \|x\| \|(1, 1, \dots, 1, 0, \dots)\| = \frac{\varepsilon}{N} \|x\| N^{\frac{1}{r}} \leq \varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

Наконец, отсюда и из неравенства $\|U_n - U_N\| \leq 2\varepsilon$ ($n \geq N$), которое следует из (6), получаем

$$\begin{aligned} \|U_n(x) - U_{nm}(x)\| &= \|U_n(x) - U_n([x]_m)\| \leq \|U_n(x) - U_N(x)\| + \\ &+ \|U_n([x]_m) - U_N([x]_m)\| + \|U_N(x) - U_N([x]_m)\| \leq 2\varepsilon \|x\| + \\ &+ 2\varepsilon \|[x]_m\| + \varepsilon \|x\| \leq 5\varepsilon \|x\|. \end{aligned}$$

Так как, кроме того, $\|U_n - U\| \leq \varepsilon$, то

$$\|U_{nm} - U\| \leq 6\varepsilon \quad (n \geq N, m \geq M),$$

и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Формулировке данной теоремы можно придать другую форму. Прежде всего можно вместо операции U_{nm} ограничиться операцией U_{nn} и сходимость к U заменить сходимостью в себе. Таким образом, можно сказать, что для полной непрерывности операции U необходимо и достаточно, чтобы

$$\|U_{nn} - U_{vv}\| < \varepsilon \quad (n, v \geq N_\varepsilon).$$

Отметим теперь, что

$$\begin{aligned} \|U_{nn}\| &= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|x'\| \leq 1}} \left| \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k \right| \\ &\left(x = \{\xi_k\} \in I^p, x' = \{\xi'_k\} \in I^s, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

*) Если $r = 1$, то $s = \infty$ и $I^s = m$.

Действительно, пусть X — B -пространство. Обозначим через X_x функционал в пространстве X^* , определяемый элементом $x \in X$ (см. V.1.2). Тогда

$$\|x\| = \|X_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |X_x(f)| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \quad (f \in X^*).$$

Если операция U переводит X в пространство Y , то

$$\|U\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|g\| \leq 1} |g(U(x))| \quad (x \in X, g \in Y^*). \quad (8)$$

Понимая под X пространство l^p , под Y пространство l^r и взяв в качестве U операцию U_{nn} , будем иметь

$$g(U(x)) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k \quad (x = \{\xi_k\} \in l^p), \quad (9)$$

где последовательность $x' = \{\xi'_k\} \in l^s$ определяет функционал g ($\|g\| = \|x'\|$). Сопоставляя (8) и (9), получаем (7).

Применяя формулу (7) к разности $U_{nn} - U_{vv}$ (считая $n \geq v$), можем записать предыдущее условие в виде

$$\left| \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi'_k - \sum_{i,k=1}^v a_{ik} \xi_i \xi'_k \right| < \varepsilon \quad (v \geq N)$$

для $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k|^s \leq 1$. Иначе говоря, теорему можно сформулировать и таким образом:

Для того чтобы операция U была вполне непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность билинейных форм, соответствующих срезанным матрицам $[A]_{nn}$, равномерно сходилась в себе в единичных сферах пространств l^p и l^s .

Это предложение по существу было установлено еще Гильбертом.

1.2. Выше мы исходили из данной линейной операции U и по ней определяли матрицу (2). Представляет интерес выяснить, при каких условиях данная заранее матрица (2) является матрицей, соответствующей некоторой линейной или вполне непрерывной операции?

С помощью «срезанных» матриц мы можем образовать операции U_{nm} , полагая

$$y = U_{nm}(x) \quad (x = \{\xi_k\} \in l^p, y = \{\eta_k\} \in l^r),$$

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k & (i \leq n) \\ 0 & (i > n). \end{cases}$$

Теорема 2 (1.X). Для того чтобы матрица (2) служила матрицей некоторой линейной операции U из l^p в l^r , необхо-

димо и достаточно, чтобы определенные по этой матрице операции U_{nn} (или U_{nm}) были ограничены по норме

$$\|U_{nn}\| \leq K \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ [или } \|U_{nm}\| \leq K \quad (n, m = 1, 2, \dots)]. \quad (10)$$

Для того чтобы операция U была вполне непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы последовательность операций U_{nn} сходилась в себе

$$\lim_{n, v \rightarrow \infty} \|U_{nn} - U_{vv}\| = 0. \quad *) \quad (11)$$

Доказательство. Необходимость. В случае, если операция U существует, то, как мы показали выше, имеет место сходимость $U_{nn} \rightarrow U$ на l^p . Ввиду полноты пространств l^p и l^r нормы операций U_{nn} ограничены в совокупности (теорема Банаха — Штейнгауса; VII.1.2).

В случае полной непрерывности операции имеем по теореме 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn} = U$, откуда непосредственно следует (11).

Достаточность. Рассмотрим сначала поведение операций U_{nn} на срезанных элементах. Пусть дан элемент $x \in l^p$ такой, что $[x]_m = x$. Считая $n > m$, будем иметь

$$U_{nn}(x) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots) \\ \left(\eta_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, 0, \dots); \quad i = 1, 2, \dots, n \right).$$

При этом в силу (10)

$$\|U_{nn}(x)\| = \left[\sum_{i=1}^n |\eta_i|^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq K \|x\|.$$

В таком случае последовательность $\{\eta_i\} \in l^r$ и, следовательно, существует

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}(x) \in \{\eta_i\}.$$

Итак, и последовательность $\{U_{nn}\}$ сходится на плотном в l^p множестве срезанных элементов, и поскольку последовательность норм этих операций ограничена, то сходимость имеет место во всем пространстве l^p . Пусть

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}(x) \quad (x \in l^p).$$

*) Для случая пространства l^2 теорема доказана Гильбертом (см. Гильберт).

Так как для произвольного $x \in l^p$

$$U([x]_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn}([x]_m) = (\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \dots, \eta_i^{(m)}, \dots),$$

$$\eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; i = 1, 2, \dots),$$

то при $m \rightarrow \infty$ получаем

$$U(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} U([x]_m) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots),$$

где

$$\eta_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots),$$

т. е. операция U соответствует матрице (2).

Если выполнено условие (11), то очевидно

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nn},$$

а так как операции U_{nn} вполне непрерывны, то вполне непрерывной будет и операция U .

Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия.

Следствие 1. Если A — симметричная матрица, то для того, чтобы ей отвечала линейная операция из l^2 в l^2 , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_n |\lambda_1^{(n)}| < \infty, \quad (12)$$

где $\lambda_1^{(n)}$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Действительно, операция U_{nn} по существу является операцией в n -мерном пространстве, образованном теми элементами, все координаты которых, начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. А тогда

$$\|U_{nn}\| = |\lambda_1^{(n)}|.$$

Таким образом, (12) означает, что $\sup_n \|U_{nn}\| < \infty$, что совпадает с условием (10).

Следствие 2. Если матрица (2) удовлетворяет условию

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right]^{\frac{r}{q}} \right\}^{\frac{1}{r}} < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \quad (13)$$

то этой матрице отвечает вполне непрерывная операция U , причем

$$\|U\| \leq B.$$

Действительно, оценим норму операции U_{nn} . Имеем

$$\|U_{nn}(x)\|^r = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k \right|^r \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^q \right]^{\frac{r}{q}} \left[\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right]^{\frac{r}{p}} \leq B^r \|x\|^r.$$

Следовательно, $\|U_{nn}\| \leq B$, т. е. выполнено (10). Поэтому матрице A отвечает линейная операция U , причем $\|U\| \leq B$.

Понимая под U_n операцию, определенную в 1.1, применим найденную оценку для нормы операции U к разности $U - U_n$

$$\|U - U_n\| \leq \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right]^{\frac{r}{q}} \right\}^{\frac{1}{r}},$$

откуда ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$, а потому U вполне непрерывна.

Замечание 1. В случае если $p = r = 2$, условие (13) приобретает вид

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Замечание 2. Если $p = 1$, то условие (13) надо заменить условием

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |a_{ik}|^r \right\}^{\frac{1}{r}} < \infty. \quad (14)$$

Доказательство проводится аналогично.

§ 2. Интегральные операции в пространствах функций

В этом параграфе указываются условия, при которых интегральная операция U

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_D K(s, t) x(t) dt \quad (s \in D') \quad (1)$$

является линейной (или вполне непрерывной) операцией, преобразующей одно пространство функций — X в другое — Y . Большая часть результатов относится при этом к случаю $X = L_p^D$, $Y = L_q^{D'}$ ($1 \leq p, q \leq \infty$), где D и D' — области (с конечной мерой) μ -мерного, соответственно ν -мерного, евклидова пространства. Не умаляя общности, будем в дальнейшем считать, что $\text{mes } D = 1$.

Функция $K(s, t)$ — ядро операции U — всегда предполагается измеримой в области $D' \times D$, лежащей в $(\mu + \nu)$ -мерном пространстве, и, следовательно, для почти всех $s \in D'$ функция $K(s, t)$ измерима по t , а для почти всех $t \in D$ измерима по s .

Факты, установленные в этом параграфе, находят важнейшее применение в § 3 при изложении, так называемых, «теорем вложения» С. Л. Соболева, которые, в свою очередь, играют большую роль в теории дифференциальных уравнений математической физики.

Большинство результатов этого параграфа представляет обобщение теорем С. Л. Соболева об интегралах типа потенциала. Изложение здесь и в § 3 следует статье Л. В. Канторовича [45г].

2.1. Теорема 1 (2.X). Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq C_1 \quad (r > 0) \quad (2)$$

для почти всех $s \in D'$;

$$2) \left[\int_{D'} |K(s, t)|^\sigma ds \right]^{\frac{1}{\sigma}} \leq C_2 \quad (\sigma > 0) \quad (3)$$

для почти всех $t \in D$;

$$3) q \geq p; q \geq \sigma; \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' \leq r^* \quad (p, q \geq 1). \quad (4)$$

Тогда интегральная операция (1) является линейной операцией из пространства L_D^p в $L_{D'}^q$, причем **)

$$\|U\| \leq C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}}. \quad (5)$$

Доказательство. Преобразуем очевидную оценку для $|y(s)|$

$$\begin{aligned} |y(s)| &\leq \int_D |K(s, t)| |x(t)| dt = \\ &= \int_D [|K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p]^{\frac{1}{q}} |x(t)|^{p(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} |K(s, t)|^{\frac{1}{q} \frac{\sigma}{q}} dt. \end{aligned}$$

*) Здесь и в дальнейшем штрихом обозначен «сопряженный» показатель. Он определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{т. е. } p' = \frac{p}{p-1}.$$

**) Сформулированная теорема обобщена Х. Л. Смолицким. См. его статью «О суммируемости потенциалов». УМН, 1957, 12, № 4, 349—356.

Применим к последнему интегралу обобщенное неравенство Гёльдера (II.3.4) с показателями

$$\lambda_1 = q; \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}; \quad \lambda_3 = p' = \frac{p}{p-1} \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \right).^{*)}$$

Это даст

$$|y(s)| \leq \left[\int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \times \\ \times \left[\int_D |K(s, t)|^{p' \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)} dt \right]^{1 - \frac{1}{p}}. \quad (6)$$

Обозначая

$$\lambda = p' \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right),$$

будем иметь в силу (2), учитывая, что $\text{mes } D = 1$ и, по (4), $\lambda \leq r$ (см. неравенство (1) из II.5.1)

$$\left[\int_D |K(s, t)|^\lambda dt \right]^{1 - \frac{1}{p}} = \left[\int_D |K(s, t)|^\lambda dt \right]^{\frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)} \leq \\ \leq \left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)} \leq C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}}.$$

Используя это в (6), получим оценку для $|y(s)|$

$$|y(s)| \leq \left[\int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{q}} \|x\|^{1 - \frac{p}{q}} C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}}. \quad (7)$$

Оценивая с помощью этого неравенства $\|y\|$, находим

$$\|y\| = \left[\int_{D'} |y(s)|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_{D'} \int_D |K(s, t)|^\sigma |x(t)|^p dt ds \right\}^{\frac{1}{q}} \|x\|^{1 - \frac{p}{q}} C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}} = \\ = C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}} \left\{ \int_D |x(t)|^p \left(\int_{D'} |K(s, t)|^\sigma ds \right) dt \right\}^{\frac{1}{q}} \|x\|^{1 - \frac{p}{q}} \leq C_1^{1 - \frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}} \|x\|,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание 1. В случае, если фигурирующее в условии 3) требование $q \geq \sigma$ не выполнено, основное заключение теоремы о том, что (1) есть линейная операция из L^p в L^q , все же справедливо. Дей-

*) Мы предполагаем, что $q > p > 1$.

ствительно, если $q < \sigma$, то, заменяя q на $q_1 = \sigma$, сохраним неравенства (4). А в таком случае U есть линейная операция из L^p в L^{q_1} и тем более в L^q (так как $q < q_1$).

Если же не выполнено условие $q \geq p$, то операция U будет линейной из L^p в L^q в том случае, когда выполнено неравенство

$$p' \left(1 - \frac{\sigma}{p}\right) \leq r, \quad (8)$$

получающееся из (4) заменой q на $q_1 = p$.

Отметим, что (8) будет выполнено, если $\sigma \geq 1$, $r \geq 1$.

Замечание 2. Ограничение $\text{mes } D = 1$ не является, очевидно, существенным. Его выполнения всегда можно добиться, применяя преобразование подобия к области D . При этом в некоторых оценках может появиться множитель A , зависящий лишь от $\text{mes } D$ и показателей.

Замечание 3. Отметим предельный случай теоремы, когда $p = 1$, т. е. когда речь идет об операции, переводящей L_D в L_D^q . В этом случае условия теоремы упрощаются. Именно, чтобы операция U представляла линейную операцию из L_D в L_D^q , достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left[\int_{D'} |K(s, t)|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \quad (3')$$

для почти всех $t \in D$; при этом для нормы операции U имеет место оценка:

$$\|U\| \leq C_2.$$

Таким образом, условия 1) и 3) отбрасываются, а условие 2) должно выполняться для $\sigma = q$.

Доказательство теоремы в этом случае также упрощается, так как при установлении (6) будет отсутствовать последний множитель и достаточно будет использовать обычное неравенство Гёльдера. *)

Замечание 4. Отметим другой важный случай, когда $q = \infty$. В этом случае теорема формулируется так: интегральная операция (1) переводит L_D^p в $L_D^\infty = \tilde{M}_D$, если выполнено условие (2) при неко-

*) Как можно показать (см. Канторович, Вулих, Пинскер, стр. 307), если $q > 1$, то (1) дает при условии (3') общую форму линейной операции из L в L^q , причем

$$\|U\| = \text{vrai max}_t \left[\int_{D'} |K(s, t)|^q ds \right]^{\frac{1}{q}}.$$

тором $r \geq p'$. Норма операции U оценивается с помощью неравенства

$$\|U\| \leq C_1.$$

Доказательство в этом случае получается непосредственным применением неравенства Гёльдера к (1).

Замечание 5. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда в неравенстве (2) правая часть зависит от s , именно если неравенства (2) и (3) заменяются следующими:

$$\left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{\frac{1}{r'}} \leq C_1 \Psi(s), \quad (2a)$$

$$\left\{ \int_{D'} \left[|K(s, t)| (\Psi(s))^{\frac{q}{\sigma}-1} \right]^{\sigma} ds \right\}^{\frac{1}{\sigma}} \leq C_2. \quad (3a)$$

В частности, сохраняется и неравенство (5).

2.2. Переходим к описанию вполне непрерывных операций. Докажем сначала простую теорему.

Теорема 2 (2.X). *Интегральная операция (1) является линейной вполне непрерывной операцией из L_D^p в $L_{D'}^q$, если ее ядро суммируемо в области $D \times D'$ со степенью r' , где $r = \min(p, q')$, т. е. если*

$$\left[\int_{D'} \int_D |K(s, t)|^{r'} dt ds \right]^{\frac{1}{r'}} \leq C < \infty. \quad (9)$$

При этом

$$\|U\| \leq AC, \quad (10)$$

где можно принять

$$A = [\text{mes } D']^{\frac{1}{q} \left(\frac{r'}{q} \right)' }.$$

Доказательство. Прежде всего установим справедливость указанной оценки для нормы операции U . Пользуясь неравенством Гёльдера, имеем (см. (1) из II.5.1)

$$\begin{aligned} |y(s)| &\leq \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_D |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \|x\| \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{\frac{1}{r'}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|y\| = \left[\int_{D'} |y(s)|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \leq \|x\| \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right]^{\frac{q}{r'}} ds \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая, что $r \leq q'$ и, следовательно, $r' \geq q$, применим к внешнему интегралу неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r'}{q}$ и $\left(\frac{r'}{q}\right)'$; это даст

$$\|y\| \leq \|x\| \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt \right] ds \right\}^{\frac{1}{r'}} \left\{ \int_{D'} 1^{\left(\frac{r'}{q}\right)'} ds \right\}^{\frac{1}{q\left(\frac{r'}{q}\right)'}} \leq AC \|x\|,$$

откуда и следует (10).

Ядро K есть элемент пространства $L_{D' \times D}^{r'}$, поэтому найдется такая последовательность непрерывных ядер K_n , что

$$\left[\int_{D'} \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^{r'} dt ds \right]^{\frac{1}{r'}} \leq \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Обозначая через U_n интегральную операцию с ядром $K_n(s, t)$, получим, что U_n вполне непрерывна (см. IX.2.1) и, согласно (10) и (11),

$$\|U_n - U\| \leq A\varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

т. е. последовательность $\{U_n\}$ сходится к U . А тогда операция U вполне непрерывна (теорема 3(2. IX)).

З а м е ч а н и е. Если ядро $K(s, t)$ таково, что

$$B = \left\{ \int_{D'} \left[\int_D |K(s, t)|^{p'} dt \right]^{\frac{q}{p'}} ds \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad (12)$$

то операция U является вполне непрерывной операцией из L_D^p в $L_{D'}^q$, причем $\|U\| \leq B$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы.

Теорема 3(2. X). Пусть соблюдены условия 1) и 2) теоремы 1, а условие 3) выполнено в усиленной форме

$$q \geq p; \quad q > \sigma; \quad \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)p' < r. \quad (13)$$

Тогда интегральная операция (1) является вполне непрерывной операцией из L_D^p в $L_{D'}^q$.

Доказательство. Выберем число $\rho < r$ так, чтобы соблюдалось условие (4)

$$\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right)p' < \rho$$

и введем ядра $K_n(s, t)$, полагая

$$K_n(s, t) = \begin{cases} -n & (-n > K(s, t)) \\ K(s, t) & (-n \leq K(s, t) \leq n) \\ n & (K(s, t) > n). \end{cases}$$

Оценим величину

$$C_1^{(n)} = \text{vrai max}_{s \in D'} \left\{ \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \text{vrai max}_{s \in D'} \left\{ \int_{e_n(s)} |K(s, t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где через $e_n(s)$ обозначена совокупность тех точек из D , для которых $|K(s, t)| > n$. Если $t \in e_n(s)$, то, так как $|K(s, t)| > n$,

$$|K(s, t)|^p \leq \frac{1}{n^{r-p}} |K(s, t)|^r,$$

а потому

$$C_1^{(n)} \leq \text{vrai max}_{s \in D'} \left\{ \int_{e_n(s)} \frac{1}{n^{r-p}} |K(s, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{p}} \leq n^{1 - \frac{r}{p}} C_1^{\frac{r}{p}}.$$

Обозначая через U_n , как и раньше, операцию с ядром $K_n(s, t)$ и применяя для операции $U - U_n$ оценку (5) теоремы 1 (с заменой C_1 на $C_1^{(n)} \leq n^{1 - \frac{r}{p}} C_1^{\frac{r}{p}}$), получим

$$\|U - U_n\| \leq \left(n^{1 - \frac{r}{p}} C_1^{\frac{r}{p}} \right)^{1 - \frac{\sigma}{q}} C_2^{\frac{\sigma}{q}},$$

откуда вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - U_n\| = 0$.

Поскольку ядро операции U_n ограничено, то оно суммируемо с любой степенью; следовательно, по теореме 2 операция U_n вполне непрерывна. А тогда и операция U , являясь пределом последовательности вполне непрерывных операций, вполне непрерывна (теорема 3 (2. IX)).

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы остается в силе, если даже в третьем из условий (13) имеет место знак равенства, но существует такая возрастающая функция $\Phi(\lambda)$ ($\lambda \geq 0$), что отношение $\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$, возрастая, стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$, причем неравенство (2) выполнено в усиленной форме

$$\left\{ \int_D [\Phi(|K(s, t)|)]^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leq C_1.$$

2.3. Введем в рассмотрение пространство $\text{Lip } \beta$ всех функций, определенных в области D' и удовлетворяющих там условию Липшица с показателем β ; $y \in \text{Lip } \beta$ означает, таким образом, что существует постоянная B такая, что

$$|y(s + \Delta s) - y(s)| \leq B |\Delta s|^\beta \quad (\text{отрезок } [s, s + \Delta s] \text{ входит в } D'),$$

где под $|\Delta s|$ понимается длина вектора Δs в n -мерном пространстве. Норма в $\text{Lip } \beta$ определяется посредством соотношения

$$\|y\| = \sup_{[s, s+\Delta s] \subset D'} \frac{|y(s+\Delta s) - y(s)|}{|\Delta s|^\beta} + \max_{s \in D'} |y(s)| = C_\beta(y) + \|y\|_C.$$

Предоставляем читателю проверить, что при этом $\text{Lip } \beta$ обращается в B -пространство.

Рассмотрим более подробно случай интегральной операции (1), когда множества D и D' лежат в одном и том же пространстве, а все особенности ядра $K(s, t)$ сосредоточены на «диагонали» множества $D' \times D$, т. е. при $s = t$. Для $s \neq t$ будем предполагать ядро дифференцируемым по координатам точки s . Через $|s - t|$ будем обозначать в дальнейшем расстояние между точками s и t , иначе говоря, длину вектора $s - t$.

Для указанного случая имеет место

Теорема 4 (2. X). Пусть ядро $K(s, t)$ таково, что

$$1) \quad \left\{ \int_D [|\text{grad}_s K(s, t)| \cdot |s - t|^{1-\beta}]^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leq E, \quad (14)$$

где через grad_s обозначен градиент, вычисленный по переменной s ;

$$2) \quad \left\{ \int_D \left[\frac{|K(s, t)|}{|s - t|^\beta} \right]^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leq F. \quad (15)$$

Тогда интегральная операция (1) отображает пространство $L_D^{r'}$ (и любое L_D^p при $p \geq r'$) в пространство $\text{Lip } \beta$, причем

$$C_\beta(y) \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \|x\|. \quad (16)$$

Доказательство. Возьмем произвольный отрезок $[s, s + \Delta s]$, целиком лежащий внутри D' . Для приращения функции $y = U(x)$ вдоль этого отрезка имеем

$$\begin{aligned} |y(s + \Delta s) - y(s)| &= \left| \int_D [K(s + \Delta s, t) - K(s, t)] x(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left[\int_D |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \|x\|_{L^{r'}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для оценки первого множителя разобьем область интегрирования на две части: D_1 — пересечение D со сферой $|t - s| \leq 2|\Delta s|$ и $D_2 = D \setminus D_1$. Для интеграла от $|K(s, t)|^r$ по D_1 имеем

$$\left[\int_{D_1} |K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\int_{D_1} \left(\frac{|K(s, t)|}{|s - t|^\beta} \right)^r |s - t|^{\beta r} dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq (2|\Delta s|)^\beta F.$$

Аналогичная оценка верна и для интеграла от $|K(s + \Delta s, t)|^r$ с заменой множителя 2^β на 3^β , поскольку

$$|s + \Delta s - t| \leq |s - t| + |\Delta s| \leq 3|\Delta s|.$$

Учитывая это, находим

$$I_1 = \left[\int_{D_1} |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_{D_1} |K(s + \Delta s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} + \\ + \left[\int_{D_1} |K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq (2^\beta + 3^\beta) F |\Delta s|^\beta. \quad (18)$$

Далее

$$I_2 = \left[\int_{D_2} |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} |\operatorname{grad}_s K(\lambda, t)| d\lambda \right]^r dt \right\}^{\frac{1}{r} *}.$$

При этом, так как $t \in D_2$, то $|\lambda - t| \geq |s - t| - |\lambda - s| \geq |s - t| - |\Delta s| \geq \frac{1}{2} |s - t|$ и, следовательно,

$$I_2 \leq 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} |\operatorname{grad}_s K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta} d\lambda \right]^r \frac{dt}{|s - t|^{r(1-\beta)}} \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \\ \leq 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} (|\operatorname{grad}_s K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta})^r d\lambda \right] \times \right. \\ \times \left. \left[\int_s^{s+\Delta s} 1 \cdot d\lambda \right]^{\frac{r}{r'}} \frac{dt}{|s - t|^{r(1-\beta)}} \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \\ \leq \frac{2^{1-\beta} |\Delta s|^{\frac{1}{r'}}}{(2 |\Delta s|)^{1-\beta}} \left\{ \int_s^{s+\Delta s} d\lambda \int_{D_2} [|\operatorname{grad}_s K(\lambda, t)| |\lambda - t|^{1-\beta}]^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \\ \leq |\Delta s|^{\frac{1}{r'} + \beta - 1 + \frac{1}{r}} \cdot E = |\Delta s|^\beta E. \quad (19)$$

Сопоставляя (18) и (19), получим

$$\left[\int_D |K(s + \Delta s, t) - K(s, t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq I_1 + I_2 \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] |\Delta s|^\beta,$$

а тогда по (17)

$$\frac{|y(s + \Delta s) - y(s)|}{|\Delta s|^\beta} \leq [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \|x\|,$$

что и приводит к (16).

*) Выражение $\int_s^{s+\Delta s} \varphi(\lambda) d\lambda$ следует понимать как интеграл по отрезку $[s, s + \Delta s]$.

Оценка максимума модуля $u(s)$ может быть получена на основании того, что в силу условия (15) U есть линейная операция из L_D^r в L_D^∞ (см. замечание 4 к теореме 1), а потому

$$\max |u(s)| \leq A \|x\|.$$

Вместе с (16) это неравенство и устанавливает линейность операции U .

Замечание 1. Так как функции, имеющие ограниченную норму в Lip^β , равномерно непрерывны и равномерно ограничены, то из доказанной теоремы следует, что если ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условиям (14) и (15) для некоторого $\beta > 0$, то операция (1), рассматриваемая как операция из L_D^r в C_D , вполне непрерывна.

Замечание 2. Утверждение теоремы сохраняет силу и для случая, когда $p = \infty$. Именно, если условия (14) и (15) выполнены для $r = 1$ и некоторого $\beta > 0$, то операция U — линейная операция из L_D^∞ в Lip^β , причем

$$C_\beta(y) \leq [E + (2^\beta + 3^\beta)F] \|x\|.$$

Как и выше, рассматривая U как операцию из L_D^∞ в C_D , получим, что она вполне непрерывна.

2.4. Рассмотрим теперь случай, когда ядро операции U зависит от параметра.

Будем говорить, что функция $K_\tau(s, t)$ при $\tau = \tau_0$ *почти равномерно непрерывна* по параметру τ относительно s и t , если, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $h > 0$ и s , найдутся $\delta > 0$ и множество $e(s)$ такие, что $|K_\tau(s, t) - K_{\tau_0}(s, t)| < \varepsilon$ как только $|\tau - \tau_0| < \delta$, $t \notin e(s)$, причем $\text{mes } e(s) < h$. *)

Понятие почти равномерной непрерывности используется в следующей теореме.

Теорема 5(2.X). Пусть ядро интегральной операции почти равномерно непрерывно относительно τ при $\tau = \tau_0$ и для каждого τ удовлетворяет условиям теоремы 3, причем все входящие в формулировку этой теоремы постоянные (C_1 , C_2 , σ и т. д.) не зависят от τ . Тогда интегральная операция U_τ

$$y_\tau = U_\tau(x), \quad y_\tau(s) = \int_D K_\tau(s, t) x(t) dt \quad (x \in L_D^p, y_\tau \in L_D^q) \quad (20)$$

непрерывно зависит от параметра в том смысле, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|U_\tau - U_{\tau_0}\| = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$y_{\tau_0}(s) - y_\tau(s) = \int_D [K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)] x(t) dt.$$

*) Значения параметра τ — точки евклидова пространства. Однако можно подразумевать под τ и элементы произвольного метрического пространства.

Используя обозначения доказательства теоремы 3, оценим постоянную

$$C_1^{(p)} = \text{vrai max}_{s \in D'} \left[\int_D |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Считая $\varepsilon > 0$, $h > 0$ и s заданными, найдем согласно определению почти равномерной непрерывности соответствующие им $\delta > 0$ и $e(s) \subset D$. Тогда, предполагая для простоты $p \geq 1$, *)

$$\begin{aligned} & \left[\int_D |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left[\int_{D' \setminus e(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{e(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{e(s)} |K_{\tau_0}(s, t) - K_{\tau}(s, t)|^p \cdot \frac{r}{p} dt \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{e(s)} dt \right]^{\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \\ & \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{\frac{1}{p}} + 2C_1 h^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_1^{(p)} \leq \varepsilon [\text{mes } D]^{\frac{1}{p}} + 2C_1 h^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$, т. е. величина $C_1^{(p)}$ для операции $U_{\tau_0} - U_{\tau}$ может быть сделана сколь угодно малой. Поскольку, согласно теореме 1 (см. (5)),

$$\|U_{\tau_0} - U_{\tau}\| \leq [C_1^{(p)}]^{1 - \frac{\sigma}{q}} [2C_2]^{\frac{\sigma}{q}},$$

то $\|U_{\tau_0} - U_{\tau}\|$ также сколь угодно мала, что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание. Теорема непосредственно применима к случаю, когда $q = \infty$ (ср. замечание 4 к теореме 1). Точнее говоря, если $r > p'$ и выполнено (2) (при каждом τ), а ядро $K_{\tau}(s, t)$ почти равномерно непрерывно по параметру при $\tau = \tau_0$, то имеет место непрерывная зависимость операции (20) от параметра τ . Здесь это обстоятельство означает, очевидно, что по $\eta > 0$ можно подобрать $\lambda > 0$ так, что

$$|y_{\tau_0}(s) - y_{\tau}(s)| < \eta \quad (|\tau_0 - \tau| < \lambda; \quad s \in D').$$

2.5. В заключение рассмотрим случай ядра специального типа. Именно считая, что множества D и D' лежат в одном и том же пространстве, будем рассматривать ядра вида

$$K(s, t) = \frac{B(s, t)}{|s - t|^m}, \quad (21)$$

*) Если $p < 1$, надо воспользоваться неравенством

$$(a + b)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p} - 1} \left[a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}} \right] \quad (a, b \geq 0).$$

где $B(s, t)$ — ограниченная функция, непрерывная при $s \neq t$. Ядра указанного вида называются *ядрами типа потенциала*.

Чтобы такое ядро суммируемо по t со степенью r , точнее говоря, чтобы было выполнено (2), достаточно потребовать, чтобы $mr < \mu$; условие (3) будет выполнено, если $m\sigma < \nu$. Таким образом, в качестве r и σ можно взять числа, сколь угодно близкие к $\frac{\mu}{m}$ и $\frac{\nu}{m}$ соответственно. Условия (4) запишутся при этом в виде

$$q \geq p, \quad q > \frac{\nu}{m}, \quad \left(1 - \frac{\nu}{mq}\right)p' < \frac{\mu}{m}.$$

Принимая во внимание замечание 1 к теореме 1, можно, таким образом, сказать, что условия

$$q < \frac{\nu p}{\mu - (\mu - m)p}, \quad \nu > \mu - (\mu - m)p \quad (22)$$

гарантируют линейность операции (1) с ядром вида (21), рассматриваемой как операция из L_D^p в L_D^q . Поскольку при этом выполнены и условия теоремы 3 (с учетом аналогичного замечания), то из (22) вытекает и полная непрерывность операции U . *) В частности, когда $m = \mu - 1$, условия (22) принимают вид

$$q < \frac{\nu p}{\mu - p}, \quad \nu > \mu - p. \quad (23)$$

Теорема 4 применима к рассматриваемому случаю при следующих условиях. Так как, очевидно,

$$|\operatorname{grad}_s K(s, t)| \leq \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|}{|s - t|^m} + m \frac{|B(s, t)|}{|s - t|^{m+1}},$$

то выполнение условий (14) и (15) обеспечивается, если

$$\sup_{s \in D'} \left[\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|^r}{|s - t|^{(m+\beta-1)r}} dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq E', \quad (24)$$

$$(m + \beta)r < \mu. \quad (25)$$

При этих условиях операция (1) является линейной операцией из пространства L_D^p в пространство $\operatorname{Lip} \beta$.

Если рассматривать ядро $K(s + \Delta s, t)$ как функцию параметра Δs , то, поскольку по выключении некоторой сколь угодно малой окрест-

*) Действительно, первое из соотношений (22) равносильно неравенству $\left(1 - \frac{\nu}{mq}\right)p' < \frac{\mu}{m}$. Если при этом $q < p$, то второе из условий (22) обеспечивает выполнение неравенства (8).

ности точки s ядро $K(s + \Delta s, t)$ становится равномерно непрерывным по параметру Δs при $\Delta s \rightarrow 0$, на основании теоремы 5 заключаем,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \|U_{\Delta s} - U\| = 0,$$

где $U_{\Delta s}$ — интегральная операция с ядром $K(s + \Delta s, t)$. В частности,

$$\int_{D'} |y(s + \Delta s) - y(s)|^q ds \rightarrow 0 \text{ при } \Delta s \rightarrow 0. *)$$

Аналогичным образом, пусть D' есть ν -мерное многообразие, непрерывно и гладко зависящее от параметра τ , $D' = D'_\tau$, т. е. многообразие, образованное точками $s + \varphi(s, \tau)$, где s пробегает область D'_0 , а $\varphi(s, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно s , и, кроме того, $|\varphi(s, \tau) - \varphi(s', \tau)| \leq \alpha |s - s'|$ ($\alpha < 1$). Тогда функция y , рассматриваемая на многообразии D'_τ ,

$$y_\tau(s) = y(s + \varphi(s, \tau)) = \int_D K(s + \varphi(s, \tau), t) x(t) dt,$$

непрерывна по τ в метрике пространства $L^q_{D'_0}$, т. е.

$$\|y_0 - y_\tau\| = \left\{ \int_{D'_0} |y_0(s) - y_\tau(s)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

Резюмируя сказанное, можно сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 6 (2.X). Если выполнены условия (22), то интегральная операция с ядром типа (21) является линейной вполне непрерывной операцией, отображающей пространство L^p_D в $L^q_{D'}$, где D — μ -мерная область евклидова пространства, D' — ν -мерное многообразие в нем. При этом, если это многообразие непрерывно зависит от параметра, то и $y = U(x)$ будет непрерывно по параметру. В частности,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\int_{D'} |y(s + \Delta s) - y(s)|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} = 0. \quad (26)$$

Замечание. Теорема справедлива и при $q = \infty$. Условия (22) при этом заменяются следующими (см. замечание 4 к теореме 1):

$$(\mu - m)p > \mu. \quad (27)$$

*) Здесь и ниже под y понимается результат применения операции U к некоторому $x \in L^p_D$: $y = U(x)$.

Соотношение (26) запишется в рассматриваемом случае в виде

$$\sup_s |y(s + \Delta s) - y(s)| \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0,$$

что означает непрерывность функции y , т. е. фактически операция U переводит в этом случае L_D^p в C_D .

Условие (27) можно переписать так: $mp' < \mu$. А тогда, применяя замечание к теореме 2, получаем, что U будет вполне непрерывной операцией из L_D^p в L_D^∞ (и следовательно, как было показано, в C_D).

Таким образом, справедлива

Теорема 7 (2.X). *Если выполнено условие (27), то интегральная операция с ядром типа потенциала является линейной вполне непрерывной операцией, преобразующей пространство C_D^p в пространство C_D .*

§ 3. Теоремы вложения Соболева

В различных вопросах математической физики и других областей анализа большую роль играют взаимоотношения между дифференциальными свойствами функций. Так, в известных случаях, зная интегральные оценки частных производных, можно сделать заключение об ограниченности или даже непрерывности самой функции. В ряде случаев по поведению функции во всем пространстве можно судить о ее дифференциальных свойствах на некоторой поверхности и т. д.

В главе VI мы использовали уже идею, что одна и та же функция может быть рассматриваема как элемент различных функциональных пространств. Здесь эта идея будет развита дальше и более систематическим образом. Пространства, изучаемые в этом параграфе, характеризуются теми или иными дифференциальными свойствами входящих в них функций, так что если одно такое пространство есть часть другого (в теоретико-множественном смысле), то группа свойств, характеризующих первое пространство влечет за собой свойства, характерные для элементов второго пространства. Далее, сопоставляя в этом случае функцию, рассматриваемую как элемент первого пространства, ей же самой, но рассматриваемой как элемент второго пространства, мы получаем *операцию вложения*, изучение которой дает возможность не только уточнить установленные уже качественные связи между различными свойствами функций, но и охарактеризовать эти связи количественно.

Результаты этого параграфа принадлежат в основном С. А. Соболеву (см. Соболев, [101a, б]).

3.1. Докажем сначала лемму об интегральном представлении дифференцируемой функции (обозначения, используемые здесь и ниже, совпадают с обозначениями предыдущего параграфа).

Лемма 1. Пусть $x(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в выпуклой области $D \subset R^{\mu}$. Справедливо тождество

$$x(s) = \frac{1}{\text{mes } D} \int_D x(t) dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} dt, \quad (1)$$

где $B_k(s, t)$ ($k = 1, 2, \dots, \mu$) — ограниченные функции

$$|B_k(s, t)| \leq \frac{\delta^{\mu}}{\mu \text{mes } D} \quad (k = 1, 2, \dots, \mu), \quad (2)$$

непрерывные при $s \neq t$. Здесь $t_1, t_2, \dots, t_{\mu}$ означают координаты точки t , а через δ обозначен диаметр области D .

Доказательство. Пусть s — фиксированная точка области D . Каждая точка $t \in D$ определяется заданием расстояния $R = |s - t|$ и единичным вектором $\bar{l}$, направленным от s к t . Имеем, очевидно,

$$x(s) = x(t) - \int_0^R \frac{\partial x}{\partial l} dl.$$

Умножая это равенство на $R^{\mu-1} dR$ и интегрируя по R вдоль луча, идущего из точки s по направлению $\bar{l}$ в пределах от 0 до $d = d(\bar{l})$, где $d(\bar{l})$ — длина отрезка указанного луча в пределах области D , получим

$$\begin{aligned} x(s) \int_0^d R^{\mu-1} dR &= \int_0^d x(t) R^{\mu-1} dR - \int_0^d R^{\mu-1} dR \int_0^R \frac{\partial x}{\partial l} dl = \\ &= \int_0^d x(t) R^{\mu-1} dR - \int_0^d \frac{\partial x}{\partial l} \left(\int_l^d R^{\mu-1} dR \right) dl = \\ &= \int_0^d x(t) R^{\mu-1} dR - \int_0^d \frac{d^{\mu} - l^{\mu}}{\mu} \frac{\partial x}{\partial l} \frac{1}{l^{\mu-1}} l^{\mu-1} dl. \end{aligned} \quad (3)$$

Заменим в последнем интеграле обозначение переменной интегрирования l на R и, умножив обе части равенства на элемент телесного угла — элемент поверхности единичной сферы в μ -мерном пространстве, — проинтегрируем по этой поверхности, воспользовавшись формулой

$$\int_D z(t) dt = \int_{\omega} d\omega \int_0^{d(\bar{l})} z(t) R^{\mu-1} dR,$$

где через ω обозначена поверхность единичной сферы с центром в точке s .

После интегрирования получим

$$x(s) \operatorname{mes} D = \int_D x(t) dt - \int_D \frac{[d(\bar{l})]^\mu - R^\mu}{\mu} \frac{\partial x}{\partial l} \cdot \frac{dt}{R^{\mu-1}}. \quad (4)$$

Так как $\frac{\partial x}{\partial l} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x}{\partial t_k} \cos(\bar{l}, t_k)$, то, деля обе части равенства на $\operatorname{mes} D$ и обозначая

$$B_k(s, t) = B(s, t) \cos(\bar{l}, t_k) \quad \left(B(s, t) = \frac{d^\mu - R^\mu}{\mu \operatorname{mes} D}; \quad k = 1, 2, \dots, \mu \right),$$

получим соотношение (1). Оценка (2) и непрерывность функций $B_k(s, t)$ также получаются отсюда.

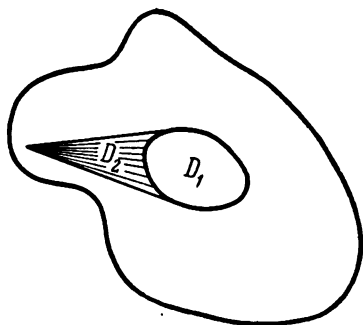


Рис. 5

Замечание 1. Результат леммы верен и в более общей форме. Именно, область D может и не быть выпуклой; достаточно, что D содержала выпуклую подобласть D_1 такую, что D принадлежит конусу D_2 , образованный отрезками лучей, исходящими из произвольной точки s области D и пересекающими область D_1 , от точки s , до ближайшей точки пересечения (рис. 5). *) При этом формула (1) заменится одной из формул

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{mes} D_1} \int_{D_1} x(t) dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_{D_1 \cup D_2} \frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} dt, \quad (5)$$

или

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{mes} D_1} \int_{D_1} x(t) dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} dt. \quad (5')$$

Доказательства получаются рассуждениями, аналогичными приведенным выше.

Замечание 2. Выпуклость области D в условиях леммы используется лишь для того, чтобы можно было гарантировать, что луч, исходящий из любой внутренней точки области D , пересекает границу области только в одной точке. Поэтому, если не предполагать область выпуклой, представление (1) имеет место для всех таких $s \in D$, относительно которых область D звездная. В частности, для всех $s \in D_1$, где D_1 — область из замечания 1.

*) Область D указанного вида называется *звездной* относительно области D_1 .

Лемма 2. Функции $B_k(s, t)$ таковы, что интеграл

$$\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B_k(s, t)|^r}{|s - t|^{(\mu-2+\beta)r}} dt \quad (6)$$

ограничен независимо от s , если только $r < \frac{\mu}{\mu-1}$, а $\beta > 0$ настолько мало, что $(\mu-1+\beta)r < \mu$ (при этом предполагается, что поверхность S , ограничивающая область D , достаточно гладкая).

Доказательство. Так как

$$B_k(s, t) = B(s, t) \cos(\vec{l}, t_k),$$

то

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad}_s B_k(s, t)| &\leq |\operatorname{grad}_s B(s, t)| |\cos(\vec{l}, t_k)| + \\ &+ |B(s, t)| |\operatorname{grad}_s \cos(\vec{l}, t_k)| \leq \\ &\leq |\operatorname{grad}_s B(s, t)| + \frac{K}{R} \quad (R = |s - t|), \end{aligned}$$

где K — некоторая постоянная.

Справедливость утверждения леммы для слагаемого $\frac{K}{R}$ вытекает из условия $(\mu-1+\beta)r < \mu$.

Проверим утверждение леммы для первого слагаемого. Поскольку $B(s, t) = \frac{1}{\mu \operatorname{mes} D} (d^\mu - R^\mu)$

и для R^μ лемма, очевидно, верна, остается доказать ее лишь для функции d^μ . Обозначим через u точку пересечения луча, определяемого вектором $\vec{l}$, с границей области D , а через $\vec{n}$ — нормаль к граничной поверхности в точке u , наконец, через φ — угол между $\vec{l}$ и $\vec{n}$. Нетрудно видеть, что вектор $\operatorname{grad}_s d$ лежит в плоскости векторов $\vec{l}$ и $\vec{n}$. Ясно также, что величина производной d как функции s по направлению $\vec{l}$ равна единице, а по перпендикулярному (в плоскости $(\vec{l}, \vec{n})$) направлению $\frac{d-R}{R} \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 6), следовательно,

$$|\operatorname{grad}_s d| = \sqrt{1 + \left(\frac{d-R}{R} \operatorname{tg} \varphi\right)^2} \leq 1 + \frac{d}{R} |\operatorname{tg} \varphi|,$$

откуда

$$|\operatorname{grad}_s d^\mu| \leq \mu d^{\mu-1} \left(1 + \frac{d}{R} |\operatorname{tg} \varphi|\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{|\operatorname{grad}_s d^\mu|^r}{R^{(\mu-2+\beta)r}} &\leq \frac{\mu^r d^{(\mu-1)r} \left(1 + \frac{d}{R} |\operatorname{tg} \varphi|\right)^r}{R^{(\mu-2+\beta)r}} \leq \frac{(2\mu)^r d^{(\mu-1)r} \left(1 + \left(\frac{d}{R}\right)^r |\operatorname{tg} \varphi|^r\right)}{R^{(\mu-2+\beta)r}} = \\ &= (2\mu)^r \frac{d^{(\mu-1)r}}{R^{(\mu-2+\beta)r}} + (2\mu)^r \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}} |\operatorname{tg} \varphi|^r. \end{aligned}$$

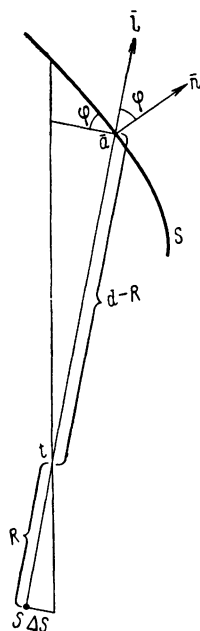


Рис. 6

Ограниченность интеграла от первого слагаемого очевидна. Для оценки интеграла от второго слагаемого отметим, что

$$dt = \frac{R^{\mu-1}}{d^{\mu-1}} \cos \varphi \, dS \, dR,$$

где dS — элемент поверхности S , ограничивающей область D . Отметим также, что в силу условий леммы

$$\mu r - (\mu - 1 + \beta) r + 1 > \mu r - \mu + 1 > 0.$$

Учитывая сказанное, получим

$$\begin{aligned} \int_D \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}} |\operatorname{tg} \varphi|^r dt &= \int_S |\operatorname{tg} \varphi|^r \cos \varphi \left(\int_0^d \frac{d^{\mu r - (\mu-1)} R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1+\beta)r}} dR \right) dS \leq \\ &\leq \frac{\delta^{\mu r - (\mu-1+\beta)r+1}}{\mu - (\mu-1+\beta)r} \int_S \frac{|\sin \varphi|^r}{|\cos \varphi|^{r-1}} dS. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $r < \frac{\mu}{\mu-1} \leq 2$, то, предполагая, что поверхность S имеет конечный радиус кривизны, будем иметь

$$\int_S \frac{|\sin \varphi|^r}{|\cos \varphi|^{r-1}} dS \leq \int_S \frac{dS}{|\cos \varphi|^{r-1}} \leq K_1,$$

что вместе с предыдущим приводит к нужному результату.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из сказанного в X. 2.5 следует, что при выполнении условий леммы ядро $\frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{\mu-1}}$ удовлетворяет требованиям теоремы 4 (2. X).

3.2. Опираясь на полученные в предыдущем параграфе теоремы об интегральных операциях, можно доказать следующую основную теорему.

Теорема 1 (3. X). (Неравенство Соболева). Пусть $x(s)$ — непрерывно дифференцируемая в выпуклой области D функция, и

$$q < \frac{\mu p}{\mu - p}. \quad (7)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|x - m(x)\|_{L^q_D} &= \left\{ \int_D |x(t) - m(x)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq A \| |\operatorname{grad} x| \|_{L^p_D} = \\ &= A \left\{ \int_D \left[\sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$m(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} D} \int_D x(s) ds \quad (9)$$

среднее значение функции x в области D , а A — некоторая постоянная.

Доказательство. На основании леммы 1 (учитывая выражение для $B_k(s, t)$) имеем

$$|x(s) - m(x)| \leq \sum_{k=1}^{\mu} \left| \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} dt \right| \leq \int_D \frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{\mu-1}} |\operatorname{grad} x| dt.$$

Но при условии (7) интегральная операция U с ядром $\frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{\mu-1}}$ будет линейной операцией из L_D^p в L_D^q (см. X.2.5, условие (23)). Поэтому

$$\|x - m(x)\|_{L_D^q} \leq \|U\| \|\operatorname{grad} x\|_{L_D^p}$$

и (8) установлено, если в качестве A взять норму указанной интегральной операции U .

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (8) иногда удобнее использовать в другой, эквивалентной, форме

$$\|x\|_{L^q} \leq M [\|\operatorname{grad} x\|_{L^p} + |m(x)|]. \quad (10)$$

З а м е ч а н и е 2. Если $p=2$, а $\mu \geq 2$, то неравенство (7) будет соблюдено при $q=2$. Неравенство (10) запишется в этом случае в виде

$$\left[\int_D |x(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq M \left\{ \left| \int_D x(t) dt \right| + \left[\int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (11)$$

или иначе

$$\int_D |x(s)|^2 ds \leq M_1 \left\{ \left| \int_D x(t) dt \right|^2 + \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right\}. \quad (12)$$

Это известное неравенство Пуанкаре.

З а м е ч а н и е 3. В приложениях может играть роль величина постоянной A в (8). Норму интегральной операции U с ядром $\frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{\mu-1}}$ можно оценить, пользуясь теоремой 1 (2. X). Беря $\sigma = r$ и определяя минимально возможное r из неравенства $\left(1 - \frac{r}{q}\right) p' \leq r$,

найдем, что в качестве A можно взять величину

$$A = C_1 = C_2 \leq \max |B(s, t)| \max_s \left[\int_D \frac{dt}{|s-t|^{(\mu-1)r}} \right]^{\frac{1}{r}} \leq \\ \leq \frac{\delta^\mu}{\mu \text{ mes } D} \left\{ \int_\omega d\omega \int_0^\delta \frac{R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1)r}} dR \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \frac{\delta^{1+\frac{\mu}{r}}}{\mu \text{ mes } D} \left\{ \frac{\mu \pi^{\frac{\mu}{2}}}{(\mu - (\mu-1)r) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + 1\right)} \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Замечание 4. Условие выпуклости области D существенно в приведенном доказательстве неравенства Соболева. Однако оно может быть доказано и для областей значительно более общего вида. Прежде всего, если некоторая область допускает однозначное и непрерывно-дифференцируемое преобразование в другую, с якобианом, равным единице, для которой неравенство имеет место, то оно будет выполнено и для данной области. Кроме того, возможность распространения неравенства Соболева на области более общего вида получается на основании следующего предложения:

Теорема 2 (3.X). Если область D есть объединение двух областей D_1 и D_2 , имеющих пересечение положительной меры и для каждой из которых имеет место неравенство (8), то оно выполнено и для всей области D .

Доказательство. Пусть $D = D_1 \cup D_2$. Положим

$$D_3 = D_1 \cap D_2, \quad D_4 = D_2 \setminus D_3.$$

Обозначим через $m(x)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$, $m_4(x)$ средние значения x по каждой из областей D , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 . Согласно (8) применительно к областям D_1 и D_2 , имеем

$$\|x - m_1(x)\|_{L_{D_1}^q} \leq B_1 J, \quad \|x - m_2(x)\|_{L_{D_2}^q} \leq B_2 J, \quad (13)$$

где через J обозначена $\|\|\text{grad } x\|\|_{L_D^p}$, а B_1 и B_2 — некоторые постоянные.

Далее,

$$|m_1(x) - m_2(x)| \leq \frac{1}{(\text{mes } D_3)^{\frac{1}{q}}} \left[\|x - m_1(x)\|_{L_{D_3}^q} + \|x - m_2(x)\|_{L_{D_3}^q} \right] \leq \\ \leq \frac{1}{(\text{mes } D_3)^{\frac{1}{q}}} \left[\|x - m_1(x)\|_{L_{D_1}^q} + \|x - m_2(x)\|_{L_{D_2}^q} \right] \leq B_3 J.$$

$$|m_4(x) - m_2(x)| = \frac{1}{\text{mes } D_4} \left| \int_{D_4} [x(s) - m_2(x)] dx \right| \leq \\ \leq \frac{A}{\text{mes } D_4} \|x - m_2(x)\|_{L_{D_2}^q} \leq B_4 J.$$

Но по смыслу средних значений

$$\min [m_1(x), m_4(x)] \leq m(x) \leq \max [m_1(x), m_4(x)].$$

Поэтому

$$m(x) - m_1(x) \leq |m_4(x) - m_1(x)| \leq |m_4(x) - m_2(x)| + \\ + |m_2(x) - m_1(x)| \leq B_5 J,$$

откуда и

$$|m(x) - m_2(x)| \leq |m(x) - m_1(x)| + |m_2(x) - m_1(x)| \leq B_6 J.$$

Наконец,

$$\|x - m(x)\|_{L_D^q} \leq \|x - m(x)\|_{L_{D_1}^q} + \|x - m(x)\|_{L_{D_2}^q} \leq \\ \leq \|x - m_1(x)\|_{L_{D_1}^q} + \|x - m_2(x)\|_{L_{D_2}^q} + |m(x) - m_1(x)| (\text{mes } D_1)^{\frac{1}{q}} + \\ + |m(x) - m_2(x)| (\text{mes } D_2)^{\frac{1}{q}} \leq B_7 J,$$

что и устанавливает справедливость неравенства типа (8) для области D .

Другое расширение класса областей, для которых справедливо неравенство Соболева, можно получить, используя замечания к лемме 1. Именно, пусть область D звездна по отношению к некоторой выпуклой области $D_1 \subset D$; обозначим через $m_1(x)$ среднее значение функции x по области D_1 . Применив представление (5'), получим соотношение

$$\|x - m_1(x)\|_{L_D^q} \leq A_1 J \quad (J = \|\|\text{grad } x\|\|_{L_D^p}).$$

Но согласно замечанию 2 к лемме 1 представление (1) имеет место для всех $s \in D_1$, т. е.

$$x(s) = m(x) + \sum_{k=1}^n \int \frac{B_k(s, t)}{|s - t|^{n-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} dt \quad (s \in D_1).$$

Так как правая часть последней формулы задает, очевидно, линейную операцию из L_D^p в $L_{D_1}^q$, то

$$\|x - m(x)\|_{L_{D_1}^q} \leq A_2 J.$$

Отсюда

$$|m_1(x) - m(x)| = \left| \frac{1}{\text{mes } D_1} \int_{D_1} [x(s) - m(x)] ds \right| \leq \\ \leq \frac{1}{\text{mes } D_1} \|x - m(x)\|_{L_{D_1}^q} \leq \frac{1}{\text{mes } D_1} A_2 J.$$

Сопоставляя это неравенство с полученным ранее, находим окончательно

$$\|x - m(x)\| \leq A_3 J,$$

что и требовалось доказать.

3.3. Введем теперь в рассмотрение некоторые функциональные пространства, элементами которых являются всевозможные непрерывно-дифференцируемые в области D функции. Таким образом, различные пространства отличаются лишь нормой, которую мы в них вводим.

Прежде всего рассмотрим пространство $\tilde{W}_p^{(1)} = \tilde{W}_p^{(1)}(D)$. Полагаем

$$\|x\| = \frac{1}{\text{mes } D} \left| \int_D x(s) ds \right| + \left[\int_D |\text{grad } x|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \\ = |m(x)| + \|\text{grad } x\|_{L_p^D}. \quad (14)$$

Легко видеть, что так введенная норма удовлетворяет всем аксиомам нормированного пространства (при естественной линеаризации).

Если рассматривать элемент $x \in \tilde{W}_p^{(1)}$ как функцию из L_p^D , то неравенство Соболева (в форме (10)) можно записать в такой форме:

$$\|x\|_{L_p^D} \leq M \|x\|_{\tilde{W}_p^{(1)}}. \quad (15)$$

Таким образом, операция вложения, т. е. операция, сопоставляющая элементу $x \in \tilde{W}_p^{(1)}$ ту же функцию, но рассматриваемую как элемент из L_p^D , является линейной операцией. Покажем, что операция вложения вполне непрерывна.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена в пространстве $\tilde{W}_p^{(1)}$. По лемме 1 имеем

$$x_n(s) = m(x_n) + \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x_n}{\partial t_k} dt.$$

Но при условии (7) операция с ядром $\frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}}$ вполне непрерывна (теорема 6 (2. X)). Так как последовательность $\left\{ \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \right\} (k=1, 2, \dots, \mu)$ ограничена в пространстве L_p^D , то можно выбрать последовательность индексов $\{n_i\}$ так, что последовательность $\{y_{n_i}^{(k)}\}$

$$y_{n_i}^{(k)}(s) = \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x_{n_i}}{\partial t_k} dt \quad (k=1, 2, \dots, \mu; i=1, 2, \dots)$$

сходится в L_p^D . Можно также считать, что сходится и числовая последовательность $\{m(x_{n_i})\}$. В таком случае последовательность $\{x_{n_i}\}$

сходится в L^q_D и полная непрерывность операции вложения установлена. Таким образом, справедлива

Теорема 3 (3. X). (Соболев — Кондрашев). *) При условии (7) операция вложения, относящая функции из $\tilde{W}_p^{(1)}$ ее же, рассматриваемую как элемент из L^q_D , линейна и вполне непрерывна.

Класс областей D , для которых справедлива теорема 3, совпадает с классом областей, для которых верно неравенство Соболева. В частности, для областей, звездных относительно некоторой выпуклой подобласти, или конечного объединения областей указанного типа (теорема 2).

Аналогично теореме 3, снова используя теорему 6 (2. X), можно установить и более общий результат.

Теорема 4 (3. X). Операция вложения, сопоставляющая функции из $\tilde{W}_p^{(1)}$ ее же, рассматриваемую как элемент пространства $L^q_{D'}$ (D' означает ν -мерную поверхность, лежащую в D), линейна и вполне непрерывна при условиях

$$q < \frac{\nu p}{\mu - p}, \quad \nu > \mu - p. \quad (16)$$

При этом при сдвиге поверхности D' элемент x непрерывно зависит от величины сдвига, т. е.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \int_{D'} |x(s + \Delta s) - x(s)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}} = 0. \quad (17)$$

Рассматривая специально случай, когда $\mu < p$ и используя теорему 7 (2. X), имеем:

Теорема 5 (3. X). При условии $\mu < p$ операция вложения, рассматриваемая как операция из $\tilde{W}_p^{(1)}(D)$ в C_D , является линейной и вполне непрерывной.

З а м е ч а н и е. Используя теорему 4 (2. X) и замечание к лемме 2, эту теорему можно усилить. Именно, если $\beta < \frac{p - \mu}{p}$, то операция вложения из $\tilde{W}_p^{(1)}$ в $Lip \beta$ будет линейной.

3.4. Подобно тому, как были введены пространства $\tilde{W}_p^{(1)}(D)$, могут быть определены и пространства, норма в которых определяется с помощью высших производных. Именно, обозначим через $\tilde{W}_p^{(l)} = \tilde{W}_p^{(l)}(D)$ пространство всех l раз непрерывно-дифференцируемых

*) В. И. Кондрашевым установлена полная непрерывность операции вложения, см. [58].

функций в области D , норма в котором определяется равенством

$$\begin{aligned} \|x\| = & |m(x)| + \sum_{k=1}^{\mu} \left| m\left(\frac{\partial x}{\partial t_k}\right) \right| + \dots + \\ & + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{l-1}=1}^{\mu} \left| m\left(\frac{\partial^{l-1} x}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2} \dots \partial t_{k_{l-1}}}\right) \right| + \\ & + \left\{ \int_D \left[\sum_{k_1, k_2, \dots, k_l=1}^{\mu} \left(\frac{\partial^l x}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2} \dots \partial t_{k_l}} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим операцию вложения из пространства $\tilde{W}_p^{(l)}$ в пространство L_D^q . Проверим, что она будет линейной и вполне непрерывной при условии

$$q < \frac{\mu p}{\mu - lp}. \quad (18)$$

Действительно, при $l=1$ предложение доказано (теорема 3). Предположим, что оно верно для $l-1$. Из определения нормы в $\tilde{W}_p^{(l)}$ вытекает, что

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial t_k} \right\|_{\tilde{W}_p^{(l-1)}} \leq \|x\|_{\tilde{W}_p^{(l)}},$$

и на основании линейности операции вложения из $\tilde{W}_p^{(l-1)}$ в L_D^q заключаем отсюда, что

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial t_k} \right\|_{L_D^q} \leq M \left\| \frac{\partial x}{\partial t_k} \right\|_{\tilde{W}_p^{(l-1)}} \leq M \|x\|_{\tilde{W}_p^{(l)}},$$

если только

$$q_1 < \frac{\mu p}{\mu - (l-1)p}.$$

Это показывает, что

$$\|x\|_{\tilde{W}_{q_1}^{(l)}} \leq (\mu M + 1) \|x\|_{\tilde{W}_p^{(l)}},$$

и, наконец, на основании теоремы 3, примененной для $p=q_1$, получаем

$$\|x\|_{L_D^q} \leq M' \|x\|_{\tilde{W}_{q_1}^{(l)}} \leq M' (\mu M + 1) \|x\|_{\tilde{W}_p^{(l)}},$$

т. е. линейность операции вложения из $\tilde{W}_p^{(l)}$ в L_D^q . Условие (7)

$$q < \frac{\mu q_1}{\mu - q_1}$$

будет выполнено при подходящем q_1 , если только

$$q < \frac{\mu \frac{\mu p}{\mu - (l-1)p}}{\mu - \frac{\mu p}{\mu - (l-1)p}} = \frac{\mu p}{\mu - pl}.$$

Аналогичными рассуждениями обосновывается и полная непрерывность операции вложения.

Теорема 4 переносится на случай производных высших порядков и при $\nu < \mu$. В результате имеем следующую теорему:

Теорема 6 (З. Х). Операция вложения из пространства $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ в пространство $L_{D'}^q$ (D' — ν -мерная поверхность в D) при условиях

$$q < \frac{\nu p}{\mu - lp}, \quad \nu > \mu - lp \quad (19)$$

линейная и вполне непрерывная. При этом при непрерывной деформации поверхности D' в зависимости от параметра эта операция непрерывно зависит от параметра.

Наконец обобщением теоремы 5 на случай высших производных является следующий результат: при условии $\mu < lp$ операция вложения будет линейной и вполне непрерывной операцией из $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ в C_D .

3.5. Пространства $\tilde{W}_p^{(l)}$ очевидно неполные. Однако, если присоединить к ним функции, дифференцируемые в некотором обобщенном смысле, то они обращаются в B -пространства.

Будем говорить, что суммируемая в D функция $x^{(i)}(s)$ есть *обобщенная производная* функции x в области D , если имеется последовательность $\{x_k\}$ непрерывно-дифференцируемых в области D функций, такая, что для всякой области D_1 , замыкание которой содержится в D , имеет место

$$\int_{D_1} |x_k(t) - x(t)| dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{D_1} \left| \frac{\partial x_k}{\partial t_i} - x^{(i)}(t) \right| dt \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (20)$$

Пусть φ — непрерывно-дифференцируемая в области D функция, равная нулю на границе области D и вблизи нее, т. е. отличная от нуля лишь в некоторой области D_1 , замыкание которой содержится в D . Тогда имеет место равенство

$$\int_D x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} dt = - \int_D \varphi(t) x^{(i)}(t) dt. \quad (21)$$

Действительно, если функция x заменена здесь на x_k , а $x^{(i)}$ на $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$, то соотношение (21) представляет собой известную формулу Грина. Переход к пределу приводит к требуемому результату.

Из равенства (21) вытекает, между прочим, единственность обобщенной производной. В самом деле, если бы существовали две такие производные $x^{(i)}$ и $\tilde{x}^{(i)}$, то для разности $\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}$ мы получили бы

$$\int_D \varphi(t) [\tilde{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)] dt = 0, \quad (22)$$

где φ — произвольная функция указанного выше вида. Отсюда с помощью теоремы Лузина уже легко получить, что $\tilde{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t)$ почти везде.

В дальнейшем мы будем выбирать приближающие функции не произвольно, а некоторым специальным образом — усреднением по Стеклову.

Кроме требований, наложенных на ядро усреднения в IX.1.1, будем предполагать еще, что при любом $h > 0$ функция ω_h непрерывно-дифференцируема в $[0, \infty)$.

В IX.1.1 были установлены следующие свойства средних функций:

- a) $\|x_h\|_{L_D^p} \leq M \|x\|_{L_D^p} \quad (h > 0);$ (23)
 б) если $x \in L_D^p$ ($p \geq 1$), то $\|x - x_h\|_{L_D^p} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$;
 с) если $\|x_m - x\|_{L_D^p} \rightarrow 0$, то $\|(x_m)_h - x_h\|_{L_D^p} \rightarrow 0$.

Кроме того, вследствие специального выбора функции ω_h имеет место

д) если x имеет в D обобщенную производную $x^{(i)}$, то, какова бы ни была D_1 — внутренняя подобласть области D ($\bar{D}_1 \subset D$), — при достаточно малых $h > 0$ в D_1 выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_i} x_h = [x^{(i)}]_h. \quad (24)$$

Докажем предложение д). Возьмем $\{x_k\}$ так, чтобы выполнялось (20). Для x_k равенство (24), очевидно, выполнено, так как в этом случае можно дифференцировать под знаком интеграла. Но по пункту с)

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_i} \right)_h \rightarrow (x^{(i)})_h \text{ в } L_D^p$$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} [(x_k)_h] = \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x_k(t) dt \rightarrow \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x(t) dt = \frac{\partial}{\partial s_i} x_h.$$

Предельный переход допустим, так как $s \in D_1$ и область интегрирования — сфера $K_h(s)$ радиуса h с центром в s — при h достаточно малом есть внутренняя подобласть области D .

Отметим, что из (24) и б) вытекает, что средние функции x_h могут играть роль функций x_k в определении обобщенных производных.

Указанные обстоятельства позволяют распространить неравенство Соболева (10) на функции, которые имеют лишь обобщенные про-

изводные. Действительно, пусть обобщенный градиент суммируем со степенью p . Тогда по б)

$$\int_{D_1} \left| \frac{\partial x_h}{\partial t_i} - x^{(i)} \right|^p dt = \int_{D_1} | [x^{(i)}]_h - x^{(i)} |^p dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

аналогичное соотношение имеет место и для градиента; поэтому, применив неравенство Соболева к непрерывно-дифференцируемой функции x_h , получим

$$\left[\int_{D_1} |x_h|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D_1} \left| \int_{D_1} x_h(t) dt \right| + \left[\int_{D_1} |\text{grad } x_h|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\},$$

и, устремляя здесь $h \rightarrow 0$, будем иметь неравенство Соболева для x :

$$\left[\int_{D_1} |x|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D_1} \left| \int_{D_1} x(t) dt \right| + \left[\int_{D_1} |\text{grad } x|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

При этом постоянную M_1 можно считать не зависящей от D_1 (замечание 3 к теореме 1). Беря расширяющуюся последовательность областей D_1 , объединение которых есть D , получим в пределе то же самое неравенство но уже для области D . Попутно будет установлена и суммируемость функции $|x|^q$, т. е. что $x \in L_D^q$. Итак, окончательно

$$\left[\int_D |x|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \leq M_1 \left\{ \frac{1}{\text{mes } D} \left| \int_D x(t) dt \right| + \left[\int_D |\text{grad } x|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Если присоединить к пространству $\tilde{W}_p^{(1)}$ функции, имеющие обобщенные производные, суммируемые со степенью p , то полученное пространство, которое мы будем обозначать $W_p^{(1),*}$ будет уже полным. Действительно, пусть $\|x_k - x_m\|_{W_p^{(1)}} \rightarrow 0$. Тогда последова-

тельность $\left\{ \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \right\}$ сходится в пространстве L_D^p к некоторым функциям $x^{(i)}$, а в силу неравенства Соболева последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторой функции x в пространстве L_D^q . Остается показать, что $x^{(i)}$ суть обобщенные производные функции x , ибо если это так, то, очевидно, $x_k \rightarrow x$ в $W_p^{(1)}$. Пусть $\{D^{(n)}\}$ — последовательность внутренних подобластей области D , которые, расширяясь, исчерпывают область D . Согласно (20) для каждого $n = 1, 2, \dots$

*) Норма в пространстве $W_p^{(1)}$ определяется по формуле (14), только вместо обычных производных следует иметь в виду обобщенные.

найдутся непрерывно-дифференцируемые функции $\tilde{x}_n$ так, что

$$\int_{D(n)} |x_n - \tilde{x}_n| dt < \frac{1}{n} \quad \int_{D(n)} \left| x_n^{(i)} - \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i} \right| dt < \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu).$$

Отсюда ясно, что последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и $\left\{ \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i} \right\}$ сходятся к x и $x^{(i)}$ соответственно в любой внутренней подобласти области D , что и требовалось доказать.

Пространство $W_p^{(1)}$ сепарабельно. В самом деле, на основании пунктов б) и д) легко усмотреть возможность аппроксимации (в $W_p^{(1)}$) любой функции из $W_p^{(1)}$ непрерывно-дифференцируемыми функциями, которые, в свою очередь, могут быть приближены полиномами с рациональными коэффициентами.

В основу определения обобщенной производной может быть положено равенство (21). Именно, если существует функция $x^{(i)}$ такая, что (21) имеет место для любой функции φ соответствующего вида, то $x^{(i)}$ является обобщенной производной функции x . Действительно, для любой внутренней подобласти D_1 области D при h , достаточно малом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_h}{\partial s_i} &= \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|) x(t) dt = - \int \frac{\partial}{\partial t_i} [\omega_h(|s-t|)] x(t) dt = \\ &= \int \omega_h(|s-t|) x^{(i)}(t) dt = (x^{(i)})_h \rightarrow x^{(i)}, \end{aligned}$$

откуда и видно, что $x^{(i)}$ есть обобщенная производная для x .

Аналогичным образом вводятся обобщенные производные высших порядков. Также индуктивно устанавливается полнота и сепарабельность пространств $W_p^{(l)}$, получаемых из $\tilde{W}_p^{(l)}$ присоединением к ним функций, имеющих обобщенные производные l -го порядка, суммируемые со степенью p .

В случае пространств $W_p^{(l)}$ вложение одного такого пространства в другое ($W_p^{(l)} \subset W_q^{(m)}$) говорит уже не только о некотором интегральном неравенстве, но и о том, что функция, являющаяся элементом пространства $W_p^{(l)}$, является также и элементом пространства $W_q^{(m)}$ (это будет, если $q < \frac{\mu p}{\mu - (l-m)p}$). *) Последнее обстоятельство далеко не тривиально, как это было в случае пространств $\tilde{W}_p^{(l)}$.

Отметим, наконец, то важное обстоятельство, что норму в пространстве $W_p^{(l)}$ можно вводить и другими способами, эквивалентными прежнему.

*) При указанном условии вложение $W_p^{(l)}$ в $W_q^{(m)}$ будет вполне непрерывным.

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k$ — некоторая система линейных функционалов в $W_p^{(l)}$, обладающая тем свойством, что из равенств

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_k(x) = 0;$$

$$\int_D \left[\sum_{i_1, i_2, \dots, i_l=1}^p \left[\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right]^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt = 0 \quad (25)$$

следует $x = 0$. Такую систему функционалов будем называть *определяющей*.

Установим неравенство

$$\|x\|_{W_p^{(l)}} \leq B \left\{ |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| + \right. \\ \left. + \left[\int_D \left[\sum_{i_1, \dots, i_l} \left(\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad (26)$$

где B — постоянная. Действительно, если бы такой постоянной не существовало, то нашлась бы последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и

$$|f_1(x_n)| + \dots + |f_k(x_n)| + \\ + \left\{ \int_D \left[\sum_{i_1, \dots, i_l} \left(\frac{\partial^l x_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{p}} = \epsilon_n \rightarrow 0. \quad (27)$$

Поскольку средние значения функции x_n и ее обобщенных производных до $(l-1)$ -го порядка не превосходят $\|x_n\| = 1$, то из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что средние значения функций x_{n_k} и их производных будут образовывать сходящиеся последовательности. Учитывая (27), получим, что $\|x_{n_k} - x_{n_j}\| \rightarrow 0$. Ввиду полноты пространства $W_p^{(l)}$ существует $x = \lim x_{n_k} \in W_p^{(l)}$. Снова применяя (27), находим, что x удовлетворяет условиям (25), так что $x = 0$, что, однако, невозможно.

Неравенство (26) установлено. Справедливость неравенства противоположного смысла вытекает из линейности функционалов $f_1, f_2, \dots, f_k$. Таким образом, в качестве нормы в $W_p^{(l)}$ может быть принято выражение

$$\|x\| = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| + \\ + \left\{ \int_D \left[\sum_{i_1, i_2, \dots, i_l} \left| \frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_l}} \right|^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В качестве нормы в $W_p^{(l)}$ могут быть приняты и другие выражения. Так, например, можно положить

$$\|x\| = \left\{ \int_D \left[\sum_{k=0}^l \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\mu} \left| \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right|^2 \right]^{\frac{p}{2}} dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что пространство $W_2^{(l)}$ при таком определении нормы является гильбертовым, скалярное произведение в нем определяется как

$$(x, y) = \int_D \sum_{k=0}^l \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \cdot \frac{\partial^k y}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} dt.$$

Укажем еще на такое важное обстоятельство. Пусть имеет место вложение пространств $W_q^{(m)}(S) \supset W_p^{(l)}(D)$, где S — ν -мерное многообразие, лежащее в области D . Тогда для функции из $W_p^{(l)}(D)$ можно говорить о значениях ее m -х производных на поверхности S , которые определены как функции, суммируемые с q -ой степенью на S . В случае, если теоремы вложения гарантируют непрерывность обобщенных производных некоторого порядка, то легко убедиться, что эти производные существуют в обычном смысле. *)

Наконец, полезно иметь в виду, что если на функции из $W_p^{(l)}(D)$ наложены некоторые линейные условия, относящиеся к значению m -х производных на поверхности S , причем $W_p^{(l)}(D) \subset W_q^{(m)}(S)$, то такие условия определяют в пространстве $W_p^{(l)}(D)$ замкнутое (и линейное) множество.

3.6. В заключение приведем в качестве применения доказательство существования решения задачи Дирихле вариационным методом.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta x = 0 \quad x|_S = \varphi. \quad (28)$$

Решение будем искать среди функций, имеющих конечный интеграл Дирихле

$$H(x) = \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt < \infty, \quad (29)$$

т. е. будем считать $x \in W_2^{(1)}(D)$. Отсюда по теореме 4 следует, что $x \in L^2(S)$. Действительно, размерность ν многообразия S равна $\mu - 1$, а

$$q = 2 < \frac{(\mu-1)2}{\mu-2} = 2 + \frac{2}{\mu-2}; \quad \nu = \mu - 1 > \mu - 2 = \mu - p.$$

*) Точнее говоря, одна из эквивалентных функций, отвечающих элементу x , будет обладать этим свойством.

При этом

$$\int_S |x(s + \Delta s) - x(s)|^2 ds \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0,$$

т. е. значения функции x на граничной поверхности представляют предел (в среднем) ее значений изнутри (на сдвинутой поверхности).

Итак, функция с конечным интегралом Дирихле должна иметь граничные значения, суммируемые с квадратом на поверхности.

Однако не всякая функция φ , определенная на S и суммируемая с квадратом, может быть взята в качестве граничных значений. Мы назовем φ *допустимой*, если имеется некоторая $x \in W_2^{(1)}(D)$, такая, что $\varphi = x|_S$.

В граничной задаче (28) будем считать φ допустимой.

Обозначим через $W_2^{(1)}(\varphi)$ множество функций из $W_2^{(1)}(D)$, граничные значения которых на S равны φ . Для $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ имеем $0 \leq H(x) < \infty$, поэтому существует конечный

$$\inf_{x \in W_2^{(1)}(\varphi)} H(x) = d \quad (x \in W_2^{(1)}(\varphi)).$$

Построим последовательность $\{x_n\}$, минимизирующую функционал H , т. е. такую, что

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n).$$

Теорема 7 (3.X). Минимизирующая последовательность $\{x_n\}$ сходится в пространстве $W_2^{(1)}$; предельная функция принадлежит множеству $W_2^{(1)}(\varphi)$ и дает функционалу H минимальное значение среди функций из $W_2^{(1)}(\varphi)$.

Доказательство. Если ввести в $W_2^{(1)}$ скалярное произведение, полагая

$$(x, y) = \int_S x(s)y(s) ds + \int_D \sum_{k=1}^n \frac{\partial x}{\partial t_k} \frac{\partial y}{\partial t_k} dt, \quad (x, y \in W_2^{(1)}),$$

то $W_2^{(1)}$ обращается в гильбертово пространство. При этом норма произвольного элемента $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ и значение функционала H на этом элементе связаны соотношением

$$\|x\|^2 = \int_S |\varphi(s)|^2 ds + H(x). \quad (30)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$ множество всех $x \in W_2^{(1)}$, обращающихся на S в нуль. Как было отмечено в 3.5, $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$ является подпространством пространства $W_2^{(1)}$.

Рассмотрим некоторый элемент $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$. Можно считать, что x_0 ортогонален подпространству $\mathring{W}_2^{(1)}$. В самом деле, в противном случае x_0 можно представить в виде $x_0 = x'_0 + x''_0$, где x'_0 ортогонален $\mathring{W}_2^{(1)}$, а $x''_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}$. Так как

$$x'_0|_S = x_0|_S - x''_0|_S = \varphi,$$

то $x'_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$ и вместо x_0 можно рассмотреть элемент x'_0 .

Докажем, что $H(x_0) = d$. Пусть x — произвольный элемент из $W_2^{(1)}(\varphi)$. Так как разность $x - x_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}$, то она ортогональна элементу x_0 , следовательно, в силу (30),

$$H(x) - H(x_0) = \|x\|^2 - \|x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 \geq 0, \quad (31)$$

т. е.

$$d \leq H(x_0) \leq \inf H(x) = d,$$

или, иначе, $d = H(x_0)$.

Полагая в (31) $x = x_n$, получим далее

$$H(x_n) - H(x_0) = \|x_n - x_0\|^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Но $H(x_0) = d$, поэтому $H(x_n) - H(x_0) \rightarrow 0$. Таким образом, $x_n \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Соотношение (31) показывает, что элемент $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$, доставляющий минимум функционалу H , единственен.

Мы не будем останавливаться на доказательстве того, что функция x_0 , минимизирующая функционал H , дает решение граничной задачи (28) и притом единственное, отсылая за этим, а также по поводу других приложений теорем вложения в математической физике к монографии С. Л. Соболева (см. Соболев-1), в которой эти вопросы изложены со всей подробностью. Рассмотренные в этом параграфе вопросы затрагиваются также в работах С. М. Никольского [866] и В. М. Бабица [7].

ГЛАВА XI

ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В большинстве случаев, когда рассматривается конкретное линейное множество X , в нем уже имеется некоторая «естественная» сходимости, которая, таким образом, предопределяет топологию в X . Более того, иногда удается доказать, что при соблюдении определенных минимальных условий топология вообще однозначно определяется алгеброй. Далеко не всегда эту естественную топологию можно ввести посредством нормы; так, например, обстоит дело в случае известных уже нам пространств S и s , это же обстоятельство имеет место в пространстве C_∞ , состоящем из всех непрерывных функций, заданных на $(-\infty, \infty)$ (сходимость в C_∞ определена как равномерная на каждом конечном промежутке).

Эти соображения приводят к необходимости изучать пространства более общей природы, чем нормированные. Элементарные сведения из теории такого рода пространств и излагаются в настоящей главе.

Подробное и полное изложение этого вопроса читатель найдет, например, в книге Н. Бурбаки (см. Бурбаки-II). Краткий, но обстоятельный обзор теории линейных топологических пространств дан Дьёдонне (см.)

§ 1. Общие определения

1.1. Пусть X — линейное множество и одновременно топологическое пространство. Множество X называется *линейным топологическим пространством*, если алгебраические операции непрерывны в топологии X , т. е.

1) для каждой пары элементов $x, y \in X$ и окрестности V_{x+y} элемента $x+y$ найдется окрестность V_x элемента x и окрестность V_y элемента y такие, что

$$V_x + V_y \subset V_{x+y}; *)$$

2) каков бы ни был элемент $x \in X$, число λ и окрестность $V_{\lambda x}$ элемента λx , найдется окрестность V_x элемента x и число $\delta > 0$ так, что

$$\mu V_x \subset V_{\lambda x} \quad (|\mu - \lambda| < \delta).$$

Как и в случае нормированных пространств, *подпространством* линейного топологического пространства X называется всякое замкнутое линейное множество, содержащееся в X . Нетрудно проверить, что подпространство линейного топологического пространства само является линейным топологическим пространством в силу индуцируемой в нем топологии и алгебраических операций.

Укажем на некоторые простые следствия из определения линейного топологического пространства.

*) $E_1 + E_2$ означает алгебраическую сумму множеств E_1 и E_2 из X . См. II.1.7. Там же дано определение символа λE .

I. Если $G \subset X$ — открытое множество, то $x_0 + G$ также открытое множество.

Действительно, пусть $x \in x_0 + G$, так что $x = x_0 + x'$, где $x' \in G$. Пусть $V_{x'}$ — окрестность точки x' , содержащаяся в G . Поскольку $x' = x + (-x_0)$, по условию 1) найдется окрестность V_x точки x и окрестность V_{-x_0} точки $(-x_0)$ так, что $V_x + V_{-x_0} \subset V_{x'}$. Так как $-x_0 \in V_{-x_0}$, то $-x_0 + V_x \subset V_{x'} \subset G$ и, следовательно, $V_x \subset x_0 + G$, т. е. x — внутренняя точка множества $x_0 + G$.

Аналогично доказываются

II. Если G — открытое множество и $\lambda \neq 0$, то и λG — открытое множество. Подобные утверждения имеют место и для замкнутых множеств.

Из предложения I вытекает

III. Каждая окрестность точки $x \in X$ имеет вид $x + V$, где V — окрестность нулевого элемента пространства X . При этом, если V пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля, то $x + V$ пробегает фундаментальную систему окрестностей точки x .

Сформулированное предложение позволяет ограничиться рассмотрением только окрестностей нулевого элемента.

Прежде чем использовать отмеченное обстоятельство, дадим два определения, полезных в дальнейшем.

Множество $E \subset X$ называется *уравновешенным*, если $\lambda E \subset E$ при $|\lambda| \leq 1$. Если X — вещественное пространство, то уравновешенность множества E означает, что вместе с точкой x в E содержится отрезок $[x, -x]$.

Говорят, что множество $A \subset X$ *поглощает* множество $B \subset X$, если существует такое положительное число λ_0 , что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ $B \subset \lambda A$. Множество A называется *поглощающим*, если оно поглощает каждую точку $x \in X$. Геометрически последнее свойство означает, что на любом луче, исходящем из нуля, имеется отрезок с концом в нулевой точке, целиком содержащийся в A .

Теорема I (I. XI). Существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля линейного топологического пространства X , обладающая свойствами:

1) *каковы бы ни были $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}$, существует $V_3 \in \mathfrak{B}$ такая, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;*

2) *каждая $V \in \mathfrak{B}$ — уравновешенное множество;*

3) *каждая $V \in \mathfrak{B}$ — поглощающее множество;*

4) *какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, существует $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$ такая, что $\tilde{V} + \tilde{V} \subset V$.*

Обратно, если X — линейное множество, в котором выделено семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств, удовлетворяющее условиям 1) — 4), то, принимая за окрестности элемента $x \in X$ любое множество вида $x + V$ ($V \in \mathfrak{B}$), мы обратим X в линейное топологическое пространство, в котором семейство $\mathfrak{B}$ будет фундаментальной системой окрестностей нуля.

Доказательство. Если $\mathfrak{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля линейного топологического пространства X , то условие 1) очевидно выполнено. Точно так же, поскольку $0 + 0 = 0$, соблюдено условие 4). Докажем, что любая окрестность V нуля есть поглощающее множество. Действительно, так как $0 \cdot x = 0$, то по определению линейного топологического пространства найдется окрестность V_x точки x и число $\delta > 0$ так, что

$$\lambda V_x \subset V \text{ при } |\lambda| \leq \delta. \text{ В частности, } x \in \frac{1}{\lambda} V \text{ при } \left| \frac{1}{\lambda} \right| \geq \frac{1}{\delta}.$$

Чтобы завершить доказательство первой части теоремы, достаточно установить, что уравновешенные окрестности образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Пусть V — произвольная окрестность нуля. Ввиду того, что $0 \cdot 0 = 0$, найдется окрестность V_1 нуля и число $\delta > 0$ так, что $\lambda V_1 \subset V$ при $|\lambda| \leq \delta$. Обозначим $V_0 = \bigcup_{|\lambda| \leq \delta} \lambda V_1$. Так как $V_0 \supset \delta V_1$, а по свой-

ству III δV_1 является окрестностью нуля, то окрестностью нуля будет и множество V_0 . Если $|\alpha| \leq 1$, то $\alpha V_0 = \bigcup_{|\lambda| \leq \delta} \alpha \lambda V_1 \subset V_0$ и V_0 — уравновешенная окрестность. Остается заметить, что $V_0 \subset V$.

Переходим к доказательству второй части теоремы.

Проверим прежде всего, что при указанном в формулировке теоремы способе определения окрестностей точки x множество X оно обращается в топологическое пространство (см. теорему 1 (5. 1)).

1) Каждая окрестность точки x содержит точку x . Действительно, любое множество $V \in \mathfrak{B}$, будучи уравновешенным, содержит нуль, поэтому $x \in x + V$.

2) Пересечение двух окрестностей точки x содержит третью окрестность этой же точки. Это сразу же следует из условия 1) теоремы.

3) Какова бы ни была окрестность V_x точки x , существует такая окрестность V'_x этой же точки, что V_x содержит окрестность любой точки $y \in V'_x$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $x = 0$. Пусть $V \in \mathfrak{B}$ — произвольная окрестность нуля, а $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$ — окрестность нуля, существование которой обусловлено условием 4) теоремы. Можно принять $V'_0 = \tilde{V}$. Действительно, если $y \in \tilde{V}$, то $y + \tilde{V}$ является окрестностью точки y и $y + \tilde{V} \subset \tilde{V} + \tilde{V} \subset V$.

Итак, X — топологическое пространство. Проверим, что алгебраические операции непрерывны в X . Непрерывность операции сложения легко получается из условия 4). Прежде чем переходить к операции умножения, отметим одно следствие условий 2) и 4). Для любого множества $E \subset X$ имеем $2E \subset E + E$, поэтому согласно условию 4) для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ найдется $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$ так, что $2\tilde{V} \subset V$, и подобным же образом, каково бы ни было натуральное число n существует $V^{(n)} \in \mathfrak{B}$ так, что $2^n V^{(n)} \subset V$. Пусть λ — произвольное число. Обозначим через n столь большое натуральное число, что $|\lambda| \leq 2^n$. Так как $V^{(n)}$ — уравновешенное множество, то уравновешенным будет и $2^n V^{(n)}$, поэтому

$$\lambda V^{(n)} = \frac{\lambda}{2^n} (2^n V^{(n)}) \subset 2^n V^{(n)} \subset V.$$

Теперь уже нетрудно доказать, что операция умножения непрерывна. Пусть $x \in X$ и λ — числовой множитель. Имеем

$$\mu y - \lambda x = (\mu - \lambda)(y - x) + (\mu - \lambda)x + \lambda(y - x).$$

Учитывая это соотношение и принимая во внимание условие 4), достаточно установить три факта:

1) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдется $V_1 \in \mathfrak{B}$ и число $\delta > 0$, так что $\alpha V_1 \subset V$ ($|\alpha| \leq \delta$);

2) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдется $\delta > 0$, так что $\alpha x \in V$ при $|\alpha| \leq \delta$;

3) какова бы ни была $V \in \mathfrak{B}$, найдется $V_1 \in \mathfrak{B}$, так что $\lambda V_1 \subset V$.

Справедливость первого утверждения вытекает из того, что множество V уравновешенное, поэтому можно принять $V_1 = V$, $\delta = 1$.

Второе утверждение также верно. В самом деле, V — уравновешенное и поглощающее множество, поэтому найдется $\lambda' > 0$, так что $x \in \lambda' V$. Если положить $\delta = \frac{1}{\lambda'}$, то для $|\alpha| \leq \delta$ будет

$$\alpha(\lambda' V) = (\alpha \lambda') V \subset V,$$

так как $|\alpha \lambda'| \leq 1$. Отсюда следует, что $\alpha x \in V$ ($|\alpha| \leq \delta$).

Наконец, справедливость третьего утверждения была уже отмечена.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Всякое линейное топологическое пространство есть T_3 -пространство.

Действительно, достаточно установить, что нулевой элемент обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей. Такую систему образуют замыкания окрестностей из произвольной фундаментальной системы $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля. В самом деле, если $V \in \mathfrak{B}$ и $\bar{V} \in \mathfrak{B}$ такая, что $\bar{V} + \bar{V} \subset V$, то $\bar{V} \subset V$, так как если $x_0 \in \bar{V}$, то окрестность $x_0 + \bar{V}$ точки x_0 и множество $\bar{V}$ не пересекаются.

Следствие 2. Для того чтобы линейное топологическое пространство было регулярным топологическим пространством, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым.

Отметим еще, что при переходе к замыканию свойство быть уравновешенным сохраняется (доказательство предоставляем читателю). На этом основании мы, говоря о данной окрестности нуля, будем считать ее уравновешенной и замкнутой.

1.2. Сформулируем еще несколько предложений, имеющих место в линейном топологическом пространстве X .

I. Замыкание линейного множества X_0 в пространстве X есть линейное множество.

В самом деле, пусть $x, y \in \bar{X}_0$ и α, β — произвольные числовые множители. Пусть, далее, V_z — окрестность точки $z = \alpha x + \beta y$. Найдутся окрестности V_x точки x , и V_y точки y такие, что $\alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$. В окрестности V_x имеются точки множества X_0 ; обозначим через x' одну из таких точек. Аналогично пусть $y' \in V_y \cap X_0$. Поскольку $z' = \alpha x' + \beta y' \in X_0$ и одновременно $z' \in \alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$, пересечение $V_z \cap X_0$ не пусто, что ввиду произвольности окрестности V_z дает $z \in \bar{X}_0$.

Подобным же образом доказывается

II. Замыкание выпуклого множества выпукло.

Из предложения III предыдущего пункта легко получаем

III. Для того, чтобы обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ (α пробегает направление A) сходилась к $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $x_\alpha - x \rightarrow 0$.

Несколько сложнее доказывается следующее предложение. A

IV. Пусть K_1 и K_2 — компактные в себе множества отделимого пространства X . Тогда множество $\lambda_1 K + \lambda_2 K$ также компактно в себе.

Действительно, в 1.5.12 было показано, что в произведении $X \times X$ множество $K = K_1 \times K_2$ компактно в себе. Отображение φ :

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y \quad (x, y \in X)$$

пространства $X \times X$ в X непрерывно и на основании 1.5.10 множество $\varphi(K) = \lambda_1 K + \lambda_2 K$ компактно в себе в пространстве X .

Два линейных топологических пространства X и Y называются *топологически эквивалентными*, если они гомеоморфны как топологические пространства и изоморфны как линейные множества. Очевидно, что если X и Y изоморфные (алгебраически) линейные топологические пространства, а $\mathfrak{B}$, соответственно $\mathfrak{B}$, фундаментальная система окрестностей нуля в пространстве X , соответственно Y , то топологически эквивалентными пространства X и Y будут тогда и только тогда, когда множества в X , соответствующие множествам $W \in \mathfrak{B}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (в X), и, наоборот, множества, соответствующие множествам $V \in \mathfrak{B}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве Y .

Сохраняя прежнюю точку зрения, мы обычно будем отождествлять топологически эквивалентные пространства. *)

*) Если топология в X и Y определена с помощью метрики, то следует иметь в виду, что топологически эквивалентные пространства могут и не быть изометричными.

1.3. Пусть X — линейное топологическое пространство и X_0 — его подпространство. Распределим элементы пространства X по классам, относя в один класс такие элементы $x, y \in X$, что $x - y \in X_0$. Ясно, что два различных класса не имеют общих элементов и что все классы в совокупности исчерпывают пространство X . Отметим также, что любой класс X имеет вид $x + X_0$, где x — какой угодно элемент класса X . Наоборот, множества такого вида образует класс (содержащий элемент x).

Обозначим множество всех классов через X/X_0 . Введем в X/X_0 алгебраические операции. Именно, под суммой классов X и Y будем понимать алгебраическую сумму множеств X, Y . Так как $X = x + X_0$, а $Y = y + X_0$, то $X + Y = x + y + X_0$ и, следовательно, $X + Y$ является классом. Аналогично определяется в X/X_0 операция умножения на число. Предоставляем читателю несложную проверку того, что X/X_0 оказывается при таком определении алгебраических операций линейным множеством. Роль нулевого элемента в нем играет класс, содержащий нуль пространства X , т. е. класс, по составу элементов совпадающий с X_0 .

Сопоставив элементу $x \in X$ класс $x + X_0$, его содержащий, мы получим отображение пространства X на X/X_0 , которое называется *естественным гомоморфизмом (отображением)*. Принимая за открытые множества в X/X_0 образы открытых множеств в X , мы введем в X/X_0 топологию, в силу которой, как нетрудно проверить, X/X_0 становится линейным топологическим пространством. Оно называется *фактор-пространством* пространства X (по подпространству X_0). Из самого способа введения топологии в X/X_0 вытекает, что естественное отображение X на X/X_0 непрерывное.

Отметим, что если X — нормированное пространство, то фактор-пространство X/X_0 также нормируемо, при этом в качестве нормы в X/X_0 можно принять

$$\|X\| = \inf_{x \in X} \|x\| \quad (X \in X/X_0).$$

Несложные рассуждения в подтверждение указанного обстоятельства предоставляем провести читателю самостоятельно.

Остановимся на одном частном случае. Пусть X — линейное топологическое пространство, вообще говоря, неотделимое. Обозначим через X_0 замыкание множества, состоящего из одного нулевого элемента. Если через $\mathfrak{B}$ обозначить фундаментальную систему окрестностей нуля, то, очевидно,

$$X_0 = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V.$$

Поскольку множество, содержащее лишь один нулевой элемент, линейное, его замыкание — множество X_0 — в силу сказанного в 1.2 также оказывается линейным и, тем самым, подпространством пространства X . Фактор-пространство X/X_0 будет уже отделимым линейным топологическим пространством.

В самом деле, пусть класс $X \in X/X_0$ входит в каждую окрестность нуля пространства X/X_0 . Обозначим через φ естественный гомоморфизм пространства X на X/X_0 . Пусть V — произвольная окрестность нуля в пространстве X . Так как $\varphi(V)$ будет окрестностью нуля в пространстве X/X_0 , то $X \in \varphi(V)$, т. е. пересечение $V \cap X$ непусто. Учитывая, что класс X является замкнутым в X множеством, получаем отсюда, что $0 \in X$, иными словами, X есть нулевой элемент пространства X/X_0 .

Поскольку изучение (с топологической точки зрения) линейного топологического пространства X сводится к изучению отделимого фактор-пространства X/X_0 , мы в дальнейшем будем предполагать все данные пространства отделимыми.

1.4. Укажем на некоторые примеры линейных топологических пространств.

Прежде всего отметим, что всякое нормированное пространство можно рассматривать и как линейное топологическое. Фундаментальная система окрестностей нуля в нормированном пространстве — совокупность всех сфер с центром в нулевой точке.

Среди линейных топологических пространств важную роль играют *линейные метрические пространства*, т. е. такие линейные топологические пространства, топология в которых может быть задана с помощью метрики. Очевидно, линейное метрическое пространство отделимо и обладает счетной фундаментальной системой окрестностей нуля. Эти два свойства полностью характеризуют класс линейных метрических пространств. Поскольку доказательство этого предложения довольно сложно, мы не приводим его здесь. В частном случае, который только и представляет интерес, этот факт будет установлен ниже, в § 2. Также без доказательства отметим, что в линейном метрическом пространстве всегда может быть введена инвариантная относительно параллельного переноса метрика, т. е. такая метрика, что

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$$

для любых элементов x, y, z .

Рассмотрим теперь некоторые конкретные линейные топологические пространства.

Пространства s и S , введенные еще в главе I, являясь метрическими пространствами с непрерывными алгебраическими операциями, будут тем самым линейными топологическими пространствами.

Как обобщение пространства s можно рассмотреть пространство s_T , состоящее из всех вещественных функций, заданных на абстрактном множестве T . Фундаментальная система $\mathfrak{B}$ окрестностей нуля в пространстве s_T состоит из всех множеств $V_{t_1, t_2, \dots, t_n; \varepsilon}$, определяемых произвольным набором $t_1, t_2, \dots, t_n$ элементов из T и произвольным положительным числом ε ; $x \in V_{t_1, t_2, \dots, t_n; \varepsilon}$ означает

$$|x(t_k)| \leq \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Предоставляем читателю проверить, что указанная система удовлетворяет условиям теоремы 1, так что s_T оказывается отделимым линейным топологическим пространством, которое совпадает с s , если T — счетное множество.

В качестве следующего примера рассмотрим пространство S_∞ , элементами которого являются всевозможные непрерывные функции, заданные на всей числовой прямой. Топология в S_∞ вводится посредством фундаментальной системы окрестностей нуля, состоящей из множеств $V_{n; \varepsilon}$, где n — натуральное число, а $\varepsilon > 0$. При этом $x \in V_{n; \varepsilon}$ означает

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad (|t| \leq n).$$

И здесь проверку условий теоремы 1, а также отделимости пространства S_∞ предоставляем читателю.

В теории обобщенных функций большую роль играет пространство $D_{[a, b]}^\circ$ всевозможных бесконечно-дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне промежутка $[a, b]$. Фундаментальная система окрестностей нуля в этом пространстве состоит из множеств $V_{n; \varepsilon}$, определяемых произвольным натуральным числом n и произвольным положительным числом ε . Окрестность $V_{n; \varepsilon}$ состоит из всех x , удовлетворяющих условиям

$$|x^{(k)}(t)| \leq \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, n; t \in [a, b]).$$

Аналогичным образом определяется пространство D_K° всех бесконечно-дифференцируемых функций γ переменных, обращающихся в нуль вне ограниченного замкнутого множества K евклидова пространства R^n .

Приведем еще один любопытный пример линейного топологического пространства. Обозначим через L_∞ совокупность всех измеримых функций, заданных на $[0, 1]$ и суммируемых с любой степенью. Окрестность нуля $V_{p, \varepsilon}$ в L_∞ определяется произвольным числом $p > 1$ и произвольным $\varepsilon > 0$. Именно $x \in V_{p, \varepsilon}$, если

$$\left[\int_0^1 |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

В заключение укажем на пространство S_T^* , состоящее из всех функций, заданных на абстрактном множестве T и имеющих лишь конечное число отличных от нуля значений. За окрестности нуля в S_T^* принимаются все выпуклые поглощающие множества. Проверка условий теоремы 1 не составит труда, если учесть, что в вещественном пространстве симметричное выпуклое множество уравновешено и что для выпуклого множества E будет $E + E = 2E$.

Во всех предыдущих примерах характер сходимости был ясен из самого определения топологии. Исключение составляет лишь пространство S_T^* , на котором мы и остановимся. Пусть $\{x_n\} \subset S_T^*$ и $x_n \rightarrow 0$. Докажем, что существует конечное множество $T_0 \subset T$ такое, что

$$x_n(t) = 0 \quad (t \in T_0; n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В противном случае среди элементов последовательности $\{x_n\}$ будет бесконечно много линейно независимых. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что все элементы $x_1, x_2, \dots$ линейно независимы. С помощью трансфинитной индукции можно дополнить последовательность $\{x_n\}$ элементами $\{y_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) так, что каждый элемент из S_T^* есть линейная комбинация элементов построенной системы. *) Образует выпуклую оболочку V элементов

$$\pm \frac{1}{2} x_n; \pm y_\xi \quad (n = 1, 2, \dots; \xi \in \Xi).$$

Нетрудно проверить, что V — поглощающее множество. Действительно, любой $x \in S_T^*$ может быть представлен в форме

$$x = \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k + \sum_{j=1}^v \beta_j y_{\xi_j}.$$

Если взять

$$\lambda \geq \max [2|\alpha_1|, \dots, 2|\alpha_m|, |\beta_1|, \dots, |\beta_v|],$$

то, очевидно, $x \in \lambda V$. Итак, V — окрестность нуля. Между тем ни одно x_n не входит в V , что противоречит предположению $x_n \rightarrow 0$.

Используя аналогичные построения, можно доказать, что

$$x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (t \in T). \quad (2)$$

Наоборот, (1) и (2) обеспечивают $x_n \rightarrow 0$.

*) Подобную систему можно, очевидно, построить в любом линейном множестве. Она называется *алгебраическим базисом* данного линейного множества (ср. II.1.5).

З а м е ч а н и е. Топологию, подобную топологии пространства s_T^* , можно ввести в любом линейном множестве X . Ничего не меняя по существу в рассуждениях, относящихся к s_T^* можно доказать, что сходимость $x_n \rightarrow 0$ в X означает, что существует конечное число линейно независимых элементов $e_1, e_2, \dots, e_m \in X$ таких, что

$$x_n = \sum_{k=1}^m \alpha_k^{(n)} e_k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

причем

$$\alpha_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

1.5. Множество E линейного топологического пространства X называется *ограниченным* (топологически), если оно поглощается каждой окрестностью нуля. Ясно, что для ограниченности множества достаточно, чтобы его поглощала любая окрестность из фундаментальной системы окрестностей нуля.

Очевидно, если E ограничено, то ограничено множество λE и любая часть E .

Теорема 2 (I.XI). Для того чтобы множество E линейного топологического пространства X было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были последовательность $\{x_n\} \subset E$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ вещественных чисел, $\lambda_n \rightarrow 0$, было $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательности указанного вида и V — произвольная уравновешенная окрестность нуля. Существует $\lambda > 0$ такое, что $E \subset \lambda V$. В частности, $x_n \in \lambda V$ ($n = 1, 2, \dots$).

Таким образом, если n настолько велико, что $|\lambda_n| \leq \frac{1}{\lambda}$, то $\lambda_n x_n \in \lambda_n \lambda V \subset V$, т. е. $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Достаточность. Если бы в условиях теоремы множество E не было ограниченным, то нашлась бы окрестность нуля V , которая не поглощает E . При любом $\lambda > 0$ множество $E/\lambda V$ не пусто. Полагая последовательно $\lambda = 1, 2, \dots$, мы получили бы последовательность элементов

$$x_n \in E/nV \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как, с одной стороны, $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$), а с другой, $\frac{1}{n} x_n \in V$, то это противоречило бы условию теоремы.

В нормированном пространстве ограниченность в смысле данного определения совпадает, как легко видеть, с ограниченностью по норме. В линейном метрическом пространстве аналогичный факт не имеет уже, вообще говоря, места. Так, в пространстве s каждое множество ограничено по метрике, между тем ограниченными топологически будут лишь такие множества, для которых существует мажорантная последовательность. Подобную же структуру имеют ограниченные множества и в пространстве s_T .

Характер ограниченных множеств в пространствах C_∞ , D_K° и L_∞ легко выясняется, и мы не останавливаемся на этом.

Что касается пространства s_T^* , то в нем множество E ограничено тогда и только тогда, когда существует такое конечное множество $T_0 \subset T$, что

$$\sup_{x \in E} |x(t)| \begin{cases} = 0 & t \in T_0 \\ < \infty & t \in T_0 \end{cases}.$$

Несложное доказательство этого мы предоставляем провести читателю самостоятельно.

Отметим некоторые общие факты, относящиеся к понятию ограниченного множества. Почти очевидно, например, следующее предложение.

I. Если $E_1, E_2, \dots, E_n$ — ограниченные множества, то и $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ ограничено. В частности, конечное множество ограничено.

Если использовать пункт 4) теоремы 1, то можно доказать:

II. Если E_1 и E_2 ограничены, то ограничено и множество $E = E_1 + E_2$.

Поскольку фундаментальную систему окрестностей нуля можно составить из замкнутых окрестностей (следствие 1 к теореме 1), то

III. Замыкание ограниченного множества ограничено.

1.6. Остановимся на понятии полноты линейного топологического пространства. Рассмотрим обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$, где α пробегает некоторое направление A . Обозначим через A^2 совокупность всевозможных пар (α', α'') ($\alpha', \alpha'' \in A$). Легко проверить, что A^2 становится направлением, если принять $(\alpha'_1, \alpha''_1) \prec (\alpha'_2, \alpha''_2)$ тогда и только тогда, когда одновременно $\alpha'_1 \prec \alpha'_2$ и $\alpha''_1 \prec \alpha''_2$.

Обобщенная последовательность $\{x_\sigma\}$ называется *сходящейся в себе*, если последовательность $\{x_{(\alpha', \alpha'')}\}$ ($x_{(\alpha', \alpha'')} = x_{\alpha'} - x_{\alpha''}$) сходится к нулю по направлению A^2 . Линейное топологическое пространство называется *полным*, если любая сходящаяся в себе обобщенная последовательность элементов этого пространства сходится к некоторому элементу. Если при этом рассматривать лишь ограниченные обобщенные последовательности $\{x_\alpha\}$, то пространство называется *ограниченно-полным*,*) если же принимать во внимание только обычные (счетные) последовательности, то *счетно-полным*.**)

Поскольку множество элементов обобщенной последовательности не обязательно ограничено, то требование полноты является более сильным, чем требование ограниченной полноты. С другой стороны, счетная сходящаяся в себе последовательность, как это нетрудно доказать, ограничена, поэтому ограниченная полнота влечет счетную полноту. В линейном метрическом пространстве все три вида полноты совпадают, как ясно из следующей теоремы.

Теорема 3 (I. XI). *Счетно-полное линейное топологическое пространство X , в котором имеется счетная фундаментальная система окрестностей нуля, полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_\sigma\}$ ($\sigma \in A$) — сходящаяся в себе обобщенная последовательность элементов пространства X . Обозначим через $\{V_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) счетную фундаментальную систему окрестностей нуля. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется такая пара $(\alpha'_n, \alpha''_n) \in A^2$, что

$$x_{\alpha'_n} - x_{\alpha''_n} \in V_n \quad ((\alpha', \alpha'') \prec (\alpha'_n, \alpha''_n)). \quad (3)$$

Обозначим через α_n элемент из A , для которого $\alpha_n \prec \alpha'_n$, $\alpha_n \prec \alpha''_n$. Можно считать, что $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \dots$. Рассмотрим последовательность $\{x_{\sigma_n}\}$. Поскольку она, очевидно, сходится в себе, то по условию существует $x \in X$ такой, что $x_{\sigma_n} \rightarrow x$. Докажем соотношение $x_\sigma \rightarrow x$. Возьмем произвольную окрестность V_m и найдем окрестность V_k так, что $V_k + V_k \subset V_m$. Можно указать такой номер $n \geq k$, что

$$x_{\sigma_n} - x \in V_k.$$

*) Иногда говорят *квазиполным*.

**) Применяется также термин *полуполное* пространство.

С другой стороны, из (3) для $\alpha \searrow \alpha_n$ имеем

$$x_\alpha - x_{\alpha_n} \in V_k.$$

Поэтому

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha_n}) + (x_{\alpha_n} - x) \in V_k + V_k \subset V_m.$$

Теорема доказана.

Большая часть конкретных пространств, введенных выше, удовлетворяет условиям теоремы, поэтому проверку их полноты можно осуществить с учетом полученного результата. Полнота пространств $\mathbf{s}$ и $\mathbf{S}$ была установлена в главе 1. В остальных примерах доказательства, ввиду их простоты, мы предоставляем читателю. Несколько слов скажем только по поводу пространства $\mathbf{s}_T^*$. На основании указанных в 1.4 и 1.5 свойств этого пространства нетрудно установить, что пространство $\mathbf{s}_T^*$ ограничено-полное. Полнота $\mathbf{s}_T^*$ также имеет место, но доказательство этого факта уже значительно труднее.

Каждое линейное топологическое пространство $\mathbf{X}$ может быть *пополнено*. Иначе говоря, существует полное линейное топологическое пространство $\hat{\mathbf{X}} \supset \mathbf{X}$ такое, что замыкание множества $\mathbf{X}$ в пространстве $\hat{\mathbf{X}}$ есть $\hat{\mathbf{X}}$, т. е. $\mathbf{X}$ плотно в $\hat{\mathbf{X}}$. Соответствующая теорема доказывается по образцу теоремы 1. (2.1) (см. также II. 2.4). Пространство $\hat{\mathbf{X}}$ называется *пополнением* пространства $\mathbf{X}$.

1.7. Важнейший факт элементарной теории линейных топологических пространств заключается в теореме Колмогорова, содержащей условия нормируемости линейного топологического пространства.

Пусть $\mathbf{X}$ — линейное множество и $V \subset \mathbf{X}$ — поглощающее выпуклое множество. Для $x \in \mathbf{X}$ положим

$$p_V(x) = \inf \lambda \quad \left(\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in V \right).$$

Лемма. Функционал p_V обладает свойствами:

- 1) $p_V(0) = 0$; $0 \leq p_V(x) < \infty \quad (x \in \mathbf{X})$;
- 2) $p_V(\alpha x) = \alpha p_V(x) \quad (\alpha > 0, x \in \mathbf{X})$;
- 3) $p_V(x + y) \leq p_V(x) + p_V(y) \quad (x, y \in \mathbf{X})$.

Доказательство. Наличие первого свойства очевидно. Второе свойство также сразу следует из определения:

$$p_V(\alpha x) = \inf \lambda = \alpha \inf \frac{\lambda}{\alpha} = \alpha p_V(x) \quad \left(\lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in V \right).$$

Переходим к третьему свойству. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдутся $\lambda, \mu > 0$ так, что

$$p_V(x) < \lambda < p_V(x) + \varepsilon, \quad p_V(y) < \mu < p_V(y) + \varepsilon; \quad \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in V.$$

На основании выпуклости множества V

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\mu} \in V,$$

т. е.

$$p_V(x+y) \leq \lambda + \mu < p_V(x) + p_V(y) + 2\varepsilon.$$

Откуда ввиду произвольности ε получаем

$$p_V(x+y) \leq p_V(x) + p_V(y).$$

З а м е ч а н и е 1. Если $x \in V$, то $p_V(x) \leq 1$; обратно, если $p_V(x) < 1$, то $x \in V$.

З а м е ч а н и е 2. Если X — линейное топологическое пространство, а V — замкнутое множество, то соотношения $p_V(x) \leq 1$ и $x \in V$ равносильны.

Действительно, пусть $p_V(x) = 1$ и $0 < \alpha < 1$. Так как $p_V(\alpha x) = \alpha < 1$, то $\alpha x \in V$. Отсюда предельным переходом при $\alpha \rightarrow 1$ получаем $x \in V$.

Аналогично доказывается, что если V — открытое множество, то оно совпадает с множеством тех $x \in X$, для которых $p_V(x) < 1$.

З а м е ч а н и е 3. Если V — уравновешенное множество, то функционал p_V однороден, т. е.

$$p_V(\alpha x) = |\alpha| p_V(x) \quad (x \in X).$$

В самом деле, достаточно рассмотреть случай $|\alpha| = 1$. Имеем

$$p_V(\alpha x) = \inf \lambda \left(\lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in V \right).$$

Так как $\frac{1}{\alpha} V \subset V$, из $\frac{\alpha x}{\lambda} \in V$ вытекает $\frac{x}{\lambda} \in V$, и, следовательно, $p_V(\alpha x) \geq p_V(x)$. Но тогда и $p_V(x) = p_V\left(\frac{1}{\alpha} \alpha x\right) \geq p_V(\alpha x)$.

Однородный функционал p_V называется *полунормой* (определяемой множеством V).

Теорема 4 (1.XI) (Колмогоров). *Для того чтобы вещественное линейное топологическое пространство X было нормируемым, т. е. чтобы топология в X могла быть определена с помощью нормы, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) X было отделимо;

2) в X существовала ограниченная выпуклая окрестность нуля V_0 .

Доказательство. В нем нуждается только достаточность условий. Можно считать, что окрестность V_0 симметричная и замкнутая (иначе мы рассмотрели бы пересечение $(-\bar{V}_0) \cap \bar{V}_0$). Для $x \in X$ положим

$$\|x\| = p_{V_0}(x). \quad (4)$$

Поскольку выпуклое симметричное множество уравновешено, к p_{V_0} применимо замечание 3 к лемме, так что функционал p_{V_0} обладает всеми свойствами нормы, кроме, может быть, одного: $\|x\| = 0$ влечет $x = 0$. Покажем, что и это свойство нормы налицо. Действительно, если $x \neq 0$, то так как X — отделимое пространство, найдется окрестность нуля V , не содержащая x . В силу ограниченности множества V_0 можно указать такое $\lambda > 0$, что $V_0 \subset \lambda V$. Тогда, очевидно, $\lambda x \notin V_0$, что на основании замечания 2 дает

$$\|x\| = p_{V_0}(x) = \frac{1}{\lambda} p_{V_0}(\lambda x) > \frac{1}{\lambda},$$

так что $\|x\| \neq 0$.

Итак, в силу определения (4) X обращается в нормированное пространство, в котором (опять на основании замечания 2) множество V будет замкнутой единичной сферой.

Докажем, что первоначальная топология в X совпадает с топологией, определяемой нормой (4). Для этого надо проверить, что множество сфер, т. е. совокупность множеств вида λV_0 ($\lambda > 0$) образует фундаментальную систему окрестностей нуля в первоначальной топологии. Это является непосредственным следствием ограниченности множества V_0 , так как для любой окрестности нуля V найдется $\lambda > 0$ так, что $\lambda V_0 \subset V$, что и требовалось доказать.

1.8. Условимся прежде всего в том, что все дальнейшее изложение относится к вещественным пространствам.

Аддитивный и однородный функционал f в линейном топологическом пространстве X называется *линейным*, если он непрерывен. Как и в случае нормированных пространств, можно доказать, что достаточно требовать непрерывности f лишь в одной какой-нибудь точке, например в нуле.

Непрерывность функционала f в нуле означает, что по каждому $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность нуля V_ε , что $f(V_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Множество $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ содержит окрестность нуля, и потому само является окрестностью нуля. Наоборот, если при некотором $\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ является окрестностью нуля, то f непрерывен. Отметим, что для непрерывности функционала f достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ множество $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ было окрестностью нуля. Действительно, так как $f^{-1}([-\varepsilon, \infty)) = -f^{-1}((-\infty, \varepsilon])$, то $f^{-1}([-\varepsilon, \infty))$ есть окрестность нуля, а тогда и пересечение $f^{-1}([-\varepsilon, \infty)) \cap f^{-1}((-\infty, \varepsilon]) = f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ также является окрестностью нуля.

Кроме линейных функционалов, в линейном топологическом пространстве можно рассматривать еще ограниченные функционалы. Функционал f (аддитивный и однородный) называется *ограниченным*, если он преобразует каждое ограниченное в X множество в ограниченное множество вещественных чисел.

Пусть f — линейный функционал и $E \subset X$ — ограниченное множество. Множество $V = f^{-1}([-1, 1])$ является окрестностью нуля, поэтому существует такое $\lambda > 0$, что $E \subset \lambda V$. Тем самым $f(E) \subset [-\lambda, \lambda]$, т. е. f — ограниченный функционал. Следует иметь в виду, что обратное предложение имеет место не во всяком пространстве.

Существование нетривиальных линейных функционалов связано с наличием в X выпуклых окрестностей.

Теорема 5 (1.XI). Пусть V — выпуклая окрестность нуля линейного топологического пространства X и $x_0 \in V$. В X существует линейный функционал f такой, что $f(x_0) = 1$ и $f(x) \leq 1$ для $x \in V$.

Доказательство. Обозначим через X_0 одномерное подпространство элементов вида λx_0 ($-\infty < \lambda < \infty$). В X_0 определим функционал f_0 , полагая $f_0(\lambda x_0) = \lambda$. Далее, построим функционал p_V . Имеем

$$f_0(x) \leq p_V(x) \quad (x \in X_0). \quad (5)$$

Действительно, если $x = \lambda x_0$ ($\lambda > 0$), то $f_0(x) = \lambda$, а вследствие положительной однородности функционала p_V будет $p_V(x) = \lambda p_V(x_0)$. Остается заметить, что $x_0 \in V$ влечет $p_V(x_0) \geq 1$. Если же $x = \lambda x_0$ ($\lambda \leq 0$), то $f_0(x) = \lambda \leq 0$ в то время как $p_V(x) \geq 0$.

На основании леммы функционал p_V удовлетворяет всем условиям теоремы Банаха о распространении аддитивных функционалов (теорема 7 (2.IV)). Поэтому в X существует аддитивный и однородный функционал f , являющийся распространением функционала f_0 , причем

$$f(x) \leq p_V(x) \quad (x \in X). \quad (6)$$

Функционал f требуемый. Действительно, $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$. Далее, если $x \in V$, то $p_V(x) \leq 1$ и в силу (6) $f(x) \leq 1$. Непрерывность функционала f следует из того, что $V \subset f^{-1}((-\infty, 1])$, так что множество $f^{-1}((-\infty, 1])$ является окрестностью нуля.

З а м е ч а н и е. Наличие выпуклой окрестности нуля $V \subset X$, не содержащей данного элемента $x_0 \in X$, является и необходимым условием существования линейного функционала f в пространстве X такого, что $f(x_0) \neq 0$.

В самом деле, если $|f(x_0)| > \varepsilon > 0$, то множество $V = f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ есть выпуклая окрестность нуля, причем $x_0 \notin V$.

С точки зрения этого замечания представляет интерес пространство S . Именно, как можно показать, единственной выпуклой окрестностью нуля в этом пространстве является само пространство. Тем самым в S , кроме нулевого, нет линейных функционалов. Предоставляем читателю убедиться также в том, что в S нет и ограниченных функционалов.

§ 2. Локально-выпуклые пространства

Как видно из теоремы 5 (1. XI) и замечания к ней, наличие и «количество» линейных функционалов в данном линейном топологическом пространстве существенным образом связаны с наличием и «количеством» выпуклых окрестностей нуля. В связи с этим обстоятельством среди линейных топологических пространств выделяется класс пространств, в которых связь алгебраических и топологических свойств более сильная, чем в произвольном линейном топологическом пространстве, благодаря чему исследование таких пространств топологическими средствами может быть продвинуто весьма далеко.

2.1. Линейное топологическое пространство X называется *локально-выпуклым*, если в нем существует фундаментальная система $\mathfrak{B}$ выпуклых окрестностей нуля. Из перечисленных в XI.1.4 примеров конкретных пространств все, за исключением пространства S , являются, очевидно, локально-выпуклыми. Что касается пространства S , то в нем, как указывалось в XI.1.8, вообще нет выпуклых окрестностей (если не считать самого пространства). Понятно, что нормированное пространство будет локально-выпуклым. Однако линейное метрическое пространство уже не обязательно будет локально-выпуклым (например, пространство S). В этом, между прочим, и заключается одна из причин того, что теория линейных метрических пространств не получила сколько-нибудь заметного развития.

Теорема 1 (1. XI) в применении к локально-выпуклым пространствам значительно упрощается. Ограничимся случаем вещественных пространств. Отмечая, что, во-первых, симметричное выпуклое множество уравновешено и, во-вторых, для выпуклого множества E имеем $\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}E = E$, находим, что условия 2) и 4) упомянутой теоремы являются в локально-выпуклом пространстве следствием остальных двух. Обратный результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1 (2. XI). Пусть в вещественном линейном множестве X выделена система $\mathfrak{B}_0$ поглощающих симметричных выпуклых множеств. Обозначим через $\mathfrak{B}$ систему множеств вида

$$\bigcap_{k=1}^n \lambda_k V_k \quad (\lambda_k > 0; V_k \in \mathfrak{B}_0; k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Тогда система $\mathfrak{B}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 (1. XI); при этом X обращается в локально-выпуклое пространство.

Справедливость теоремы вытекает из сделанных перед теоремой замечаний.

З а м е ч а н и е. Чтобы пространство X было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы для любого отличного от нуля $x \in X$ нашлись бы $V \in \mathfrak{B}_0$ и $\lambda > 0$ так, что $x \notin \lambda V$.

Система $\mathfrak{B}_0$ выпуклых симметричных окрестностей нуля такая, что множества вида (1) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, называется *производящей* системой окрестностей нуля.

2.2. Пусть в локально-выпуклом отделимом пространстве выделена производящая система $\mathfrak{B}_0 = \{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) окрестностей нуля. Сопоставив каждому $\xi \in \Xi$ полунорму, определяемую множеством V_ξ

$$\|x\|_\xi = p_{V_\xi}(x) \quad (x \in X),$$

мы получим совокупность полунорм, называемую *мультинормой*, которая обладает свойствами:

1) $0 \leq \|x\|_\xi < \infty$ ($x \in X$; $\xi \in \Xi$); если для любого $\xi \in \Xi$ будет $\|x\|_\xi = 0$, то $x = 0$;

2) $\|\alpha x\|_\xi = |\alpha| \|x\|_\xi$ ($x \in X$; $\xi \in \Xi$; α — числовой множитель);

3) $\|x + y\|_\xi \leq \|x\|_\xi + \|y\|_\xi$ ($x, y \in X$; $\xi \in \Xi$).

Обратно, если в линейном множестве X задана мультинорма, т. е. совокупность функционалов, обладающая свойствами 1) — 3), то, обозначив через V_ξ множество тех $x \in X$, для которых $\|x\|_\xi \leq 1$, мы получим систему $\mathfrak{B}_0 = \{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), удовлетворяющую условиям теоремы 1, так что X обращается в локально-выпуклое (очевидно, отделимое) пространство. В этом пространстве $\mathfrak{B}_0$ будет производящей системой окрестностей нуля и порожденная ею мультинорма будет совпадать с исходной.

Если в локально-выпуклом пространстве имеется не более чем счетная мультинорма, то X называется *счетнонормируемым*. Ясно, что счетнонормируемое пространство отделимо и имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля и, наоборот, локально-выпуклое пространство с этими двумя свойствами — счетнонормируемо.

Теорема 2 (2. XI). Для того чтобы локально-выпуклое пространство X было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было счетнонормируемым.

Доказательство. Необходимость условия ясна из замечания, сделанного перед теоремой.

Достаточность. Пусть $\|x\|_n$ ($x \in X$; $n = 1, 2, \dots$) — счетная мультинорма в X . Положим

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k} \quad (x \in X),$$

и

$$\rho(x, y) = \rho(x - y). \quad (2)$$

На основании свойств мультинормы легко проверяется, что в силу (2) X становится метрическим пространством. Докажем, что топология, определяемая метрикой (2), совпадает с первоначальной топологией пространства X . Для этого надо проверить, что система $\{W_\varepsilon\}$, где через W_ε обозначена сфера (с центром в нуле) радиуса $\varepsilon > 0$, есть фундаментальная система окрестностей нуля в исходной топологии пространства X . Обозначим через V_n множество тех $x \in X$, для которых $\|x\|_n \leq 1$. Пусть $\varepsilon > 0$; найдем столь большое n ,

что $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \varepsilon$. Множество $V = \bigcap_{k=1}^n V_k$ является окрестностью нуля. Вместе

с тем, если $x \in V$, то

$$\|x\|_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

поэтому

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$$

и, следовательно, $V \subset W_\varepsilon$, так что W_ε является окрестностью нуля. Далее, пусть $V = \bigcap_{k=1}^n \lambda_k V_k$ ($\lambda_k > 0$; $k = 1, 2, \dots, n$) — некоторая окрестность нуля. Она состоит из тех $x \in X$, для которых

$$\|x\|_k \leq \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Возьмем

$$\varepsilon < \frac{1}{2k} \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и пусть $x \in W_\varepsilon$. Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{2k} \frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k} < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

тем более

$$\frac{\|x\|_k}{1 + \|x\|_k} < \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

откуда следует

$$\|x\|_k < \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. $x \in V$ и $W_\varepsilon \subset V$.

Теорема доказана.

2.3. В терминах мультиномы многие понятия, относящиеся к локально-выпуклому пространству, приобретают простой и наглядный смысл. Так, например, сходимость обобщенной последовательности $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) к нулю означает, что при любом $\xi \in \Xi$ будет $\|x_\alpha\|_{\xi_\alpha} \xrightarrow{\alpha \in A} 0$. Ограниченность множества $E \subset X$ равносильна ограниченности при любом $\xi \in \Xi$ числовых множеств $\{\|x\|_\xi\}$ ($x \in E$) и т. д.

Остановимся несколько подробнее на понятии линейного функционала. Предположим, что производящая система $\mathfrak{B}_0 = \{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) такова, что для любых двух окрестностей V_{ξ_1} , $V_{\xi_2} \in \mathfrak{B}_0$ найдется $V_{\xi_3} \in \mathfrak{B}_0$ так, что $V_{\xi_3} \subset V_{\xi_1} \cap V_{\xi_2}$. Соответствующая мультиорма будет тогда обладать следующим свойством: для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ найдется $\xi_3 \in \Xi$ так, что

$$\|x\|_{\xi_3} \geq \max [\|x\|_{\xi_1}, \|x\|_{\xi_2}] \quad (x \in X).$$

Производящую систему, удовлетворяющую поставленному условию, а также соответствующую ей мультиорму, мы будем называть *мажорантной*. Поскольку, образуя всевозможные конечные пересечения окрестностей произвольной производящей системы, мы получим мажорантную производящую систему, можно считать, что данная система уже является мажорантной.

Пусть $\xi \in \Xi$. Обозначим через $X^{(\xi)}$ множество тех $x \in X$, для которых $\|x\|_\xi = 0$. Ясно, что $X^{(\xi)}$ — подпространство пространства X . В фактор-пространстве $X/X^{(\xi)}$, кроме естественной топологии, индуцированной топологией пространства X (см. XI.1.3), введем норму, полагая

$$\|X\| = \|x\|_\xi \quad (x \in X/X^{(\xi)}). \quad (3)$$

Это определение правомерно, так как если $x', x'' \in X$, то, поскольку $x' - x'' \in X^{(\xi)}$ означает $\|x' - x''\|_\xi = 0$, имеем $\|x'\|_\xi \leq \|x''\|_\xi + \|x' - x''\|_\xi = \|x''\|_\xi$ и аналогично $\|x''\|_\xi \leq \|x'\|_\xi$, так что $\|x'\|_\xi = \|x''\|_\xi$. Аксиомы нормированного пространства легко проверяются на основании свойств мультиномы. Построенное нормированное пространство обозначим через X_ξ . Ясно, что топология X_ξ слабее естественной топологии фактор-пространства, так как

единичная сфера пространства X_ξ есть образ окрестности V_ξ в X при естественном отображении X на X/X_ξ .

Пусть F — линейный функционал в X_ξ . В силу отмеченного соотношения между топологиями пространств X_ξ и $X/X^{(\xi)}$, функционал F будет линейным и в пространстве $X/X^{(\xi)}$. Обозначим через f функционал в X , определяемый соотношением

$$f(x) = F(X) \quad (x \in X \in X/X^{(\xi)}). \quad (4)$$

Очевидно, f — аддитивный и однородный функционал, а учитывая определение топологии в фактор-пространстве, легко убедиться, что f и непрерывен. Таким образом, каждый линейный функционал F в нормированном пространстве X_ξ индуцирует по формуле (4) линейный функционал f в пространстве X .

Покажем, что и, наоборот, каждый линейный функционал f в X может быть при некотором $\xi \in \Xi$ представлен в форме (4). В самом деле, множество $f^{-1}([-1, 1])$ есть окрестность нуля, поэтому, в силу того, что система $\mathfrak{B}_0$ мажорантная, можно найти такие $\xi \in \Xi$ и $\lambda > 0$, что $\lambda V_\xi \subset f^{-1}([-1, 1])$. Это соотношение означает, что для $x \in X$ с $\|x\|_\xi \leq \lambda$ будет $|f(x)| \leq 1$. Пусть $x \in X^{(\xi)}$, т. е. $\|x\|_\xi = 0$. При любом $\alpha > 0$ также $\|\alpha x\|_\xi = 0$, следовательно, $\alpha |f(x)| \leq 1$. Отсюда получаем $f(x) = 0$. Таким образом, функционал f принимает одинаковые значения на элементах из одного класса фактор-пространства $X/X^{(\xi)}$, т. е. f определяет функционал F в фактор-пространстве $X/X^{(\xi)}$

$$F(X) = f(x) \quad (x \in X \in X/X^{(\xi)}). \quad (5)$$

Функционал F , очевидно, аддитивен и однороден. Далее, пусть $x \in X$ такой, что $\|x\|_\xi \neq 0$. Полагая $y = \frac{\lambda x}{\|x\|_\xi}$, будем иметь $\|y\|_\xi = \lambda$, так что $|f(y)| = \frac{\lambda}{\|x\|_\xi} |f(x)| \leq 1$. Иначе говоря,

$$|f(x)| \leq N \|x\|_\xi \quad \left(N = \frac{1}{\lambda}\right). \quad (6)$$

Это неравенство верно и в случае $\|x\|_\xi = 0$, так как тогда обе его части обращаются в нуль.

Принимая во внимание (5), а также определение нормы в X_ξ , получим из (6)

$$|F(X)| \leq N \|X\| \quad (X \in X_\xi).$$

Итак, F — линейный функционал в X_ξ .

Множество E в локально-выпуклом пространстве X называется *слабо ограниченным*, если для любого линейного функционала f в X множество $f(E)$ ограничено (ср. VIII.2.2). Очевидно ограниченное множество слабо ограничено. Справедливо и обратное заключение.

Теорема 3 (2. XI). Слабо ограниченное множество E в локально-выпуклом пространстве X ограничено.

Доказательство. Используя прежние обозначения, убедимся, что в пространстве X_ξ гомоморфный образ E_ξ множества E слабо ограничен. Пусть F — линейный функционал в X_ξ . Он порождает по формуле (4) линейный функционал f в X . При этом $F(E_\xi) = f(E)$ и, следовательно, множество $F(E_\xi)$ ограничено. Тем самым множество E_ξ слабо ограничено в X_ξ ,

а так как X_ξ — нормированное пространство, то на основании следствия к теореме 1 (2. VIII) E_ξ ограничено по норме. Пусть

$$\sup_{x \in E_\xi} \|x\| = M_\xi < \infty.$$

Если $x \in E$, и $X \in X_\xi$ класс, содержащий элемент x , то, поскольку $X \in E_\xi$,

$$\|x\|_\xi = \|X\| \leq M_\xi.$$

Иначе говоря, при любом $\xi \in \Xi$ множества $\{\|x\|_\xi\}$ ($x \in E$) ограничены, что, как было отмечено выше, означает ограниченность множества E . Теорема доказана.

Отметим еще, что ввиду того, что в локально-выпуклом пространстве имеется фундаментальная система выпуклых окрестностей нуля, выпуклая оболочка $\mathcal{C}(E)$ ограниченного множества E ограничена.

2.4. Рассмотрим с точки зрения изложенного выше конкретные локально-выпуклые пространства, введенные в XI. 1.4.

Пространство s_T . Пусть Ξ означает множество всевозможных конечных наборов элементов из T . Положим

$$V_\xi = V_{t_1, t_2, \dots, t_n; 1} \quad (\xi = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Xi).$$

Система $\mathfrak{B}_0 = \{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) является мажорантной производящей системой окрестностей нуля в s_T . Мультиорма, определяемая этой системой, будет

$$\|x\|_\xi = \max_{k=1, 2, \dots, n} |x(t_k)| \quad (x \in s_T; \xi = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Xi).$$

Пространство X_ξ состоит из классов функций, принимающих в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$ одинаковые значения, которые и характеризуют данный класс. При этом

$$\|X\| = \max_{k=1, 2, \dots, n} |x(t_k)| \quad (x \in X \in X_\xi).$$

Линейный функционал F в X_ξ имеет вид

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \eta_k x(t_k) \quad (x \in X \in X_\xi). \quad (7)$$

В силу соображений, изложенных в предыдущем пункте, правая часть (7) дает линейный функционал и в s_T . Обозначим через y функцию, заданную на T следующим образом:

$$y(t) = \begin{cases} \eta_k & t = t_k \\ 0 & t \neq t_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда (7) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{t \in T} x(t) y(t). \quad (8)$$

Каждый линейный функционал f в s_T имеет вид (8), т. е. определяется (и, очевидно, однозначно) функцией $y \in s_T^*$. Таким образом, множество функционалов в s_T можно по составу элементов отождествить с s_T^* .

Пространство C_∞ . Опуская несложные рассуждения, укажем сразу, что в качестве мультиормы в пространстве C_∞ можно взять

$$\|x\|_n = \max_{|t| \leq n} |x(t)| \quad (x \in C_\infty; n = 1, 2, \dots).$$

Пространство X_n состоит из классов функций, совпадающих на промежутке $[-n, n]$, т. е. класс $X \in X_n$ взаимно однозначно связан с непрерывной функцией, заданной на $[-n, n]$; поскольку это соответствие является изоморфизмом, мы отождествим класс $X \in X_n$ с указанной функцией; при этом

$$X(t) = x(t) \quad (x \in X; |t| \leq n)$$

и

$$\|X\| = \|x\|_n = \max_{|t| \leq n} |x(t)| = \max_{|t| \leq n} |X(t)| \quad (x \in X).$$

Таким образом, пространство X_n совпадает в данном случае с пространством $C_{[-n, n]}$, которое мы коротко будем обозначать C_n . Функционал F в C_n определяется функцией ограниченной вариации g :

$$F(X) = \int_{-n}^n X(t) dg(t) = \int_{-n}^n x(t) dg(t) \quad (x \in X \in C_n). \quad (9)$$

Доопределим функцию g , считая ее постоянной в промежутках $(-\infty, -n]$ и $[n, \infty)$. Это позволяет записать (9) в виде

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dg(t) \quad (x \in X \in C_n). \quad (10)$$

Придавая n значения $1, 2, \dots$, мы получим из (10) общую форму линейного функционала в C_{∞}

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dg(t). \quad (11)$$

Таким образом, линейный функционал f определяется по формуле (11) функцией ограниченной вариации g , постоянной на промежутках $(-\infty, a]$ и $[b, \infty)$, где a и b — некоторые числа. При этом значения функции g в ее точках непрерывности определяются единственным образом. Наоборот, всякой функции ограниченной вариации указанного вида соответствует функционал в C_{∞} .

В пространстве $D_{[a, b]}^{\circ}$ мультиорма может быть определена, например, так

$$\|x\|_n = \max_{\substack{t \in [a, b] \\ k=0, 1, \dots, n}} |x^{(k)}(t)| \quad (x \in D_{[a, b]}^{\circ}; n = 0, 1, \dots).$$

Пространства X_n по составу элементов совпадают с $D_{[a, b]}^{\circ}$. Норму элемента x в X_n есть $\|x\|_n$.

Пусть $x \in X_n$. Имеем

$$|x(t)| = \left| \int_a^t x'(s) ds \right| \leq (b-a) \max_{s \in [a, b]} |x'(s)|,$$

так что

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq (b-a) \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|.$$

Применяя последовательно это неравенство, получим

$$A_n \|x\|_n \leq \max_{t \in [a, b]} |x^{(n)}(t)| \leq \|x\|_n, \quad (12)$$

где A_n — некоторая постоянная, не зависящая от x . Введем в X_n новую норму, полагая

$$\|x\|' = \max_{t \in [a, b]} |x^{(n)}(t)|.$$

Неравенство (12) показывает, что новая и старая нормы эквивалентны. Вместе с тем, сопоставляя элементу $x \in X_n$ его n -ю производную $x^{(n)}$, мы получим изометрическое отображение пространства X_n (с новой нормой) на некоторое множество в $C_{[a, b]}$. Поэтому любой линейный функционал F в X_n будет иметь вид

$$F(x) = \int_a^b x^{(n)}(t) dg(t) \quad (x \in X_n),$$

где g — функция ограниченной вариации.*)

Принимая последовательно $n = 0, 1, \dots$, придем к общей форме линейного функционала в $D_{[a, b]}^\circ$

$$f(x) = \int_a^b x^{(n)}(t) dg(t) \quad (x \in D_{[a, b]}^\circ). \quad (13)$$

Здесь g — функция ограниченной вариации в $[a, b]$, а n принимает одно из значений $0, 1, \dots$

Функционалы в $D_{[a, b]}^\circ$ называются *обобщенными функциями* (в промежутке $[a, b]$). Этот термин может быть оправдан следующим образом. Пусть φ — суммируемая на $[a, b]$ функция. Функционал f_φ

$$f_\varphi(x) = \int_a^b x(t) \varphi(t) dt \quad (x \in D_{[a, b]}^\circ) \quad (14)$$

есть линейный функционал в $D_{[a, b]}^\circ$, так как он получается из (13) при $n = 0$

и $g(t) = \int_a^t \varphi(s) ds$. Ясно, что соответствие между суммируемыми функциями

и функционалами типа (14) есть алгебраический изоморфизм, что и дает основание для отождествления этих объектов.

Допустим, что функция φ имеет суммируемую производную. Интегрируя по частям, имеем

$$f_{\varphi'}(x) = \int_a^b x(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b x'(t) \varphi(t) dt = -f_\varphi(x') \quad (x \in D_{[a, b]}^\circ).$$

Полагая для произвольной обобщенной функции f

$$f'(x) = -f(x'),$$

*) Вследствие того, что $x^{(n)}(a) = x^{(n)}(b) = 0$, можно добиться, что g будет непрерывна на концах промежутка $[a, b]$. При этом условии g однозначно с точностью до значений во внутренних точках разрыва определяется функционалом f .

мы без труда убедимся, что функционал f' — производная обобщенной функции f — сам является обобщенной функцией.

Так, например, функции Хевисайда Y ($a = -1$, $b = 1$)

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

соответствует функционал, за которым мы сохраним то же обозначение Y :

$$Y(x) = \int_{-1}^1 x(t) Y(t) dt = \int_0^1 x(t) dt \quad (x \in D_{[-1, 1]}^{\circ}).$$

Обозначая $\delta = Y'$, будем иметь

$$\delta(x) = -Y(x') = -\int_0^1 x'(t) dt = x(0) - x(1) = x(0) \quad (x \in D_{[-1, 1]}^{\circ}).$$

Обобщенная функция δ называется *функцией Дирака*.

Дальнейшие свойства обобщенных функций будут указаны в § 4.

Не останавливаясь на пространстве L_{∞} , скажем лишь несколько слов о функционалах в пространстве s_T^* . Пусть f — аддитивный и однородный функционал в s_T^* . Множество $f^{-1}([-1, 1])$, очевидно, выпуклое и поглощающее и поэтому является окрестностью нуля в s_T^* . Таким образом, f — линейный функционал. Обозначая через x_t функцию

$$x_t(s) = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

и полагая $y(t) = f(x_t)$ ($t \in T$), мы получим для произвольного $x \in s_T^*$

$$f(x) = \sum x(t) y(t),$$

где суммирование распространяется на те значения t , для которых $x(t) \neq 0$ т. е. по составу элементов множество функционалов в s_T^* можно отождествить с s_T .

2.5. Скажем несколько слов о линейных операциях в локально-выпуклых пространствах. Аддитивная и однородная операция U , отображающая локально-выпуклое пространство X в локально-выпуклое пространство Y , называется *линейной*, если она непрерывна. При этом, как всегда, достаточно потребовать непрерывность в какой-нибудь одной точке. Операция U (аддитивная и однородная) называется *ограниченной*, если образы ограниченных множеств ограничены. Легко проверить, что линейная операция ограничена. Обратное не всегда имеет место.

Пусть в пространствах X и Y имеются мажорантные мультинормы: $\|x\|_{\xi}$ ($x \in X$; $\xi \in \Xi$) и $\|y\|_{\eta}$ ($y \in Y$, $\eta \in \mathbb{H}$). Повторяя рассуждения, проведенные в 2.3 для функционалов, мы без труда придем к следующему результату: для того чтобы аддитивная и однородная операция U была линейной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\eta \in \mathbb{H}$ нашлись бы $\xi_{\eta} \in \Xi$ и число $N_{\eta} > 0$ так, что

$$\|U(x)\|_{\eta} \leq N_{\eta} \|x\|_{\xi_{\eta}} \quad (x \in X).$$

2.6. В локально-выпуклых пространствах имеет место теорема Хана — Банаха о распространении линейных функционалов.

Рассмотрим локально-выпуклое пространство X и линейное множество X_0 в нем. Пространство X индуцирует в X_0 топологию, в силу которой X_0 становится, как легко проверить, локально-выпуклым пространством.

Теорема 4 (2. XI). Пусть f_0 — линейный функционал в X_0 . Существует линейный функционал f в пространстве X , являющийся распространением функционала f_0 .

Доказательство. Множество $V_0 = f_0^{-1}((-\infty, 1])$ является окрестностью нуля в X_0 . Поэтому найдется окрестность нуля V' в пространстве X такая, что $V_0 = V' \cap X_0$. Обозначим через V выпуклую окрестность нуля в X , содержащуюся в V' . Образует функционал p_V . Так как $V \cap X_0 \subset V_0$, то обычными рассуждениями получаем неравенство

$$f_0(x) \leq p_V(x) \quad (x \in X_0).$$

Применяя теорему Банаха о распространении аддитивных функционалов (теорема 7 (2. IV)), получаем функционал f в X — распространение функционала f_0 , для которого

$$f(x) \leq p_V(x) \quad (x \in X).$$

Отсюда $V \subset f^{-1}((-\infty, 1])$, так что f — непрерывный функционал.

Теорема 5 (1. XI) может быть существенным образом усилена, если рассматривать локально-выпуклые пространства.

Теорема 5 (2. XI). Пусть C — выпуклое замкнутое множество в локально-выпуклом пространстве X , причем $0 \in C$. Если $x_0 \notin C$, то существует линейный функционал f в X такой, что

$$f(x_0) > 1; \quad f(x) \leq 1 \quad (x \in C).$$

Доказательство. Поскольку C замкнуто и $x_0 \notin C$, существует окрестность $x_0 + V_0$ точки x_0 , не пересекающаяся с C . Здесь V_0 — окрестность нуля, которую можно считать выпуклой. Образует множество $V = C + \frac{1}{2} V_0$.

Это выпуклая окрестность нуля, причем пересечение $V \cap (x_0 + \frac{1}{2} V_0)$ пусто.

Найдем $\varepsilon > 0$ столь малое, чтобы $x'_0 = (1 - \varepsilon)x_0 \in x_0 + \frac{1}{2} V_0$. Применяя теорему 5 (1. XI) к окрестности V и точке x'_0 , построим линейный функционал f в X такой, что

$$f(x'_0) = 1; \quad f(x) \leq 1 \quad (x \in V).$$

Имеем $f(x_0) = \frac{1}{1 - \varepsilon} > 1$, а так как $C \subset V$, то $f(x) \leq 1$ для $x \in C$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В условиях теоремы можно и не предполагать, что $0 \in C$. При этом заключение теоремы должно быть заменено следующим: существует число a и линейный функционал f такие, что

$$f(x_0) > a, \quad f(x) \leq a \quad (x \in C).$$

Указанный результат получается, если применить теорему к множеству $-x' + C$ и точке $-x' + x_0$, где x' — какая-нибудь точка множества C .

2.7. Пусть X — локально-выпуклое пространство. Обозначим через $\mathfrak{B}$ систему всех ограниченных множеств в X . Хотя, разумеется, система $\mathfrak{B}$ зависит от топологии пространства X , но, вообще говоря, не определяет ее однозначно. Действительно, введем в X слабую топологию, взяв в качестве производящей

системы окрестностей нуля совокупность всевозможных множеств вида $f^{-1}([-1, 1])$, где f — линейный функционал в X . Эта система, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1, так что X обращается при этом в локально-выпуклое пространство, которое мы будем обозначать X_0 . Ясно, что ограниченность множества E в пространстве X_0 означает слабую его ограниченность и, следовательно, на основании теоремы 3 ограниченность в пространстве X . Верно, конечно, и обратное: множество, ограниченное в X , будет и слабо ограничено, т. е. ограничено в X_0 . Таким образом, запас ограниченных множеств в пространствах X и X_0 один и тот же. Между тем пространства X и X_0 , вообще говоря, различны. Так, например, будет, если X бесконечномерное нормированное пространство. В этом случае в X_0 нет ограниченных окрестностей, так что X_0 ненормируемо.

Пространство X называется *борнологическим*, если в X нельзя ввести более сильную локально-выпуклую топологию с тем же, что и в X , запасом ограниченных множеств. Пространство X будет борнологическим тогда и только тогда, когда каждое выпуклое множество, поглощающее любое ограниченное множество, является окрестностью нуля. В самом деле, если V — множество указанного типа, не являющееся окрестностью нуля, то, добавляя пересечение $V \cap (-V)$ к производящей системе $\mathfrak{B}_0$ окрестностей нуля, мы получим в X более сильную топологию, не изменив, однако, системы $\mathfrak{B}$. Обратно, если X не борнологическое пространство, то в X можно ввести более сильную локально-выпуклую топологию с тем же запасом ограниченных множеств. Иначе говоря, можно указать такое выпуклое множество V , поглощающее каждое ограниченное множество, что V не является окрестностью нуля в исходной топологии.

Пусть X — локально-выпуклое пространство. Обозначим через X_b локально-выпуклое пространство, состоящее из тех же элементов, что и X ; топология в X_b определяется фундаментальной системой $\mathfrak{B}_b$ окрестностей нуля, в которую мы включим все выпуклые множества, поглощающие любое ограниченное множество в X . Ясно, что X_b — борнологическое пространство, причем ограниченные множества в X и в X_b одни и те же.

Теорема 6 (2. XI). *Всякое счетнонормируемое пространство X — борнологическое.*

Доказательство. Пусть $\{V_n\}$ — производящая система окрестностей нуля в X . Можно считать, что $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$. Это влечет следующее соотношение для соответствующих полуноrm

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_n \leq \dots \quad (x \in X). \quad (15)$$

Пусть V — выпуклое множество, поглощающее каждое ограниченное множество в X . Образует функционал p_V . Указанное свойство множества V в терминах функционала p_V выглядит следующим образом: если E — ограниченное множество, то

$$\sup_{x \in E} p_V(x) < \infty. \quad (16)$$

Предположим, что V не является окрестностью нуля. Это означает, что при любых $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ множество V не содержит множества λV_n , т. е. существует $x_{n,\lambda} \in \lambda V_n \setminus V$, или иначе, в терминах мультиномов

$$\|x_{n,\lambda}\|_n \leq \lambda; \quad p_V(x_{n,\lambda}) \geq 1.$$

Беря $x_n = nx_{n, \frac{1}{n}}$ ($n = 1, 2, \dots$) и обозначая $E = \{x_n\}$, будем в силу (15) иметь для $n \geq m$

$$\|x_n\|_m \leq \|x_n\|_n = n \left\| x_{n, \frac{1}{n}} \right\|_n \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

так что множество E ограничено (см. 2.3). Вместе с тем

$$p_V(x_n) = np_V\left(x, \frac{1}{n}\right) \geq n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что противоречит (16).

Среди конкретных пространств, рассмотренных в XI.1.4, только s_T и s_T^* не счетнонормируемы. Пространство s_T^* очевидно борнологическое, так как в нем всякое выпуклое поглощающее множество есть окрестность нуля. Что же касается пространства s_T , то здесь вопрос о борнологичности в общем случае открыт.

2.8. Борнологические пространства характеризуются тем, что в них совпадают понятия ограниченной и линейной операции.

Теорема 7 (2. XI). Пусть X — локально-выпуклое пространство. Для того, чтобы каждая ограниченная операция, отображающая X в локально-выпуклое пространство, была линейной, необходимо и достаточно, чтобы X было борнологическим.

Доказательство. Достаточность. Пусть X — борнологическое пространство и U — ограниченная операция, отображающая X в локально-выпуклое пространство Y . Рассмотрим произвольную выпуклую окрестность нуля W в пространстве Y и обозначим $V = U^{-1}(W)$. Докажем, что V поглощает каждое ограниченное множество в X . Действительно, пусть E такое множество. Его образ $G = U(E)$ будет множеством ограниченным в Y и потому найдется $\lambda > 0$ такое, что $\lambda W \supset G$. Отсюда $E \subset U^{-1}(G) \subset \subset \lambda U^{-1}(W) = \lambda V$. Учтя, что V — выпуклое множество, мы на основании борнологичности пространства X можем утверждать, что V есть окрестность нуля в пространстве X и, следовательно, U — линейная операция.

Необходимость. Обозначим через Y пространство X_b . Пусть U — операция, сопоставляющая элементу $x \in X$ этот же элемент, но рассматриваемый в пространстве Y . Поскольку ограниченные множества в X и в Y одни и те же, U — ограниченная операция и, следовательно, непрерывная, т. е. топология в Y слабее топологии в X . Вместе с тем топология пространства Y сильнейшая среди локально-выпуклых топологий с данной системой $\mathfrak{B}$ ограниченных множеств. Сопоставляя эти два факта, приходим к равенству $X = Y$, откуда и заключаем, что X — борнологическое пространство.

Из доказанной теоремы вытекает следующий важный результат.

Теорема 8 (2. XI). Пусть U — аддитивная и однородная операция, отображающая борнологическое пространство X в локально-выпуклое пространство Y . Если U счетно-непрерывна, т. е. если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ такой, что $x_n \rightarrow 0$, будет $U(x_n) \rightarrow 0$, то U — линейная операция.

Доказательство. Докажем, что счетно-непрерывная операция U ограничена. Пусть E — ограниченное множество в X . Обозначим $G = U(E)$. Для проверки ограниченности множества G воспользуемся теоремой 2 (1. XI). Возьмем $\{y_n\} \subset G$ и числовую последовательность $\{\lambda_n\} (\lambda_n \rightarrow 0)$. Пусть $u_n = U(x_n)$ ($x_n \in E$; $n = 1, 2, \dots$). Так как $\lambda_n x_n \rightarrow 0$, то вследствие счетной непрерывности операции U будет $\lambda_n u_n = U(\lambda_n x_n) \rightarrow 0$, и ограниченность G доказана. Остается воспользоваться теоремой 7.

§ 3. Двойственность

В этом параграфе рассматриваются соотношения между данным локально-выпуклым пространством и пространством линейных функционалов в нем. Как и раньше, все рассматриваемые пространства предполагаются вещественными и отделимыми.

3.1. Пусть X — линейное множество. Обозначим через X° множество всех аддитивных и однородных функционалов в X . Множество X° мы будем считать линейризованным естественным образом. Рассмотрим тотальное *) линейное множество $X' \subset X^\circ$. В X введем топологию, образуя производящую систему окрестностей нуля из всевозможных множеств вида $f^{-1}([-1, 1])$ ($f \in X'$). Ясно, что условия теоремы 1 (2. XI) будут при этом удовлетворены. Определенную таким образом топологию мы будем обозначать $\sigma(X, X')$ и называть *слабой топологией* (наведенной множеством X'), а локально-выпуклое (очевидно, отделимое) пространство, в которое обращается X , обозначим через $[X, \sigma(X, X')]$ или, короче, через $[X, \sigma]$. **)

Каждый элемент $x \in X$ можно рассматривать как аддитивный и однородный функционал в X' :

$$x(f) = f(x) \quad (f \in X').$$

При этом ясно, что множество такого рода функционалов ' тотально в X' . Таким образом, X играет по отношению к X' такую же роль, какую играет X' по отношению к X . Локально-выпуклое пространство $[X', \sigma(X', X)]$ называется *двойственным* к пространству $[X, \sigma(X, X')]$.

Важнейший факт теории двойственности содержится в следующей теореме.

Теорема 1 (3. XI). *Множество всех линейных функционалов в пространстве $[X, \sigma]$ совпадает с X' .*

Доказательство. По самому способу определения слабой топологии $\sigma(X, X')$ ясно, что каждый функционал $f \in X'$ есть линейный функционал в пространстве $[X, \sigma]$.

Пусть, наоборот, f — линейный функционал в пространстве $[X, \sigma]$. Множество $V = f^{-1}([-1, 1])$ является окрестностью нуля в $[X, \sigma]$. Это означает, что существуют функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n \in X'$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ такие, что

$$V \supset \bigcap_{k=1}^n \lambda_k V_k \quad (V_k = f_k^{-1}([-1, 1]); k = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

При этом можно считать, что функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы. Действительно, если один из функционалов, например f_n , есть линейная комбинация остальных

$$f_n = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_{kj} \quad (\alpha_j \neq 0, k_j \neq n; j = 1, 2, \dots, m),$$

то

$$V_n \supset \bigcap_{j=1}^m \frac{1}{|\alpha_j| m} V_{kj}$$

и, следовательно, в пересечении (1) можно обойтись без V_n .

В соответствии с теоремой 3 (1. V) найдем элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ так, чтобы

$$f_i(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

*) Т. е. такое, что из $f(x) = 0$ для всех $f \in X'$ вытекает $x = 0$.

**) Усложнение обозначений вызвано тем обстоятельством, что в этом параграфе одно и то же множество X будет снабжаться различными топологиями, так что использование только одной буквы X для обозначения различных топологических пространств, неизбежно привело бы к путанице.

Для каждого элемента $x \in X$ имеем представление

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k + x', \quad (2)$$

где

$$\alpha_k = f_k(x), \quad f_k(x') = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Применяя к обеим частям (2) функционал f , получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x) + f(x') \quad (\beta_k = f(x_k); \quad k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Докажем, что $f(x') = 0$. Если бы оказалось $f(x') \neq 0$, то для достаточно большого $\alpha > 0$ было бы $|f(\alpha x')| > 1$, т. е. $\alpha x' \notin V$ и, следовательно, ввиду (1) хотя бы при одном k было бы $\alpha x' \notin \lambda_k V_k$, что противоречит соотношению (3).

Итак, (4) дает $f = \sum_{k=1}^n \beta_k f_k$. Поскольку $f_k \in X'$ ($k = 1, 2, \dots, n$), отсюда вытекает $f \in X'$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы следует, что если в X' выделено тотальное линейное множество $\bar{X}$, отличное от всего X' , то топология $\sigma(X, \bar{X})$ существенно слабее топологии $\sigma(X, X')$. В этом смысле слабая топология $\sigma(X, X')$ определяет множество X' однозначно.

3.2. Связь между множествами в X и множествами в X' осуществляется с помощью следующей конструкции.

Пусть $E \subset X$. Обозначим через $\pi(E)$ множество, состоящее из всех таких функционалов $f \in X'$, для которых $f(E) \subset [-1, 1]$. Множество $\pi(E)$ называется *полярной* множества E . Поскольку множества X и X' равноправны, можно говорить о поляре $\pi(E')$ множества $E' \subset X'$, понимая под этим совокупность всех таких $x \in X$, для которых $|f(x)| \leq 1$ ($f \in E'$).

Пусть $E' \subset X'$; поляр $\pi(E')$ является, очевидно, выпуклым симметричным множеством в X . Докажем, что $\pi(E')$ замкнуто в пространстве $[X, \sigma]$. Действительно, если $x_0 \in \pi(E')$, то существует $f_0 \in E'$ так, что $|f_0(x_0)| > 1$. Множество $V = f_0^{-1}([- \eta, \eta])$, где $\eta < |f_0(x_0)| - 1$, является окрестностью нуля в пространстве $[X, \sigma]$. При этом пересечение $(x_0 + V) \cap \pi(E')$ пусто, так как для $x = x_0 + x'$ ($x' \in V$) имеем

$$|f_0(x)| \geq |f_0(x_0)| - |f_0(x')| \geq |f_0(x_0)| - \eta > 1.$$

Теорема 2 (3.XI). Для того чтобы множество $E \subset X$ было полярной некоторого множества $E' \subset X'$, необходимо и достаточно, чтобы E было выпуклым симметричным и замкнутым в $[X, \sigma]$ множеством.

Доказательство. Необходимость условий была только что доказана.

Достаточность. Положим $E' = \pi(E)$. Ясно, что $E \subset \pi(E')$. Пусть $x_0 \notin E$. На основании теоремы 5 (2.XI) найдется линейный функционал f в пространстве $[X, \sigma]$ такой, что $f(E) \subset (-\infty, 1]$ и

$$f(x_0) > 1. \quad (5)$$

В силу теоремы 1 $f \in X'$. Далее, поскольку E — симметричное множество, $f(E) \subset [-1, 1]$. В самом деле, если для некоторого $x \in E$ оказалось бы $f(x) < -1$, то $f(-x) > 1$, что невозможно, так как $-x \in E$.

Итак, $f \in E'$, а тогда из (5) следует $x_0 \notin \pi(E')$. Таким образом, $E \supset \pi(E')$, и теорема доказана.

Следствие. Каково бы ни было $E \subset X$, множество $\pi^2(E) = \pi(\pi(E))$ есть наименьшее выпуклое симметричное замкнутое в $[X, \sigma]$ множество, содержащее E .

Укажем еще на некоторые простые свойства поляр.

I. Если $E_1 \subset E_2$, то $\pi(E_1) \supset \pi(E_2)$.

II. $\pi(\lambda E) = \frac{1}{\lambda} \pi(E) \quad (\lambda \neq 0)$.

III. $\pi\left(\bigcup_{\xi \in \Sigma} E_\xi\right) = \bigcap_{\xi \in \Sigma} \pi(E_\xi)$.

IV. Если E — линейное множество в X , то $\pi(E)$ совпадает с множеством функционалов $f \in X'$, обращающихся на E в нуль.

Проверим, например, IV. Если бы для некоторого $f \in \pi(E)$ имелся элемент $x \in E$ такой, что $f(x) \neq 0$, то можно было бы взять $\alpha > 0$ так, чтобы $|f(\alpha x)| > 1$. Между тем, поскольку $\alpha x \in E$, должно быть $|f(\alpha x)| \leq 1$.

З а м е ч а н и е. Ввиду полного равноправия пространств $[X, \sigma]$ и $[X', \sigma]$ все сказанное в этом пункте по поводу множеств в X справедливо по отношению к множествам в X' , и наоборот. Это замечание относится и к дальнейшему изложению.

3.3. Свойства множества E определяют свойства поляры $\pi(E)$.

Теорема 3 (3.XI). Для того чтобы поляр $\pi(E)$ множества $E \subset X$ была поглощающим множеством в X' , необходимо и достаточно, чтобы E было ограничено в пространстве $[X, \sigma]$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим окрестность нуля V в пространстве $[X, \sigma]$. Можно считать, что $V = f^{-1}([-1, 1])$ ($f \in X'$). Множество V является поляркой к множеству, состоящему из одного функционала f , т. е. $V = \pi(f)$. Так как $\pi(E)$ — поглощающее множество, то для достаточно малого $\lambda > 0$ будет $\lambda f \in \pi(E)$, откуда, переходя к поляркам, находим

$$\frac{1}{\lambda} V = \frac{1}{\lambda} \pi(f) = \pi(\lambda f) \supset \pi^2(E).$$

Это соотношение показывает, что $\pi^2(E)$ — ограниченное множество, тем более ограниченное множество $E \subset \pi^2(E)$.

Достаточность. Пусть $f \in X'$. Рассмотрим окрестность $V = f^{-1}([-1, 1])$. Если $E \subset X$ — ограниченное множество, то существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda E \subset V$. Переходя к поляркам, будем иметь

$$\frac{1}{\lambda} \pi(E) = \pi(\lambda E) \supset \pi(V).$$

Но $f \in \pi(V)$, так что $\lambda f \in \pi(E)$. Тем самым доказано, что $\pi(E)$ поглощающее множество.

3.4. Пусть X — локально-выпуклое пространство. Топологию пространства X обозначим через τ . Через X' обозначим совокупность всех линейных функционалов в пространстве X . Поскольку слабая топология $\sigma(X, X')$ слабее топологии τ , каждое слабо замкнутое множество, т. е. множество, замкнутое в пространстве $[X, \sigma]$, будет замкнутым и в пространстве X . Обратное, вообще говоря, не имеет места. Однако справедлива

Теорема 4 (3. XI). Выпуклое замкнутое в пространстве X множество C слабо замкнуто.

Доказательство. Можно считать, что $0 \in C$. Пусть $x_0 \in \bar{C}$. На основании теоремы 5 (2. XI) существует такой функционал $f \in X'$, что $f(C) \subset (-\infty, 1]$ и $f(x_0) > 1$. Беря $\eta < f(x_0) - 1$ и обозначая $V = f^{-1}([- \eta, \eta])$, будем иметь для $x \in x_0 + V$

$$f(x) \in f(x_0) + f(V) = [f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta].$$

Поскольку $f(x_0) - \eta > 1$, множество C не имеет общих элементов с множеством $x_0 + V$, которое является окрестностью точки x_0 в пространстве $[X, \sigma]$.

З а м е ч а н и е. Учитывая, что слабая ограниченность (см. XI.2.3) множества $E \subset X$ означает ограниченность этого множества в пространстве $[X, \sigma]$, можно сформулировать теорему 3 (2. XI) таким образом: ограниченные множества в пространствах X и $[X, \sigma]$ одни и те же.

Рассмотрим вопрос о топологизации множества X' . Аппарат поляр связывает множества в X' с множествами в X , вследствие чего представляется целесообразным использовать этот аппарат для указанной цели. Именно, производящую систему окрестностей в X' мы будем задавать как совокупность поляр к некоторым множествам из X . Для того чтобы построенная система удовлетворяла условиям теоремы 1 (2. XI), надо, учитывая результат теоремы 3, потребовать ограниченности указанных множеств из X . Точнее говоря, рассмотрим в X произвольную совокупность $\mathfrak{B}_0$, ограниченных в X , или, что то же самое, в $[X, \sigma]$ множеств. Обозначим через $\pi(\mathfrak{B}_0)$ совокупность поляр к множествам из $\mathfrak{B}_0$. Система $\pi(\mathfrak{B}_0)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 (2. XI), ввиду чего X' становится локально-выпуклым пространством. Введенную в X' топологию мы будем обозначать $\tau'(\mathfrak{B}_0)$.

Чтобы пространство $[X', \tau'(\mathfrak{B}_0)]$ было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы множество B — объединение всех множеств, входящих в систему $\mathfrak{B}_0$ — было фундаментальным (см. IV.2.4), т. е. таким, что если линейный функционал f обращается в нуль на B , то $f = 0$. Действительно, если существует линейный функционал $f_0 \neq 0$ такой, что $f_0(x) = 0$ для каждого $x \in B$, то f_0 тем более обращается в нуль на каждом из множеств $E \in \mathfrak{B}_0$. Поэтому $f_0 \in \lambda\pi(E)$ при любом $\lambda \neq 0$. Следовательно, пространство $[X', \tau'(\mathfrak{B}_0)]$ неотделимо. Наоборот, если условие выполнено, то какой бы функционал $f \neq 0$ ни взять, найдется $E_0 \in \mathfrak{B}_0$ и точка $x_0 \in E_0$ так, что $|f(x_0)| = \lambda_0 > 0$. Тем самым при $0 < \lambda < \lambda_0$ будет $f \notin \lambda\pi(E_0)$, и отделимость пространства $[X', \tau'(\mathfrak{B}_0)]$ установлена.

Впредь, говоря о топологии в X' , мы всегда будем предполагать, что условие отделимости выполнено.

Из всего мыслимого многообразия топологий в X' укажем пока что на две, в известном смысле крайние. Во-первых, в качестве $\mathfrak{B}_0$ можно взять всевозможные одноточечные множества. При этом $\tau'(\mathfrak{B}_0) = \sigma(X', X)$, т. е. получается слабая топология. Во-вторых, можно за $\mathfrak{B}_0$ принять систему $\mathfrak{B}$ всех ограниченных множеств. Топология $\tau'(\mathfrak{B})$ называется *сильной*. Пространство $[X', \tau'(\mathfrak{B})]$ обозначается просто X^* и называется *сопряженным* к пространству X . Иногда для обозначения топологии пространства X^* мы будем использовать символ $\tau^*(X', X)$ или, просто, τ^* .

Отметим еще, что система $\pi(\mathfrak{B})$ будет не только производящей, но и фундаментальной системой окрестностей нуля в пространстве X^* .

В случае, если X — нормированное пространство, топология в пространстве X^* совпадает с той, которая определяется обычным в этом случае образом с помощью нормы

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \quad (f \in X').$$

Пусть $G \subset X'$ и V окрестность нуля в пространстве X . Соотношение $G \subset \pi(V)$ означает, что $V \subset f^{-1}([-1, 1])$ для любого $f \in G$. Иначе говоря, для «проверки» непрерывности всех функционалов из G можно использовать одну и ту же окрестность. В связи с отмеченным обстоятельством множество, содержащееся в поляре к некоторой окрестности нуля в пространстве X , называется *эквинепрерывным*.

Эквинепрерывное множество G ограничено в пространстве X^* . Действительно, если $G \subset \pi(V)$ и $V^* = \pi(E)$ (E — ограничено в X) какая-нибудь

окрестность нуля в пространстве X^* , то из соотношения $V \supset \lambda E$, которое выполнено при некотором $\lambda > 0$, переходя к полярам, получаем

$$\pi(V) \subset \frac{1}{\lambda} \pi(E),$$

т. е. $\pi(V)$ и, тем более, G ограничены в X^* .

Множество, ограниченное в X^* , может и не быть эквинепрерывным.*) Однако если X — борнологическое пространство, то каждое ограниченное в X^* множество G будет эквинепрерывным. В самом деле, множество $\pi(G)$ будет, как нетрудно проверить, проводя обычные рассуждения, поглощать всякое ограниченное в X множество. Так как $\pi(G)$, кроме того, выпуклое, то оно является окрестностью нуля в пространстве X . Обозначая $V = \pi(G)$, имеем $G \subset \pi(V)$.

3.5. Другой важный класс пространств, для которых имеет место совпадение эквинепрерывных и ограниченных в сопряженном пространстве множеств, составляют так называемые тоннельные пространства.

Локально-выпуклое пространство называется *тоннельным* (коротко: *t-пространством*), если в нем каждая *квази-окрестность* нуля, т. е. замкнутое выпуклое поглощающее множество, является окрестностью нуля.

Для тоннельных пространств справедлива теорема, которая как весьма частный случай содержит упоминавшуюся эквивалентность эквинепрерывности и ограниченности. Рассмотрим локально-выпуклые пространства X и Y и систему $\mathcal{U} = \{U_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) линейных операций, отображающих X в Y . Система $\mathcal{U}$ называется *точечно ограниченной*, если при любом $x \in X$ множество $\mathcal{U}(x) = \{U_\xi(x)\}$ ($\xi \in \Xi$) ограничено в Y . Система $\mathcal{U}$ называется *эквинепрерывной*, если для любой окрестности нуля W в пространстве Y можно найти окрестность нуля V в пространстве X так, что для всех $\xi \in \Xi$

$$U_\xi(V) \subset W.$$

Теорема 5 (3.XI). Если X — тоннельное пространство, то точечно ограниченная система $\mathcal{U}$ эквинепрерывна.

Доказательство. Рассмотрим произвольную выпуклую замкнутую окрестность нуля W в пространстве Y . Обозначим $V_\xi = U_\xi^{-1}(W)$ и $V = \bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$. Чтобы убедиться, что V — квази-окрестность, надо проверить

только, что V — поглощающее множество. Пусть $x \in X$. Множество $\mathcal{U}(x)$ ограничено, следовательно, найдется $\lambda > 0$, так, что $\mathcal{U}(\lambda x) = \lambda \mathcal{U}(x) \subset W$. Тем самым $\lambda x \in U_\xi^{-1}(W) \subset V_\xi$ при любом $\xi \in \Xi$. Отсюда $\lambda x \in V$. Итак, V — квази-окрестность, а, значит, и окрестность нуля. Из самого определения V ясно, что $U_\xi(V) \subset W$ ($\xi \in \Xi$).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\mathcal{U} = G$ есть множество функционалов, то точечная ограниченность множества G означает его ограниченность в пространстве $[X', \sigma(X', X)]$, т. е. слабую его ограниченность. Так как, очевидно, топология $\tau^*(X', X)$ сильнее топологии $\sigma(X', X)$, то каждое ограниченное в X^* множество по-прежнему слабо ограничено и, следовательно, на основании доказанной теоремы, для тоннельного пространства X понятия слабо ограниченного, ограниченного в X^* и эквинепрерывного множества совпадают.

*) Например, пусть X_0 — нормированное бесконечномерное пространство. Положим $X = [X_0, \sigma(X_0, X_0^*)]$. Эквинепрерывное множество в X^* необходимо конечномерно. Между тем, поскольку $X = X_0^*$, ограниченными в X^* будут и некоторые бесконечномерные множества.

Следует иметь в виду, что ограниченность в X^* слабо ограниченного множества отнюдь не тривиальна, как это может показаться на первый взгляд (ср. теорему 3.(2.XI)). Дело в том, что в упомянутой теореме установлена ограниченность в X^* множества, ограниченного в пространстве $[X^*, \sigma(X^*, X')]$. Поскольку среди линейных функционалов в X^* могут быть и такие, которые нельзя отождествить с элементами из X , топология $\sigma(X^*, X')$ сильнее топологии $\sigma(X^*, X)$ существенным образом.

Рассмотрим в связи с этим следующий простой пример. Обозначим через I_0 множество всевозможных числовых последовательностей, у которых только конечное число элементов отлично от нуля. Множество I_0 становится нормированным пространством, если для $x \in I_0$ положить

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \quad (x = \{\xi_k\}).$$

Поскольку пополнение I_0 есть пространство l , то $I_0^* = l^* = m$ (см. VI.1.2).

Обозначим $f_k = \{\eta_n^{(k)}\}$, где

$$\eta_n^{(k)} = \begin{cases} k & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (n, k = 1, 2, \dots).$$

Для любого $x = \{\xi_n\} \in I_0$ имеем

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n^{(k)} = k \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Так как при достаточно большом k будет $\xi_k = 0$, то последовательность $\{f_k(x)\}$ ограничена, между тем $\|f_k\| = k$ и в пространстве I_0^* последовательность $\{f_k\}$ не ограничена.

Из сказанного, между прочим, вытекает, что I_0 — нетоннельное пространство.

З а м е ч а н и е 2. Тоннельность пространства X является и необходимым условием совпадения слабо ограниченных и эквинепрерывных множеств функционалов. В самом деле, пусть каждое слабо ограниченное множество $G \subset X'$ эквинепрерывно. Рассмотрим в пространстве X симметричную квазиокрестность нуля V . Множество $\pi(V) = G$ слабо ограничено, так как для любого $x \in X$ можно найти $\lambda > 0$ так, что $\lambda x \in V$ и, следовательно, $|f(x)| \leq \frac{1}{\lambda} (f \in \pi(V))$. Будучи слабо ограниченным, множество G эквинепрерывно, т. е. $G \subset \pi(V_0)$, где V_0 — некоторая окрестность нуля в пространстве X . А тогда

$$V = \pi^2(V) \supset \pi^2(V_0) \supset V_0,$$

так что V — окрестность нуля.

Непосредственным следствием теоремы 5 является теорема Банаха — Штейнхауса.

Теорема 6 (3.XI). Пусть последовательность $\{U_n\}$ линейных операций, отображающих тоннельное пространство X в локально-выпуклое пространство Y , такова, что для каждого $x \in X$ существует

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x).$$

Тогда U также линейная операция.

Доказательство. Ясно, что операция U аддитивна и однородна. Поскольку последовательность $\{U_n\}$ точно ограничена, она согласно теореме 5 будет и эквинепрерывна. Возьмем замкнутую окрестность нуля W в пространстве V и найдем окрестность нуля V в пространстве X так, чтобы $U_n(V) \subset W$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношении

$$U_n(x) \in W \quad (x \in V),$$

получим $U(x) \in W$, так что $U(V) \subset W$ и непрерывность операции U доказана.

3.6. Важный класс тоннельных пространств указан в следующей теореме.

Теорема 7 (3. XI). *Локально-выпуклое пространство X второй категории — тоннельно.*

Доказательство. Пусть V_0 квази-окрестность нуля в пространстве X . Можно считать, что V_0 — симметричное множество. Предположим, что V_0 имеет внутренние точки, пусть x_0 одна из них. Существует симметричная окрестность нуля V такая, что $x_0 + V \subset V_0$. Ясно, что и $-x_0 + V \subset V_0$. Но V_0 — выпуклое множество, поэтому для произвольного $x \in V$ получаем

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + x) + \frac{1}{2}(-x_0 + x) \in \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_0 = V_0.$$

Таким образом, $V \subset V_0$ и V_0 является окрестностью нуля.

Рассмотрим теперь случай, когда V_0 не имеет внутренних точек. Будучи замкнутым, множество V_0 нигде не плотно. Нигде не плотным будет также и любое множество вида λV_0 ($\lambda > 0$). Так как V_0 — поглощающее множество,

то $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV_0$, т. е. X есть объединение последовательности нигде не плотных множеств, иначе говоря, X есть множество первой категории.

Теорема доказана.

Так как полное метрическое пространство — второй категории (теорема 1 (4. I)), то получаем

Следствие. *Полное метрическое локально-выпуклое пространство (F -пространство) — тоннельно.*

Вторая категория пространства X является лишь достаточным условием его тоннельности. В § 5 будут указаны примеры полных тоннельных пространств первой категории.

3.7. Классы тоннельных и борнологических пространств, хотя и не совпадают полностью, все же оказываются весьма близкими. Одна из теорем, устанавливающая связь между этими классами, доказана ниже, другая помещена в следующем параграфе.

Теорема 8 (3. XI). *Счетно-полное борнологическое пространство X — тоннельно.*

Доказательство. Будем считать, что X отделимое. Предоставляем читателю убедиться, что общий случай сводится к указанному с помощью перехода к фактор-пространству.

Рассмотрим произвольное ограниченное множество $E_0 \subset X$. Обозначим $E = \pi^2(E_0)$. Так как $\pi(E_0)$ есть окрестность нуля в пространстве X^* , то по теореме 3 множество E , так же как и E_0 , ограничено, кроме того оно симметрично, выпукло и замкнуто. Обозначим через X_E линейную оболочку

множества E . Учитывая свойства E , можно написать $X_E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nE$. В X_E рас-

смотрим топологию τ_0 , индуцируемую топологией τ пространства X . Кроме того, введем в X_E топологию τ_0 , приняв за производящую систему окрестностей нуля систему, состоящую из одного множества E . Нетрудно проверить, что такая система удовлетворяет условиям теоремы 1 (2. XI).

Так как E — ограниченное в X множество, то любая окрестность нуля V в X поглощает E , т. е. при некотором $\lambda > 0$ будет $V \supset \lambda E$ и тем самым $V \cap X_E \supset \lambda E$, откуда вытекает, что топология τ_0 слабее топологии ν_0 , так что ν_0 — отделимая топология. Отсюда же на основании теоремы Колмогорова получаем, что пространство $[X_E, \nu_0]$ нормируемо. Докажем, что указанное пространство полное. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов этого пространства. Вследствие соотношения между топологиями τ_0 и ν_0 последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и в пространстве $[X_E, \tau_0]$ и тем самым сходится в себе и в данном пространстве X . Но пространство X счетно-полное, следовательно, в X существует $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Проверим, что $x_0 \in X_E$ и $x_n \rightarrow x_0$ не только в X , но и в пространстве $[X_E, \nu_0]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется N такое, что при $n, m \geq N$ будет $x_n - x_m \in \varepsilon E$. Иначе говоря,

$$x_n \in x_m + \varepsilon E \quad (n, m \geq N). \quad (6)$$

В силу замкнутости (в пространстве X) множества $x_m + \varepsilon E$ предельный переход в (6) при $n \rightarrow \infty$ дает

$$x_0 \in x_m + \varepsilon E \subset X_E \quad (m \geq N), \quad (7)$$

т. е. $x_0 \in X_E$. Записывая соотношение (7) в форме $x_m \in x_0 + \varepsilon E$ ($m \geq N$),

убедимся, что $x_m \rightarrow x_0$ в пространстве $[X_E, \nu_0]$.

На основании следствия к теореме 7 пространство $[X_E, \nu_0]$ тоннельно. Пусть V_0 — квази-окрестность нуля в X . Рассмотрим множество $V_0 \cap X_E$. Оно выпуклое и поглощающее (по отношению к X_E). Далее, это множество замкнуто в пространстве $[X_E, \tau_0]$ и тем более замкнуто в пространстве $[X_E, \nu_0]$. Таким образом, пересечение $V_0 \cap X_E$ является квази-окрестностью нуля в пространстве $[X_E, \nu_0]$. Но тогда $V_0 \cap X_E$ — окрестность нуля в этом пространстве и, значит, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что

$$V_0 \cap X_E \supset \lambda_0 E.$$

Подавно $V_0 \supset \lambda_0 E \supset \lambda_0 E_0$.

Таким образом, множество V_0 поглощает любое ограниченное в X множество. Так как X — борнологическое пространство, то V_0 — окрестность нуля. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие борнологичности пространства X было использовано в доказательстве не в полной мере. От пространства X требуется лишь, чтобы каждое выпуклое замкнутое множество, поглощающее любое ограниченное в X множество, было окрестностью нуля. Пространства, обладающие этим свойством, называются *инфра-тоннельными* (или *квази-тоннельными*).

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы было по существу установлено, что в счетно-полном локально-выпуклом пространстве X каждая квази-окрестность нуля поглощает любое ограниченное в X множество.

Из последнего замечания получаем

Следствие 1. Если X — счетно-полное локально-выпуклое пространство, то слабо ограниченные в X' множества ограничены в X^* .

Действительно, если $G \subset X'$ слабо ограничено, то, как нетрудно проверить, поляра $V_0 = \pi(G)$ будет квази-окрестностью нуля в X и, следовательно, V_0 поглощает любое ограниченное множество E . Тогда $\pi(V_0)$, наоборот, поглощается любым множеством вида $\pi(E)$, т. е. поглощается любой окрестностью нуля в пространстве X^* . Таким образом, $\pi(V_0)$ ограничено в X^* . Тем более ограничено множество $G \subset \pi^2(G) = \pi(V_0)$.

Для счетно-полных пространств имеет место некоторый аналог теоремы Банаха — Штейнхауса, доказанный по существу еще Ю. В. Сирвинтом (см. Сирвинт).

Следствие 2. Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность линейных функционалов в счетно-полном локально-выпуклом пространстве X , что при любом $x \in X$ существует $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда f — ограниченный функционал.

В самом деле, множество $\{f_n\}$ слабо ограничено, и, по доказанному, ограничено в X^* . Следовательно, для любого ограниченного в X множества E будет $f_n \in \lambda \pi(E)$, где $\lambda > 0$. Иначе говоря,

$$|f_n(x)| \leq \lambda \quad (n = 1, 2, \dots; x \in E).$$

Устремляя здесь $n \rightarrow \infty$, находим

$$|f(x)| \leq \lambda \quad (x \in E),$$

так что функционал f ограничен на любом ограниченном множестве.

3.8. В заключение докажем теорему о полноте сопряженного пространства.

Теорема 9 (3. XI). Если данное пространство X борнологическое, то пространство X^* полное; если X тоннельное, то X^* ограниченно-полное.

Доказательство. Будем считать сначала, что X — произвольное локально-выпуклое пространство. Рассмотрим некоторую обобщенную последовательность $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) линейных функционалов в X , сходящуюся в себе в пространстве X^* . Так как при каждом $x \in X$ обобщенная числовая последовательность $\{f_\alpha(x)\}$ сходится в себе, то существует $f(x) = \lim_A f_\alpha(x)$.

Пусть E — произвольное ограниченное множество в X . Поляра $\pi(E)$ есть окрестность нуля в X^* и, следовательно, найдется $\alpha_0 \in A$ такое, что

$$f_\alpha - f_\beta \in \pi(E) \quad (\alpha, \beta \succ \alpha_0),$$

т. е.

$$|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \leq 1 \quad (\alpha, \beta \succ \alpha_0; x \in E).$$

Фиксируя здесь α и переходя к пределу по β , получим

$$|f_\alpha(x) - f(x)| \leq 1 \quad (\alpha \succ \alpha_0; x \in E). \quad (8)$$

Переписывая это соотношение в виде

$$|f(x)| \leq |f_\alpha(x)| + 1 \quad (x \in E)$$

и замечая, что функционал f_α ограничен, находим, что функционал f также ограничен.

Допустим, что функционал f не только ограничен, но и непрерывен. Тогда соотношение (8) можно переписать в форме

$$f_\alpha - f \in \pi(E) \quad (\alpha \succ \alpha_0),$$

т. е. $f_\alpha \rightarrow f$ в пространстве X^* . Таким образом, задача доказательства полноты свелась к установлению непрерывности функционала f .

Если X — борнологическое пространство, то непрерывность f вытекает из его ограниченности (теорема 8 (2. XI)).

В случае, когда X тоннельно, будем считать обобщенную последовательность ограниченной. Тогда по теореме 5 она эквинепрерывна, т. е. существует окрестность нуля V в пространстве X такая, что $f_\alpha \in \pi(V)$ ($\alpha \in A$). Так как при каждом $x \in V$ будет $|f_\alpha(x)| \leq 1$, то в пределе получим

$$|f(x)| \leq 1 \quad (x \in V).$$

Иными словами, $f^{-1}(V) \subset [-1, 1]$ и f — непрерывный функционал.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Как нетрудно проверить, если X — инфра-тоннельное пространство, то ограниченные в X^* множества эквинепрерывны. Поэтому во второй части теоремы тоннельность пространства X можно заменить инфра-тоннельностью.

З а м е ч а н и е 2. Повторяя рассуждения доказательства теоремы, можно убедиться, что слабо замкнутое эквинепрерывное множество $G \subset X'$ (X — произвольное локально-выпуклое пространство) обладает следующим свойством полноты: если $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — обобщенная последовательность элементов из G , слабо сходящаяся в себе, то существует $f \in G$, к которому слабо сходится данная последовательность.

Результат, разумеется, остается верным, если заменить слабую сходимость сходимостью в пространстве X^* . При этом достаточно потребовать, чтобы G было замкнутым в пространстве X' множеством.

§ 4. Второе сопряженное пространство. Рефлексивность

В этом параграфе мы рассмотрим пространство X^{**} и его связи с данным пространством X . Как и раньше, рассматриваются лишь вещественные отделимые пространства.

4.1. Условимся в обозначениях, которые будут использоваться на протяжении данного параграфа. Если X — локально-выпуклое пространство, то через X' мы будем обозначать множество всех линейных функционалов в X . Как уже указывалось в предыдущем параграфе, каждый $x \in X$ можно рассматривать как функционал в множестве X' . Здесь, однако, будет удобнее различать элементы из X и соответствующие им функционалы в X' . Если x — данный элемент из X , то под $\varphi(x)$ мы будем понимать функционал X_x , имеющий вид

$$X_x(f) = f(x) \quad (f \in X'). \quad (1)$$

Множество $\varphi(E)$ ($E \subset X$) мы будем также обозначать через E'' . В соответствии с этим обозначением X'' есть совокупность всех функционалов вида (1).

Рассмотрим множество $G \subset X^*$. Согласно определению, поляр этого множества есть множество в X^{**} . Вместе с тем G , конечно, можно рассматривать и как множество в X' , так что под полярной G в этом случае следует понимать соответствующее множество в X . Чтобы различить эти два случая, мы в первом из них будем использовать для обозначения поляры символ $\pi(G)$, сохраняя обозначение $\pi(G)$ для второго случая. Равным образом, если $F \subset X^{**}$, то под $\pi^*(F)$ мы будем понимать полярю множества F , лежащую в X^* , т. е. совокупность всех $f \in X^*$ таких, что $|\bar{X}(f)| \leq 1$ ($X \in F$).

Отметим очевидное соотношение, связывающее поляры $\pi(G)$ и $\pi^*(G)$:

$$[\pi(G)]'' = \pi^*(G) \cap X''. \quad (2)$$

Более глубокая связь поляр π и π^* устанавливается в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть E — симметричное выпуклое множество в X . Тогда множество $\pi^*(\pi(E))$ есть замыкание множества E'' в пространстве $[X'', \sigma]$.

Доказательство. Очевидно

$$\pi^*(\pi(E)) = \pi^{*2}(E'').$$

Поскольку множество E'' выпукло и симметрично, его замыкание $\bar{E}''$ также выпукло и симметрично. Так как $\pi^{*2}(E'')$ есть наименьшее замкнутое выпуклое симметричное множество, содержащее E'' (следствие к теореме 2 (3.XI)), то $\bar{E}'' \supset \pi^{*2}(E'')$; обратное включение вытекает из замкнутости $\pi^2(E'')$. Таким образом, окончательно $\bar{E}'' = \pi^{*2}(E'')$.

Беря в качестве E все пространство X , получаем, что замыкание множества X'' в пространстве $[X', \sigma]$ есть X^{**} , т. е.

Следствие. Множество X'' плотно в пространстве $[X', \sigma]$.

4.2. В множестве X'' можно рассматривать две топологии. Во-первых, топологию τ , которая переносится с пространства X отображением φ . Окрестностью нуля в этой топологии служит любое множество вида V'' , где V — окрестность нуля в X . Во-вторых, можно рассматривать топологию τ' , которая индуцируется в X'' топологией пространства X' .

Теорема 1 (4. XI). Топология τ слабее топологии τ' . Для того чтобы $\tau = \tau^{**}$ необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное в X^* множество было эквинепрерывно.

Доказательство. Пусть V — окрестность нуля в пространстве X и, следовательно, V'' — окрестность нуля в пространстве $[X'', \tau]$. Множество $\pi(V) = G$ ограничено в X^* , так что $W = \pi^*(G)$ есть окрестность нуля в X^{**} . Считая V выпуклой симметричной и замкнутой, будем иметь на основании (2)

$$V'' = [\pi(G)]'' = W \cap X'',$$

т. е. V'' есть окрестность нуля в пространстве $[X'', \tau']$, что и доказывает первую часть теоремы.

Предположим теперь, что X таково, что каждое ограниченное в X^* множество эквинепрерывно. Рассмотрим окрестность нуля W в пространстве X^{**} . Можно считать, что $W = \pi^*(G)$, где G — ограниченное, а следовательно, и эквинепрерывное множество в X^* . Существует окрестность нуля V в X такая, что $G \subset \pi(V)$. Поэтому, снова применяя (2),

$$W \cap X'' = [\pi(G)]'' \supset [\pi^2(V)]'' \supset V''.$$

Это позволяет сделать заключение о том, что $\tau^{**} \leq \tau$ и, с учетом доказанного, получаем $\tau^{**} = \tau$.

Пусть, наоборот, известно, что $\tau' = \tau$. Возьмем произвольное ограниченное в X^* множество G и обозначим $W = \pi^*(G)$. Пересечение $W \cap X''$ есть окрестность нуля в пространстве $[X'', \tau']$ и, следовательно, в пространстве X такой, что $W \cap X'' = V''$. С помощью (2) находим отсюда $V = \pi(G)$ и $G \subset \pi^2(G) = \pi(V)$, что означает эквинепрерывность множества G .

Теорема полностью доказана.

Следствие. Если пространство X — тоннельное или борнотопологическое, то $\tau^{**} = \tau$.

В случае, когда $\tau^{**} = \tau$ пространство $[X'', \tau]$ обозначается X_0^{**} (ср. V.1.2).

4.3. Подобно случаю нормированных пространств (ср. теорему 1 (I.V)) имеет место

Теорема 2 (4. XI). Если X — полное пространство, то множество X'' замкнуто в пространстве X^{**} .

Доказательство. Рассмотрим обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такую, что

$$x_\alpha \xrightarrow{\alpha \in A} X \quad (x_\alpha \in X'', \alpha \in A; X \in X^{**}).$$

Обозначим $x_\alpha = \varphi^{-1}(X_\alpha)$ ($\alpha \in A$). Ввиду того, что $\tau \leq \tau'$ обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) сходится в себе в пространстве X и, следовательно, сходится. Пусть, например $x_\alpha \rightarrow x$. Для любого $f \in X'$ имеем

$$X(f) = \lim_{\alpha \in A} X_\alpha(f) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(x).$$

Таким образом, $X \in X''$, и теорема доказана.

Следствие. Если $\tau = \tau^{**}$, то пространство X_0^{**} является подпространством пространства X^{**} .

4.4. Локально-выпуклое пространство X называется *полурефлексивным*, если $X^{\circ'} = X''$. Если, кроме того, $\tau^{**} = \tau$, то X называется *рефлексивным*. Для случая, когда X нормированное пространство, равенство $\tau^{**} = \tau$ выполнено вследствие борнологичности пространства X , и мы приходим к определению рефлексивности, данному в главе V (V.1.3).

Теорема 3 (4. XI). *Для того чтобы полурефлексивное пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы X было тоннельным.*

Доказательство. Необходимость. Ввиду того, что $\sigma(X', X) = \sigma(X', X')$, слабо ограниченные множества в X' ограничены и, следовательно, на основании теоремы 1 эквинепрерывны, а тогда по замечанию 2 к теореме 5 (3. XI) X — тоннельное пространство.

Достаточность условия содержится в следствии к теореме 1.

Теорема 4 (4. XI). *Если X — рефлексивное пространство, то X' также рефлексивно. Если же X^* полурефлексивно, то в случае, когда X — полное пространство, оно полурефлексивно.*

Доказательство. Пусть X — рефлексивное пространство. Это значит, что $X^{\circ'} = X''$ и $\tau^{**} = \tau$. Рассмотрим функционал $f \in X^{\circ'}$. Для $x \in X$ положим

$$f(x) = F(\varphi(x)).$$

Ввиду совпадения топологий τ и τ' отображение φ является линейной операцией из пространства X в пространство X^* , откуда следует, что f — линейный функционал в X , т. е. $f \in X'$. Далее, каждый функционал $X \in X^{\circ'}$ имеет вид $X = X_x$, где x — некоторый элемент из X . Поэтому

$$F(X) = F(X_x) = f(x) = X_x(f) = X(f)$$

и, следовательно, $X^{\circ'} = (X^*)''$. Таким образом, X^* полурефлексивно. Совпадение топологий τ^* и $(\tau^*)^{**}$ очевидным образом вытекает из равенства $\tau = \tau$.

Рассмотрим теперь случай, когда X^* — полурефлексивное пространство. По следствию из леммы 1 множество X'' плотно в пространстве $[X', \sigma(X', X^*)]$, которое в данном случае совпадает с пространством $[X^{\circ'}, \sigma(X^{\circ'}, X^{**})] = [X^{**}, \sigma]$. На основании теоремы 2 множество X'' замкнуто в X , следовательно, в силу теоремы 4 (3. XI) замкнуто в пространстве $[X', \sigma]$ и тем самым в пространстве $[X^{\circ'}, \sigma]$, что вместе с предыдущим позволяет заключить о равенстве $X'' = X^{\circ'}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если X есть F -пространство, то пространства X и X^* рефлексивны или нет одновременно.*

Замечание. Следует иметь в виду, что из полурефлексивности пространства X не вытекает полурефлексивность пространства X^* . Так, рассматривая пространство I как множество функционалов в пространстве m , возьмем в качестве X пространство $[m, \sigma(m, I)]$. Нетрудно проверить, что X^* есть пространство I , снабженное обычной нормируемой топологией. Отсюда следует, что X полурефлексивно, а X^* нет.

4.5. Рассмотрим пространство s_T^* . Как было показано в XI.2.4, множество $(s_T^*)'$ можно отождествить с s_T , сопоставив элементу $y \in s_T$ функционал $f \in (s_T^*)'$ по формуле

$$f(x) = \sum_{t \in T} x(t) y(t) \quad (x \in s_T^*). \quad (3)$$

Докажем, что при этом пространство $(s_T^*)^*$ совпадает с пространством s_T . Пусть $E \neq \{0\}$ — ограниченное множество в s_T^* . В силу сказанного в XI.1.5 существуют $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ такие, что

$$\sup_{x \in E} |x(t)| = \begin{cases} \lambda_k < \infty & t = t_k \\ 0 & t \neq t_1, t_2, \dots, t_n. \end{cases} \quad (4)$$

При этом можно, конечно, считать, что все $\lambda_k > 0$. Обозначим через E_0 множество всех $x \in s_T^*$, удовлетворяющих условию $x(t) = 0$ ($t \neq t_1, t_2, \dots$

$\dots, t_n$); $\sum_{k=1}^n |x(t_k)| \leq \lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Так как $E_0 \supset E$, то $\pi(E_0) \subset \pi(E)$. Пусть $f \in \pi(E_0)$; соответствующий элемент $y \in s_T$ должен удовлетворять условию

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n x(t_k) y(t_k) \right| \leq 1 \quad (x \in E_0). \quad (5)$$

В частности, беря $x_j \in s_T^*$ ($j = 1, 2, \dots, n$) так, что

$$x_j(t) = \begin{cases} \lambda & t = t_j \\ 0 & t \neq t_j, \end{cases}$$

будем иметь $x_j \in E_0$ и, следовательно, на основании (5)

$$|y(t_j)| \leq \frac{1}{\lambda} = \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Ясно, что и наоборот, каждый $y \in s_T$, удовлетворяющий условию (6), удовлетворяет и условию (5), т. е. эти условия равносильны. Но множество функций из s_T , удовлетворяющих условию (6), есть окрестность нуля в s_T . Таким образом, можно считать, что поляр $\pi(E_0)$ и тем более поляр $\pi(E)$ есть окрестность нуля в пространстве s_T . Из сказанного выше следует также, что любую окрестность нуля в пространстве s_T вида (6) можно рассматривать как поляр к множеству $\pi(E_0)$, которое, очевидно, ограничено в s_T^* .

Линейные функционалы в s_T имеют форму (3), откуда вытекает полурефлексивность пространства s_T^* . Поскольку окрестностью нуля в пространстве s_T^* является любое выпуклое поглощающее множество, топология τ^* не может быть сильнее топологии τ . Пространство s_T^* рефлексивно. На основании теоремы 4 будет рефлексивным и пространство $s_T = (s_T^*)^*$. Отсюда следует тоннельность пространства s_T . Отметим еще, что $(s_T)^* = s_T^*$.

4.6. Дальнейшее изучение рефлексивных пространств связано с выяснением структуры компактных множеств в локально-выпуклом пространстве. При этом мы, естественно, будем использовать факты, относящиеся к компактным множествам в произвольных топологических пространствах, изложенные в § 5 гл. I, в частности, нам понадобится понятие фильтра. В связи с этим мы советуем читателю восстановить в памяти указанный материал.

Множество E в локально-выпуклом пространстве X называется *вполне ограниченным*, если какую бы окрестность нуля V в X ни взять, в X существует конечное число точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что

$$E \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V).$$

Не представляет труда проверить, что вполне ограниченное множество ограничено. Обратное предложение в общем случае неверно.

В определении полной ограниченности можно учитывать не все окрестности нуля, а лишь окрестности из некоторой фундаментальной системы окрестностей нуля. В случае, если X — метрическое пространство, в качестве такой фундаментальной системы можно взять совокупность всех сфер (с центром в нуле), откуда следует, что вполне ограниченные множества в линейном метрическом пространстве это такие, для которых существует конечная ϵ -сеть при любом $\epsilon > 0$.

Будем называть множество $E \subset X$ *относительно полным*, если любая сходящаяся в себе обобщенная последовательность элементов из E сходится к элементу из E . Отметим два простых факта. Во-первых, что относительно полное множество замкнуто и, во-вторых, что в полном пространстве всякое замкнутое множество относительно полно.

Следующая ниже теорема является обобщением теоремы Хаусдорфа о компактных множествах в метрических пространствах (теорема 2 (3.1)),

Теорема 5 (4. XI). *Для того чтобы множество $E \subset X$ было компактным в себе, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *E было относительно полным;*

2) *E было вполне ограниченным.*

Доказательство. Необходимо и достаточно. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — сходящаяся в себе обобщенная последовательность элементов из E . Рассмотрим порожденный ею фильтр $\mathfrak{F}$ в E и ультрафильтр $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}$. На основании теоремы 5 (5.1) фильтр $\mathfrak{U}$ сходится к некоторой точке $x \in E$. Какую бы окрестность V_x точки x и какое бы $F_\alpha = \{x_{\alpha'}\}$ ($\alpha' \in \alpha \in A$) ни взять, пересечение

$$F_\alpha \cap V_x \neq \emptyset, \quad (7)$$

так как и V_x и F_α входят в $\mathfrak{U}$.

Пусть V — выпуклая окрестность нуля в пространстве X . Найдем α_0 так, что

$$x_\alpha - x_{\alpha'} \in \frac{1}{2} V \quad (\alpha, \alpha' \in \alpha_0).$$

Беря в (7) $\alpha = \alpha_0$ и $V_x = \left(x + \frac{1}{2} V\right) \cap E$, получим, что существует $\alpha_1 \in A$ такое, что $\alpha_1 \in \alpha_0$ и

$$x_{\alpha_1} \in x + \frac{1}{2} V.$$

Для $\alpha \in \alpha_0$ имеем

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha_1}) + (x_{\alpha_1} - x) \in \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V = V, \quad (8)$$

т. е. $x_\alpha \rightarrow x$.

Необходимость второго условия следует из определения компактного в себе множества, если, считая V открытой окрестностью нуля, рассмотреть покрытие множества E системой открытых множеств $\{x + V\}$ ($x \in E$).

Достаточность. В силу теоремы 5 (5.1) достаточно доказать, что всякий ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в E сходится. Рассмотрим произвольную выпуклую симметричную окрестность нуля V в пространстве X . Согласно условию 2)

можно найти точки $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ так, что $E \subset \bigcup_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{2} V\right)$. Обо-

значим $V_k = E \cap \left(x_k + \frac{1}{2} V\right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Допустим, что для

каждого $k = 1, 2, \dots, n$ в $\mathcal{U}$ найдется множество U_k такое, что $U_k \cap V_k = \Delta$.

Тогда множество $U = \bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{U}$ и потому непусто. Вместе с тем,

$$U \cap V_k = \Delta \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{и} \quad U = U \cap E = \bigcup_{k=1}^n (U \cap V_k) = \Delta. \quad \text{Таким}$$

образом, существует такое k , что множество $U \cap V_k$ непусто, каково бы ни было $U \in \mathcal{U}$. В силу сказанного система $\mathcal{U}_k^0$ множеств вида $U \cap V_k (U \in \mathcal{U})$ образует базис некоторого фильтра $\mathcal{U}_k$. Поскольку очевидно $\mathcal{U}_k \supset \mathcal{U}$, а $\mathcal{U}$ ультрафильтр, то $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}$, так что, в частности, $U \cap V_k \in \mathcal{U}$ при любом $U \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим обобщенную последовательность $\{x_U\} (U \in \mathcal{U})$, порожденную фильтром $\mathcal{U}$. Докажем, что эта обобщенная последовательность сходится в себе. Для этого возьмем какое-нибудь множество $U_0 \in \mathcal{U}$, содержащееся в V_k ; *) если $U', U \subset U_0$, то тем более $U', U \subset V_k$ и, следовательно,

$$x_U - x_{U'} \in U - U' \subset V_k - V_k \subset \left(x_k + \frac{1}{2} V\right) - \left(x_k + \frac{1}{2} V\right) = V.$$

Остается напомнить, что за V можно принять любую выпуклую симметричную окрестность нуля в X .

Вследствие относительной полноты множества E обобщенная последовательность $\{x_U\} (U \in \mathcal{U})$ сходится к некоторой точке $x \in E$. Порожденный рассматриваемой обобщенной последовательностью фильтр $\mathcal{U}'$ также сходится к x , но, как было отмечено в 1.5.11, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ и, следовательно, $\mathcal{U}$ сходится.

Теорема полностью доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть X — локально-выпуклое пространство. Всякое слабо ограниченное множество G линейных функционалов слабо вполне ограничено, т. е. вполне ограничено в пространстве $[X', \sigma]$.

Доказательство. Пусть $V = \pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — окрестность нуля в пространстве $[X', \sigma]$. Каждому $f \in X'$ сопоставим элемент $z = \omega(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ n -мерного пространства $\mathbf{m}_n$. Если обозначить через Q единичную замкнутую сферу этого пространства, то, очевидно, $\omega^{-1}(Q) = V$. Если же z — произвольный элемент из $\mathbf{m}_n$, то $\omega^{-1}(z + Q) = f + V$, где в качестве f можно взять любой элемент из $\omega^{-1}(z)$. Поскольку множество G слабо ограничено, его образ $\hat{G} = \omega(G)$ ограничен в пространстве $\mathbf{m}_n$ по норме, и, следовательно, компактен в $\mathbf{m}_n$. По теореме Хаусдорфа (или, что то же самое по теореме 5) в $\hat{G}$ существует конечное число элементов

$z_1, z_2, \dots, z_\nu$ таких, что $\hat{G} \subset \bigcup_{k=1}^{\nu} (z_k + Q)$. Но тогда, обозначая через f_k

такие элементы из G , что $\omega(f_k) = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$), получим в силу сказанного выше

$$G \subset \omega^{-1}(\hat{G}) \subset \omega^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\nu} (z_k + Q)\right) = \bigcup_{k=1}^{\nu} \omega^{-1}(z_k + Q) = \bigcup_{k=1}^{\nu} (f_k + V),$$

что и требовалось доказать.

*) В качестве U_0 можно, например, взять пересечение произвольного множества $U \in \mathcal{U}$ с V_k .

Привлекая замечание 2 к теореме 9 (3. XI) и учитывая результат теоремы 5, приходим к такому следствию.

Следствие. Слабо замкнутое эквинепрерывное множество слабо компактно в себе.

4.7. Пусть X — линейное множество и X' — тотальное множество аддитивных и однородных функционалов в X . Как было показано (теорема 1 (3. XI)), $[X, \sigma]' = X'$. Нетрудно, однако, сообразить, что X можно топологизировать и иными способами с тем, чтобы X' по-прежнему было множеством всех линейных функционалов в полученном локально-выпуклом пространстве. Чтобы указать условия, которым должна удовлетворять локально-выпуклая топология τ для того, чтобы $[X, \tau]' = X'$, введем в X специальную топологию $\mu = \mu(X, X')$, так называемую *топологию Макки* (см. [76а, б]). В качестве фундаментальной системы окрестностей нуля в пространстве $[X, \mu]$ берутся поляры к выпуклым симметричным слабо компактными в себе множествам в X' , т. е. поляры к выпуклым симметричным компактным в себе в пространстве $[X', \sigma]$ множествам.*) Поскольку поляры к конечным множествам в X' образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $[X, \sigma]$, а конечное множество, равно как и наименьшее выпуклое симметричное множество его содержащее, слабо компактно в себе, топология μ сильнее топологии σ .

Теорема 6 (4. XI) (Макки). Для того, чтобы топология τ удовлетворяла условию $[X, \tau]' = X'$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma \leq \tau \leq \mu$.

Доказательство. Необходимость. Пространство $[X, \tau]$ будем для простоты обозначать одной буквой X . Так как каждый $f \in X'$ есть линейный функционал в пространстве X , то множество $f^{-1}([-1, 1])$ является окрестностью нуля в X и, следовательно, $\sigma \leq \tau$.

Рассмотрим далее симметричную выпуклую замкнутую окрестность нуля V в пространстве X . Множество $G = \pi(V)$ слабо замкнуто и эквинепрерывно, поэтому на основании следствия к лемме 2 G слабо компактно в себе. Таким образом, множество $V = \pi(G)$ есть окрестность нуля в пространстве $[X, \mu]$, откуда и следует соотношение $\tau \leq \mu$.

Достаточность. По теореме 1 (3. XI) $[X, \sigma]' = X'$. Докажем, что также $[X, \mu]' = X'$. Так как $\mu \geq \sigma$, то $[X, \mu]' \supset [X, \sigma]' = X'$ и надо только доказать, что каждый линейный функционал в пространстве $[X, \mu]$ входит в X' .

Обозначим $X'_\mu = [X, \mu]'$. Наряду с пространством $[X', \sigma]$ рассмотрим пространство $[X'_\mu, \sigma]$. Поскольку $X' \subset X'_\mu$, можно рассматривать отображение ω пространства $[X', \sigma]$ в пространство $[X'_\mu, \sigma]$, сопоставляя элементу $x \in [X', \sigma]$ элемент $\omega(x) = x \in [X'_\mu, \sigma]$. Отображение ω очевидно непрерывно.

*) Пусть $V_1 = \pi(K_1)$, $V_2 = \pi(K_2)$, где K_1 и K_2 — выпуклые симметричные слабо компактные в себе множества в X' . Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 V_1 \cap \lambda_2 V_2 &= \pi\left(\frac{1}{\lambda_1} K_1\right) \cap \pi\left(\frac{1}{\lambda_2} K_2\right) = \\ &= \pi\left(\frac{1}{\lambda_1} K_1 \cup \frac{1}{\lambda_2} K_2\right) \supset \pi\left(\frac{1}{\lambda_1} K_1 + \frac{1}{\lambda_2} K_2\right). \end{aligned}$$

Но множество $\frac{1}{\lambda_1} K_1 + \frac{1}{\lambda_2} K_2$ выпукло, симметрично и, как показано в XI. 1.2 (предложение IV), слабо компактно в себе. Поэтому на основании теоремы 1 (2. XI) множества указанного вида — поляры к симметричным выпуклым слабо компактными в себе множествам в X' — действительно образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.

Следовательно, если G — компактное в себе множество в пространстве $[X', \sigma]$, то $\omega(G) = G$ будет компактным в себе множеством и в пространстве $[X'_\mu, \sigma]$. Тем более G замкнуто в $[X'_\mu, \sigma]$.

Пусть E — некоторое множество в X . Под $\pi_\mu(E)$ будем понимать полярную множества E , лежащую в X'_μ , т. е. множество функционалов $f \in X'_\mu$ таких, что $f(E) \subset [-1, 1]$.

Рассмотрим функционал $f \in X'_\mu$. Множество $V = f^{-1}([-1, 1])$ является окрестностью нуля в пространстве $[X, \mu]$, следовательно, существует симметричное выпуклое слабо компактное в себе множество $G \subset X'$ такое, что $V \supset \pi(G)$, откуда $\pi_\mu(V) \subset \pi_\mu(\pi(G))$. Повторяя доказательство леммы 1, убедимся, что $\pi_\mu(\pi(G))$ есть замыкание множества G в пространстве $[X'_\mu, \sigma]$, т. е. $\pi_\mu(\pi(G)) = G$. Так как $f \in \pi_\mu(V)$, то $f \in G$ и тем более $f \in X'$. Итак, $[X, \mu]' = X'$.

Из соотношения между топологиями: $\sigma \leq \tau \leq \mu$, получаем

$$X' = [X, \sigma]' \subset [X, \tau]' \subset [X, \mu]' = X',$$

так что $[X, \tau]' = X'$.

Теорема доказана.

4.8. Локально-выпуклое пространство X называется *пространством Макки*, если топология τ пространства X совпадает с топологией Макки $\mu(X, X')$.

Теорема 7 (4. XI). *Тоннельное пространство X есть пространство Макки.*

Доказательство. Так как X' есть множество всех линейных функционалов в X , то по теореме Макки $\tau \leq \mu$. Надо, таким образом, проверить лишь, что $\tau \geq \mu$. Рассмотрим выпуклое симметричное слабо компактное в себе множество $G \subset X'$. Будучи слабо компактным в себе, оно слабо ограничено и потому в силу замечания 1 к теореме 5 (3. XI) эквивалентно непрерывно; это означает существование такой окрестности нуля V в пространстве X , что $G \subset \pi(V)$. Переходя к полярам, будем иметь $V \subset \pi^2(V) \subset \pi(G)$. Следовательно, множество $\pi(G)$ является окрестностью нуля в пространстве X . Остается заметить, что множества вида $\pi(G)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $[X, \mu]$.

Аналогичный результат имеет место и для борнологических пространств.

Теорема 8 (4. XI). *Борнологическое пространство является пространством Макки. Обратно, если в пространстве Макки X каждый ограниченный функционал линеен, то X — борнологическое пространство.*

Доказательство. Пусть X — борнологическое пространство. Как и раньше, $\tau \leq \mu$. Далее, поскольку $[X, \mu]' = X'$, слабо ограниченные множества в пространствах X и $[X, \mu]$ одни и те же, а тогда по теореме 3 (2. XI) и ограниченные множества в этих пространствах одни и те же. Но это по самому определению борнологического пространства означает, что $\mu \leq \tau$ (см. XI.2.7). Первая часть теоремы доказана.

Переходим к доказательству второй части теоремы. Рассмотрим борнологическое пространство X_b (см. XI.2.7). Нетрудно проверить, что $(X_b)'$ состоит из всех ограниченных функционалов в пространстве X и, следовательно, в условиях теоремы $(X_b)' = X'$. Обозначая топологию пространства X_b через τ_b , будем иметь на основании теоремы Макки $\tau \leq \tau_b \leq \mu$. Из равенства $\tau = \mu$ получаем $\tau = \tau_b$, т. е. $X = X_b$, пространство X — борнологическое.

Следствие. *Тоннельное пространство, в котором каждый ограниченный функционал линеен, является борнологическим пространством.*

4.9. С помощью теоремы Макки легко доказывается следующий критерий полурефлексивности локально-выпуклого пространства.

Теорема 9 (4. XI). Для того чтобы пространство X было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное симметричное выпуклое замкнутое множество в X было слабо компактно в себе, т. е. компактно в себе в пространстве $[X, \sigma]$.

Доказательство. Полурефлексивность пространства X означает, что множество X' всех линейных функционалов в пространстве X' совпадает с заданным множеством X'' . На основании теоремы Макки это равносильно тому, что $\sigma(X', X'') \leq \tau^* \leq \mu(X', X'')$, где через τ^* обозначена топология пространства X' . Первое из этих соотношений выполнено для любого пространства X . Второе же

$$\tau^* \leq \mu(X', X'') \quad (9)$$

эквивалентно тому, что каждая окрестность нуля в X^* содержит окрестность нуля в пространстве $[X, \mu]$. Поскольку можно ограничиться рассмотрением окрестностей из некоторых фундаментальных систем окрестностей нуля, мы от (9) приходим к условию: для каждого ограниченного симметричного выпуклого замкнутого в X множества E найдется симметричное выпуклое слабо компактное в себе множество $E_0 \subset X$ так, что $\pi(E) \supset \pi(E_0)$, или, что то же, $E \subset E_0$. Последнее условие выполнено, очевидно, тогда и только тогда, когда каждое ограниченное симметричное выпуклое замкнутое в X множество слабо компактно в себе.

Теорема доказана.

Доказанная теорема приводит к другому критерию полурефлексивности.

Теорема 10 (4. XI). Для того чтобы пространство X было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было слабо ограниченно-полным, т. е. чтобы пространство $[X, \sigma]$ было ограниченно-полным.

Доказательство. Необходимость. Пусть X — полурефлексивное пространство и $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — ограниченная обобщенная последовательность элементов из X . Обозначим $E = \pi^2(\{x_\alpha\})$. Множество E ограничено симметрично выпукло и замкнуто в X и, следовательно, на основании теоремы 9 слабо компактно в себе, в частности относительно слабо полно. Отсюда следует, что обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) слабо сходится.

Достаточность. Рассмотрим ограниченное симметричное выпуклое замкнутое множество $E \subset X$. Согласно лемме 2 из 4.6 E вполне ограничено в пространстве $[X, \sigma]$. Так как E выпукло и замкнуто, то оно и слабо замкнуто, а следовательно, по условию теоремы относительно полно. На основании теоремы множество E слабо компактно в себе. *)

З а м е ч а н и е. Слабая полнота пространства X означает, что если $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) такая обобщенная последовательность, что для любого $f \in X'$ существует $\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$, то в X существует элемент x такой, что

$$f(x) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha).$$

Это же условие означает слабую ограниченную полноту, если только под $\{x_\alpha\}$ понимать ограниченную обобщенную последовательность.

Проиллюстрируем теорему 9 на примере пространства $D_{[a, b]}^\circ$. Докажем, что каждое ограниченное множество в $D_{[a, b]}^\circ$ компактно. Поскольку $D_{[a, b]}^\circ$ — метрическое пространство, достаточно доказать, что из каждой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset D_{[a, b]}^\circ$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*) В случае, когда пространство X метрическое, а X сепарабельное, критерий теоремы 10 может быть несколько упрощен. Именно, в этом случае для рефлексивности пространства X достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы X было слабо счетно-полным.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена. В частности, ограничена числовая последовательность $\{\|x_n\|_1\}$. Поэтому функции x_n ($n = 1, 2, \dots$) равномерно непрерывны и равномерно ограничены. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи (теорема 3(3.1)) из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_1}\}$, равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной функции x . Аналогичным образом, рассматривая ограниченную последовательность $\{\|x_{n_1}\|_2\}$ и снова применяя теорему Арцела — Асколи, выделим из последовательности $\{x_{n_1}\}$ подпоследовательность $\{x_{n_2}\}$, которая равномерно сходится вместе с последовательностью $\{x'_{n_2}\}$ производных. Понятно, что $x_{n_2} \rightarrow x$ и $x'_{n_2} \rightarrow x'$, так что функция x оказывается дифференцируемой. Продолжая этот процесс, придем к совокупности последовательностей $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, \dots$ ($k = 1, 2, \dots$), каждая из которых является подпоследовательностью предыдущей, причем $x_{nk}^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^{(j)}$ ($j < k = 1, 2, \dots$) равномерно в $[a, b]$. Отсюда следует, что $x \in \mathbf{D}_{[a, b]}^\circ$. Далее, диагональная последовательность $\{x_{nn}\}$ сходится равномерно вместе с последовательностями $\{x_{nn}^{(j)}\}$ производных к x и соответствующим производным функции x , т. е. $x_{nn} \rightarrow x$ в $\mathbf{D}_{[a, b]}^\circ$.

Если множество E ограничено и, сверх того, замкнуто, то оно в силу доказанного компактно в себе и тем более слабо компактно в себе. На основании теоремы 9 пространство $\mathbf{D}_{[a, b]}^\circ$ полурефлексивно, а так как $\mathbf{D}_{[a, b]}^\circ$ — борнологическое пространство, то оно, тем самым, рефлексивно.

Замечание. Как было показано в II.2.9 (теорема 2(2.11)), если в нормированном пространстве каждое ограниченное множество компактно, то это пространство конечномерно. Для ненормируемых локально-выпуклых пространств (даже для метрических пространств) это заключение уже неверно.

4.10. В заключение докажем теорему о полурефлексивности подпространства полурефлексивного пространства.

Теорема 11(4. XI). *Подпространство X_0 полурефлексивного пространства X само является полурефлексивным пространством.*

Доказательство. Рассмотрим ограниченную обобщенную последовательность $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) элементов из X_0 , слабо сходящуюся в себе. Пусть f — линейный функционал в X . Этот функционал можно рассматривать лишь для элементов из X_0 , при этом он будет, разумеется, линейным функционалом в X_0 . Учитывая это, можем заключить о существовании предела $\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$.

В силу теоремы 10 существует элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$.

Но X_0 , будучи подпространством, замкнуто, а значит, и слабо замкнуто, вследствие чего $x \in X_0$. Таким образом, X_0 — слабо ограниченно-полное пространство и потому, на основании теоремы 10, полурефлексивно.

§ 5. Последовательности локально-выпуклых пространств

В этом параграфе рассматриваются две конструкции, позволяющие образовывать локально-выпуклые пространства, исходя из последовательности данных локально-выпуклых пространств. По поводу содержания этого параграфа см. Дьёдонне, [53], [99], [94].

5.1. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность линейных множеств, «убывающая» в следующем обобщенном смысле: существуют аддитивные и однородные отображения ω_n , переводящие X_{n+1} в X_n ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через X множество всевозможных последовательностей $\{x_n\}$ таких, что

$$x_n \in X_n, \quad x_n = \omega_n(x_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В множестве X естественным образом вводятся алгебраические операции, в силу которых X оказывается линейным множеством.

Если отображения ω_n взаимно-однозначны, то, отождествляя элемент $x_0 \in X_0$ с элементом $\omega_1(x_0) \in X_1$, можем считать, что $X_1 \supset X_2$ и аналогично $X_2 \supset X_3 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$. В этом случае последовательность $\{x_n\} \in X$ однозначно определяется любым своим элементом, в частности элементом $x_1 \in X_1$. Сопоставляя последовательность $\{x_n\} \in X$ элементу $x_1 \in X_1$, без труда убе-

ждаемся, что множеству X при этом соответствует пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_n$.

Отмеченный факт оправдывает в общем случае употребление для обозначения множества X термина «обобщенное пересечение». Поскольку нас, как обычно, интересует не природа элементов множества X , а его алгебраическая структура, то под *обобщенным пересечением* мы будем понимать не только само множество X , но и любое изоморфное ему линейное множество. Отметим очевидный факт, что обобщенное пересечение определяется не только множествами $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, но и характером их вложения друг в друга, т. е. отображениями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. Это обстоятельство мы подчеркнем и в обозначении обобщенного пересечения, для кото-

рого будем использовать символ $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$.

Независимо от приведенной конструкции обобщенное пересечение может быть охарактеризовано следующим образом.

Лемма 1. Для того чтобы $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие аддитивные и однородные операции Ω_n , отображающие X в X_n , что

- 1) $\Omega_n = \omega_n \Omega_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) если $\Omega_n(x) = 0$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то $x = 0$;
- 3) если $\{x_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (1), то существует $x \in X$ такой, что

$$\Omega_n(x) = x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Пусть X состоит из последовательностей, удовлетворяющих условию (1). Для $n = 1, 2, \dots$ и $x = \{x_n\} \in X$ положим $\Omega_n(x) = x_n$. При этом все требования леммы будут, очевидно, соблюдены.

Пусть, наоборот, X — линейное множество, для которого удовлетворены условия леммы. Обозначим через X_0 совокупность последовательностей, удовлетворяющих условию (1), и покажем, что X и X_0 изоморфны. Для этого элементу $x \in X$ отнесем последовательность $\{\Omega_n(x)\}$, которая, как легко проверить, является элементом множества X_0 . Вследствие условия 2) это соответствие взаимно-однозначно, а на основании условия 3) образы элементов из X заполняют все X_0 . Очевидно также, что указанное соответствие сохраняет алгебраические операции, т. е. является изоморфизмом.

5.2. Пусть теперь $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ не только линейные множества, но и локально-выпуклые пространства, причем операции ω_n непрерывны. Обозначим через X обобщенное пересечение пространств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ и определим в X топологию. Для этого обозначим через $\mathfrak{B}_n$ производящую систему выпуклых окрестностей нуля в пространстве X_n ($n = 1, 2, \dots$) и в качестве производящей системы $\mathfrak{B}$ в пространстве X примем совокупность всех множеств вида $\Omega_n^{-1}(V_n)$ ($V_n \in \mathfrak{B}_n$; $n = 1, 2, \dots$). Без труда проверяется, что система $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (2. XI) и что топология, получающаяся при этом в X , не зависит от выбора систем $\mathfrak{B}_n$, а определяется

только топологиями пространств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *). Построенное локально-выпуклое пространство X называется *проективным пределом* последовательности пространств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ и обозначается следующим образом: $X = \lim \text{pr.} (X_n, \omega_n)$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть топология в X_n определена с помощью мульти-нормы: $\|x\|_\xi$ ($x \in X_n$; $\xi \in \Xi_n$; $n = 1, 2, \dots$). Считая, что множества Ξ_n попарно

не имеют общих элементов и обозначая $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Xi_n$, положим для $x \in X$

$$\|x\|_\xi = \|\Omega_n(x)\|_\xi \quad (\xi \in \Xi), \quad (2)$$

где n однозначно определяется из условия $\xi \in \Xi_n$. Детальную проверку того, что (2) является мультинормой и что она определяет в X топологию проективного предела, мы опускаем ввиду простоты рассуждений. Докажем лишь, что если $\|x\|_\xi = 0$ для любого $\xi \in \Xi$, то $x = 0$. Действительно, по определению равенство $\|x\|_\xi = 0$ ($\xi \in \Xi$) равносильно равенству $\|\Omega_n(x)\|_\xi = 0$ ($\xi \in \Xi_n$; $n = 1, 2, \dots$), откуда $\Omega_n(x) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). В силу условия 2) леммы 1 имеем $x = 0$.

Из сказанного вытекает, в частности, что проективный предел есть отдельное пространство (разумеется, при условии отделимости пространств X_n).

З а м е ч а н и е 2. Операции Ω_n очевидно, непрерывны. Если в множестве X ввести топологию иным способом, но так, чтобы операции Ω_n остались непрерывными, то новая топология необходимо будет сильнее топологии проективного предела, так как и в новой топологии множества $\Omega_n^{-1}(V_n)$ должны быть окрестностями нуля.

З а м е ч а н и е 3. Если операции ω_n осуществляют взаимно-однозначное отображение и, следовательно, можно считать $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ то, беря в качестве модели обобщенного пересечения обычное пересечение множеств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, получим, что операции Ω_n есть операции отождествления: $\Omega_n(x) = x$. Система $\mathfrak{B}$ в этом случае состоит из всевозможных множеств вида $V_n \cap X$ ($V_n \in \mathfrak{B}_n$), а мультинорма в X есть объединение ультинорм в X_n .

5.3. Рассмотрим полное счетнонормируемое пространство X и последовательность связанных с ним нормированных пространств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ (см. XI.2.3). Будем считать, что мультинорма $\|x\|_n$ ($x \in X$, $n = 1, 2, \dots$) в пространстве X удовлетворяет условию

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_n \leq \dots \quad (x \in X).$$

Через $X^{(n)}$, как и в XI.2.3, будем обозначать множество всех $x \in X$ таких, что $\|x\|_n = 0$. Пусть $X \in X_{n+1}$. Класс X по составу элементов совпадает с множеством $x_0 + X^{(n+1)}$, где x_0 — произвольный элемент из X . Положим $\omega_n(X) = x_0 + X^{(n)}$. Элемент $\omega_n(X)$ не зависит от элемента x_0 , а определяется только классом X . Действительно, если $X = x' + X^{(n+1)}$, то $x_0 - x' \in X^{(n+1)} \subset X^{(n)}$ и $x' + X^{(n)} = x_0 + X^{(n)}$. Далее, так как $\|X\| = \|x_0\|_{n+1}$, а $\|\omega_n(X)\| = \|x_0\|_n$, то $\|\omega_n(X)\| \leq \|X\|$. Следовательно, ω_n — линейная опера-

ция ($\|\omega_n\| \leq 1$). Докажем, что $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$. Для этого определим операции Ω_n , полагая для $x \in X$

$$\Omega_n(x) = x + X^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

*) Последнее обстоятельство является также следствием приведенного ниже замечания 2.

Проверим условия леммы 1. Наличие первого условия вытекает из самого определения операций ω_n и Ω_n . Условие 2) есть следствие отделимости пространства X , так как если $\Omega_n(x) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то $x \in X^{(n)}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, откуда получаем $x = 0$. Пусть, наконец, последовательность $\{X_n\}$ удовлетворяет условию (1). Это означает, что $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$. Выберем в каждом классе X_n элемент x_n и рассмотрим разность $x_m - x_k$. Предполагая $m > k \geq n$, будем иметь $x_m - x_k \in X^{(k)} \subset X^{(n)}$, так что $\|x_m - x_k\|_n = 0$. Таким образом, вследствие полноты пространства X существует элемент x , к которому сходится последовательность $\{x_k\}$. Так как для $k \geq n$ элемент $x_k \in X_n$, а X_n , если его рассматривать как множество в X , замкнуто, то $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in X_n$. Поэтому $\Omega_n(x) = x + X^{(n)} = X_n$ и условие 3) также выполнено.

Изложенные соображения приводят к следующей теореме.

Теорема 1 (5. XI). Пусть X — полное счетнонормируемое пространство. Тогда $X = \lim \text{pr. } (X_n, \omega_n)$.

Действительно, мультиорма в $\lim \text{pr. } (X_n, \omega_n)$, определенная по формуле (2)

$$\|x\|_n^* = \|\Omega_n(x)\|_{X_n} \quad (n = 1, 2, \dots, *)$$

совпадает с имеющейся в X мультиормой, так как

$$\|\Omega_n(x)\| = \|x + X^{(n)}\| = \|x\|_n.$$

Замечание 1. Вместо пространств X_n в теореме можно говорить об их пополнениях $\bar{X}_n$. Действительно, операция ω_n , определенная на плотном в $\bar{X}_{n+1}$ множестве X_{n+1} , отображает его в полное пространство $\bar{X}_n$, так что ω_n можно распространить на все $\bar{X}_{n+1}$. Обозначая распространенную операцию по-прежнему через ω_n , отметим, что $\|\omega_n\| \leq 1$. Пусть $\bar{X} = \lim \text{pr. } (\bar{X}_n, \omega_n)$. Данное пространство X естественным образом вкладывается в пространство $\bar{X}$. Именно, если $x \in X$, то последовательность $\{\Omega_n(x)\} \in \bar{X}$. Отсюда, между прочим, следует, что указанное вложение есть гомеоморфизм, так как

$$\|x\|_k = \|\Omega_k(x)\| = \|\{\Omega_n(x)\}\|_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Докажем, что X плотно в $\bar{X}$. Пусть $z \in \bar{X}$. Элемент z есть такая последовательность $\{z_n\}$, что

$$z_n \in \bar{X}_n, \quad z_n = \omega_n(z_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдем элемент $X_n \in X_n$ так, что $\|X_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$. Поскольку $\Omega_n(X) = X_n$, найдется элемент $x_n \in X$ такой, что $X_n = \Omega_n(x_n)$. Проверим, что $x_n \rightarrow z$. Для этого, беря $n \geq m$, оценим m -ю ($m = 1, 2, \dots$) норму разности $x_n - z$. Имеем, учитывая, что $\|\omega_k\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|x_n - z\|_m &= \|\Omega_m(x_n) - z_m\| = \|\omega_m \Omega_{m+1}(x_n) - \omega_m(z_{m+1})\| \leq \\ &\leq \|\Omega_{m+1}(x_n) - z_{m+1}\| \leq \dots \leq \|\Omega_n(x_n) - z_n\| = \|X_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Итак, X плотно в $\bar{X}$, а так как X полное пространство, то $X = \bar{X}$.

Замечание 2. В силу замечания 1 из 5.2 ясно, что проективный предел последовательности счетнонормируемых пространств, в частности нормируемых пространств, снова является счетнонормируемым пространством.

*) В дальнейшем значок X_n у нормы в пространстве X_n опускается.

5.4. Изучение проективного предела последовательности пространств в известном смысле сводится к изучению этих пространств. Приведем относящиеся сюда предложения.

Выясним сначала характер сходимости в пространстве $X = \lim_{\leftarrow} \text{pr.} (X_n, \omega_n)$. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — обобщенная последовательность элементов пространства X , сходящаяся к $x \in X$. Поскольку операции Ω_n линейные, при любом $n = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\Omega_n(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha \in A} \Omega_n(x). \quad (3)$$

Наоборот, если соотношение (3) имеет место для всех $n = 1, 2, \dots$, то для любой полунормы в X

$$\|x_\alpha - x\|_\xi = \|\Omega_n(x_\alpha - x)\|_\xi \xrightarrow{\alpha \in A} 0$$

и $x_\alpha \rightarrow x$ в X .

Отсюда, между прочим, следует, что если все X_n — полные пространства, то и X будет таким же. Действительно, если $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — сходящаяся в себе обобщенная последовательность элементов пространства X , то, поскольку $x_\alpha - x_{\alpha'} \xrightarrow{(\alpha, \alpha') \in A^2} 0$, обобщенная последовательность $\{\Omega_n(x_\alpha)\}$ сходится в себе в пространстве X_n и, следовательно, существует $z_n = \lim_{\alpha \in A} \Omega_n(x_\alpha) \in X_n$.

Так как $\Omega_n(x_\sigma) = \omega_n \Omega_{n+1}(x_\sigma)$, то, переходя к пределу, получим $z_n = \omega_n(z_{n+1})$ ($n = 1, 2, \dots$). На основании леммы 1 существует элемент $x \in X$ такой, что $z_n = \Omega_n(x)$. Очевидно, $x_\alpha \rightarrow x$ в X .

Пусть, далее, E — ограниченное множество в X . Учитывая, что линейная операция ограничена, заключаем, что множества $\Omega_n(E)$ ограничены в X_n .

Наоборот, если все эти множества ограничены, то E ограничено в X . Это вытекает из того, что числовые множества $\{\|x\|_\xi\}$ ($x \in E$) ограничены, каково бы ни было $\xi \in \Xi$, так как каждое из них совпадает со множеством $\{\|\Omega_n(x)\|_\xi\}$ при некотором n .

Пусть, наконец, f — линейный функционал в пространстве X . В XI.2.3 было показано, что существует $\xi \in \Xi$ и число $N > 0$, так что

$$|f(x)| \leq N \|x\|_\xi \quad (x \in X).$$

А так как при некотором $n = 1, 2, \dots$

$$\|x\|_\xi = \|\Omega_n(x)\|_\xi,$$

то

$$|f(x)| \leq N \|\Omega_n(x)\|_\xi. \quad (4)$$

Отсюда следует, что если $\Omega_n(x) = 0$, то $f(x) = 0$ и, следовательно, имеет смысл выражение

$$F(z) = f(\Omega_n^{-1}(z)) \quad (z \in \Omega_n(X)).$$

Из (4) получаем

$$|F(z)| \leq N \|z\|_\xi \quad (z \in \Omega_n(X)),$$

так что F оказывается линейным функционалом в $\Omega_n(X)$. По теореме 4 (2. XI) F допускает распространение на все пространство X_n . Это распространение мы обозначим той же буквой F .

Если, наоборот, F — линейный функционал в одном из пространств X_n , то функционал f , определяемый формулой

$$f(x) = F(\Omega_n(x)) \quad (x \in X), \quad (5)$$

будет, очевидно, линейным функционалом в X .

Пользуясь теоремой 1 и высказанными выше соображениями, можно снова установить общий вид линейных функционалов в конкретных счетно-нормируемых пространствах, рассмотренных в XI.1.4.

5.5. Проективный предел есть предел «убывающей» последовательности пространств. Можно рассматривать и «возрастающие» последовательности. При этом мы приходим к понятию индуктивного предела.

Начнем опять с алгебраической конструкции. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность линейных множеств, «возрастающая» в том обобщенном смысле, что существуют аддитивные и однородные операции ω_n , отображающие X_n в X_{n+1} .

Лемма 2. Существует единственное (с точностью до изоморфизма) линейное множество X и аддитивные однородные операции Ω_n , отображающие X_n в X такие, что

$$1) \quad \Omega_n = \Omega_{n+1} \omega_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$2) \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(X_n);$$

3) если при некотором n будет $\Omega_n(x) = 0$, то существует $m \geq n$ такое, что $\omega_m \omega_{m-1} \dots \omega_n(x) = 0$.

Множество X называется обобщенным объединением множеств $X_1, X_2, \dots$

и обозначается $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$.

Доказательство. Образует множество X всевозможных пар (x, n) , где $x \in X_n$; $n = 1, 2, \dots$. Пары (x, n) и (y, m) будем считать равными, если существует $p \geq m, n$ такое, что

$$\omega_p \omega_{p-1} \dots \omega_n(x) = \omega_p \omega_{p-1} \dots \omega_m(y). \quad (6)$$

Ясно, что $(x, n) = (\omega_n(x), n+1)$. Это обстоятельство позволяет, рассматривая пары (x, n) и (y, m) , считать $n = m$. Пусть пары $(x, n), (y, m) \in X$. Считая $n = m$, положим

$$(x, n) + (y, m) = (x + y, n).$$

Нетрудно проверить, что замена слагаемых равными приводит к равной сумме. Аналогичное замечание справедливо и по отношению к произведению числового множителя λ на элемент $(x, n) \in X$, которое мы определим так.

$$\lambda(x, n) = (\lambda x, n).$$

В силу данных определений X становится, как это нетрудно проверить линейным множеством.*) Роль нулевого элемента играет при этом пара $(0, n)$ (и любая равная ей пара).

Множество X обладает требуемыми свойствами. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$\Omega_n(x) = (x, n) \quad (x \in X_n; n = 1, 2, \dots).$$

Пусть $\tilde{X}$ — линейное множество, и $\tilde{\Omega}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) операции, удовлетворяющие условиям леммы. Докажем, что $\tilde{X}$ изоморфно X . Пусть $(x, n) \in X$. Положим $\theta[(x, n)] = \tilde{\Omega}_n(x)$. Операция θ определена корректно в том смысле, что равные пары она преобразует в один и тот же элемент из $\tilde{X}$. Это вытекает из равенства

$$\theta[(\omega_n(x), n+1)] = \tilde{\Omega}_{n+1} \omega_n(x) = \tilde{\Omega}_n(x).$$

*) Строго говоря, линейным множеством будет не само X , а множество классов, состоящих из равных элементов. Чтобы не усложнять изложения, мы будем говорить, как это обычно делается, о самом X .

последовательное применение которого и дает требуемый результат. Операция θ очевидно аддитивна и однородна. Убедимся, что она осуществляет взаимно однозначное отображение X на $\tilde{X}$. Действительно, если $\theta[(x, n)] = 0$, т. е. если $\tilde{\omega}_n(x) = 0$, то по условию 3) при некотором $p \geq n$ будет $\omega_p \omega_{p-1} \dots \omega_n(x) = 0$, так что $(x, n) = (0, n)$ и пара (x, n) равна нулевому элементу множества X . Если, наконец, $\tilde{x}$ — произвольный элемент из $\tilde{X}$, то существует n и элемент $x \in X_n$ так, что $\tilde{x} = \tilde{\omega}_n(x)$. Ясно, что $\tilde{x} = \theta[(x, n)]$.

З а м е ч а н и е 1. Изоморфизм между X и $\tilde{X}$, установленный при доказательстве леммы, обладает тем свойством, что для любых $n = 1, 2, \dots$ и $x \in X_n$ элементы $\omega_n(x)$ и $\tilde{\omega}_n(x)$ соответствуют друг другу. В этом смысле операции ω_n определяются однозначно исходными данными.

З а м е ч а н и е 2. Если операции ω_n взаимно однозначны, то можно считать, что $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$. Операции ω_n , как это следует из условия 3), также должны быть взаимно однозначны, поэтому можно считать, что $X_n \subset X$. При этом согласно условию 1), если $x \in X_n$ и $x = \omega_n(x) \subset X_{n+1}$, то $\omega_n(x) = \omega_{n+1}\omega_n(x) = \omega_{n+1}(x)$, так что вложение $X_n \subset X$ можно рассматривать одновременно для всех $n = 1, 2, \dots$. При этом по условию 2)

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n(X_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

5.6. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ последовательность локально-выпуклых пространств, возрастающая в том же обобщенном смысле, что и выше. Будем предполагать операции ω_n непрерывными. Обозначим $X =$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n) \text{ и введем в } X \text{ топологию. Для этого обозначим через } \mathfrak{B}_n$$

систему всех выпуклых симметричных окрестностей нуля в пространстве $X_n (n = 1, 2, \dots)$ и рассмотрим последовательность $\{V_n\}$ такую, что

$$V_n \in \mathfrak{B}_n, \omega_n(V_n) \subset V_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как $\omega_{n+1}\omega_n(V_n) \subset \omega_{n+1}(V_{n+1})$, то по лемме 2 $\omega_n(V_n) \subset \omega_{n+1}(V_{n+1})$. Положим

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n(V_n), \quad (7)$$

и примем совокупность $\mathfrak{B}$ всех множеств указанного вида за фундаментальную систему окрестностей нуля в X . Проверка условий теоремы 1 (2. XI) не может вызвать затруднений, и мы ее опускаем. Локально-выпуклое пространство, в которое мы обратили X , называется *индуктивным пределом* последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ и обозначается $X = \lim \text{ind. } (X_n, \omega_n)$.

Сделаем несколько замечаний по поводу данного определения.

З а м е ч а н и е 1. Фундаментальную систему окрестностей нуля в пространстве $X = \lim \text{ind. } (X_n, \omega_n)$ можно построить и другим способом. Именно, пусть $\tilde{V}_n \in \mathfrak{B}_n (n = 1, 2, \dots)$; положим

$$\tilde{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\omega_1(\tilde{V}_1) + \omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \omega_n(\tilde{V}_n)]. \quad (8)$$

Тогда система $\tilde{\mathfrak{B}}$ всех множеств вида (6) будет фундаментальной системой окрестностей нуля в пространстве X .

Действительно, каждое множество $\tilde{V} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ есть окрестность нуля в X , так как, полагая

$$V_1 = \tilde{V}_1; \quad V_n = \omega_{n-1} \dots \omega_1(\tilde{V}_1) + \omega_{n-1} \dots \omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \tilde{V}_n \quad (n = 2, \dots),$$

получим

$$\omega_n(V_n) = \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_1(\tilde{V}_1) + \omega_n \omega_{n-1} \dots \omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \omega_n(\tilde{V}_n) \subset V_{n+1}$$

и

$$\Omega_n(V_n) = \Omega_1(\tilde{V}_1) + \Omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \Omega_n(\tilde{V}_n).$$

Следовательно,

$$\tilde{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(V_n),$$

т. е. $\tilde{V}$ имеет вид (7).

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $V \in \mathfrak{B}$. Пусть она определяется последовательностью $\{V_n\}$ ($V_n \in \mathfrak{B}_n$). Положим $\tilde{V}_n = \frac{1}{2^n} V_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1(\tilde{V}_1) + \Omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \Omega_n(\tilde{V}_n) &= \frac{1}{2} \Omega_1(V_1) + \frac{1}{4} \Omega_2(V_2) + \dots + \\ &+ \frac{1}{2^n} \Omega_n(V_n) \subset \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Omega_n(V_n) \subset \Omega_n(V_n). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\tilde{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\Omega_1(\tilde{V}_1) + \Omega_2(\tilde{V}_2) + \dots + \Omega_n(\tilde{V}_n)] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(V_n) = V,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при построении системы $\tilde{\mathfrak{B}}$ можно было исходить не из системы $\mathfrak{B}_n$, а из произвольной фундаментальной системы $\tilde{\mathfrak{B}}_n$ выпуклых окрестностей нуля в X_n ($n = 1, 2, \dots$).

З а м е ч а н и е 2. Операции Ω_n , отображающие X_n в $X = \lim \text{ind } (X_n, \omega_n)$ непрерывны, так как если $\tilde{V}$ — окрестность нуля в X вида (7), то $\Omega_n(V_n) \subset \tilde{V}$.

Предположим, что в множестве $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$ введена топология

$\tilde{\tau}$, вообще говоря, отличная от топологии τ индуктивного предела. Допустим, что пространство $[X, \tilde{\tau}]$ — линейное топологическое. Тогда, если операции Ω_n ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны, как операции из X_n в $[X, \tilde{\tau}]$, то $\tilde{\tau} \leq \tau$.

В самом деле, пусть W — произвольная окрестность нуля пространства $[X, \tilde{\tau}]$. Найдем последовательно такие окрестности W_n ($n = 1, 2, \dots$) нуля пространства $[X, \tilde{\tau}]$, что

$$W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n \quad (n = 0, 1, \dots; \quad W_0 = W).$$

Ввиду непрерывности операции Ω_n существует $V_n \in \mathfrak{B}_n$ такая, что $\Omega_n(V_n) \subset W_n$. Исходя из последовательности $\{V_n\}$, построим окрестность $V \in \tilde{\mathfrak{B}}$ вида (8). Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_1(V_1) + \Omega_2(V_2) + \dots + \Omega_n(V_n) &\subset W_1 + W_2 + \dots + W_n \subset \\ &\subset W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} + W_{n-1} \subset W_1 + \dots + W_{n-2} + W_{n-2} \subset \dots \\ &\dots \subset W_1 + W_1 \subset W, \end{aligned}$$

откуда

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\Omega_1(V_1) + \Omega_2(V_2) + \dots + \Omega_n(V_n)] \subset W.$$

З а м е ч а н и е 3. Выпуклое множество $V \subset X$ является окрестностью нуля в пространстве $X = \lim \text{ind.} (X_n, \omega_n)$ тогда и только тогда, когда множества $V_n = \Omega_n^{-1}(V)$ суть окрестности нуля в пространствах X_n ($n=1, 2, \dots$).

Действительно, если V_n — окрестность нуля в X_n ($n=1, 2, \dots$), то поскольку $\Omega_n = \Omega_{n+1}\omega_n$, для $x \in V_n$ имеем $\Omega_n(x) = \Omega_{n+1}\omega_n(x)$. Но $\Omega_n(x) \in V$, поэтому $\omega_n(x) \in \Omega_{n+1}^{-1}(V) = V_{n+1}$. Таким образом, $\omega_n(V_n) \subset V_{n+1}$. Аналогичное соотношение будет иметь место и для симметричных окрестностей $V_n^0 = V_n \cap (-V_n)$. Если построить окрестность V^0 вида (7), исходя из последовательности $\{V_n^0\}$, то, очевидно, $V^0 \subset V$, откуда и следует, что V есть окрестность нуля в пространстве X .

Если, наоборот, V есть окрестность нуля в X , то V_n будут окрестностями нуля в X_n в силу непрерывности операций Ω_n .

Следует, однако, иметь в виду, что для замкнутых множеств аналогичный факт уже не имеет, вообще говоря, места. Чтобы пояснить отмеченное обстоятельство, рассмотрим в X топологию $\tilde{\tau}$, которую зададим, указав систему всех замкнутых множеств. Именно, будем считать множество $F \subset X$ замкнутым, если в пространствах X_n замкнуты множества $F_n = \Omega_n^{-1}(F)$ ($n=1, 2, \dots$). Нетрудно проверить, что таким образом мы действительно обращаем X в топологическое пространство, причем ясно, что топология τ индуктивного предела слабее топологии $\tilde{\tau}$. Очевидно также, что операции Ω_n из пространства X_n в пространство $[X, \tilde{\tau}]$ непрерывны. Все сказанное не дает все же основания применить замечание 2, так как $[X, \tilde{\tau}]$ может не быть линейным топологическим пространством, т. е. в топологии $\tilde{\tau}$ алгебраические операции в X могут не быть непрерывными. Можно, однако, доказать, что они счетно-непрерывны, т. е. из $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$ в пространстве $[X, \tilde{\tau}]$ следует $x_n + y_n \rightarrow 0$ и аналогично для произведения. Доказательство этого интересного факта мы предоставляем читателю.

З а м е ч а н и е 4. Введем обозначение $Z_n = \Omega_n(X_n)$ ($n=1, 2, \dots$). В Z_n определим топологию, принимая за окрестность нуля любое множество вида $W_n = \Omega_n(V_n)$, где V_n — произвольная окрестность нуля в X_n . Нетрудно видеть, что при этом Z_n будет топологически эквивалентно фактор-пространству X_n/X_n^0 , где X_n^0 есть множество тех элементов $x \in X_n$, для которых $\Omega_n(x) = 0$.

Пространства Z_n образуют возрастающую последовательность. Обозначая операцию (очевидно, линейную) вложения Z_n в Z_{n+1} через $\tilde{\omega}_n$ без труда проверим, что $X = \lim \text{ind.} (Z_n, \tilde{\omega}_n)$. Это обстоятельство показывает, что свойства индуктивного предела определяются, по существу, не самими пространствами X_n , а фактор-пространствами Z_n . В связи с этим мы будем в дальнейшем считать, не оговаривая этого каждый раз специально, что операции ω_n взаимно однозначны, т. е. что переход к пространствам Z_n уже осуществлен. При этом, отождествляя соответствующие элементы пространств X_n и X_{n+1} , будем считать, что $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$. Поскольку в таком случае $\omega_n(x) = x$ в обозначении индуктивного предела нет надобности упоминать об операциях ω_n , и мы будем просто писать $X = \lim \text{ind.} X_n$.

З а м е ч а н и е 5. Пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Операция вложения пространства X_{n_k} в пространство $X_{n_{k+1}}$ непрерывна. Поэтому можно рассматривать пространство $\tilde{X} = \lim \text{ind.} X_{n_k}$. Оно совпадает с $X = \lim \text{ind.} X_n$.

Несложные рассуждения в обоснование приведенного утверждения читатель, несомненно, проведет самостоятельно.

З а м е ч а н и е 6. Пусть U — аддитивная и однородная операция, отображающая пространство $X = \lim \text{ind. } X_n$ в линейное топологическое пространство Y . Рассматривая операцию U лишь на элементах из X_n , получим операцию U_n , отображающую пространство X_n в Y . Для того чтобы операция U была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы все U_n ($n = 1, 2, \dots$) были непрерывны.

Действительно, $U_n = U\Omega_n$, откуда и следует необходимость условия. Пусть, наоборот, все операции U_n непрерывны. Введем в X топологию $\tilde{\tau}$, принимая в качестве окрестностей нуля всевозможные множества вида $U^{-1}(W)$, где W — произвольная окрестность нуля в Y . Поскольку

$$U_n^{-1}(W) = U^{-1}(W) \cap X_n = \Omega_n^{-1}(U^{-1}(W)) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а операция U_n непрерывна и, следовательно, $U_n^{-1}(W)$ есть окрестность нуля в X_n , операция Ω_n вложения пространства X_n в пространство $[X, \tilde{\tau}]$ непрерывна. Применяя сформулированный в замечании 2 результат, находим, что топология $\tilde{\tau}$ слабее топологии τ индуктивного предела, а это и означает непрерывность операции U .

5.7. Выясним структуру множества линейных функционалов в пространстве $X = \lim \text{ind. } X_n$.

Рассмотрим линейную операцию U , отображающую некоторое локально-выпуклое пространство X в другое локально-выпуклое пространство Y . В соответствии с определением из IX.3.1. операция U^* :

$$f = U^*(g), \quad f(x) = g(U(x)) \quad (f \in X', g \in Y', x \in X),$$

отображающая множество Y' в множество X' , называется *сопряженной* по отношению к данной операции U . Непосредственно из определения ясно, что U^* — линейная операция из пространства $[Y', \sigma]$ в пространство $[X', \sigma]$. Так как данная операция U ограничена, то U^* будет линейной операцией и из Y^* в X^* .

Теорема 2 (5. XI). Пусть $X = \lim \text{ind. } X_n$. Тогда $X' = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X'_n, \omega_n^*)$.

Доказательство. Докажем, что множество X' и последовательности $\{X'_n\}$, $\{\omega_n^*\}$, $\{\Omega_n^*\}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Отметим прежде всего, что, поскольку операции Ω_n отображают X_n в X , операции Ω_n^* отображают X' в X'_n . Далее, соотношение $\Omega_n = \Omega_{n+1}\omega_n$ влечет очевидным образом соотношение $\Omega_n^* = \omega_n^*\Omega_{n+1}^*$, наличие которого и является первым условием леммы 1.

Предположим, что $\Omega_n^*(f) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Это означает, что

$$f(\Omega_n(x)) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots; x \in X).$$

Так как $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(X_n)$, то отсюда ясно, что $f = 0$. Тем самым второе условие леммы 1 также выполнено.

Проверим третье условие. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ такую, что

$$f_n \in X'_n, \quad f_n = \omega_n^*(f_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пусть $x \in X$. При некотором n будет $x \in X_n$. Положим

$$f(x) = f_n(x).$$

Так как $f_n(x) = f_{n+1}(\omega_n(x)) = f_{n+1}(x)$, то для $m \geq n$ будет $f_n(x) = f_m(x)$. Таким образом, функционал f не зависит от выбора n и определяется только последовательностью $\{f_n\}$. На основании замечания 6 из 5.6 функционал $f \in X'$. То, что $\Omega_n^*(f) = f_n$ непосредственно вытекает из определения функционала f .

Следствие. Если в каждом из пространств X_n всякий ограниченный функционал линеен, то и в пространстве X ограниченные функционалы линейны.

Действительно, если f — ограниченный функционал в X , то, учитывая ограниченность операции Ω_n , заключаем, что функционал $f_n(x) = f(\Omega_n(x))$ ($x \in X_n$) будет ограниченным, а следовательно, и линейным функционалом в X_n . Остается применить замечание 6 из 5.6.

З а м е ч а н и е. Небольшое усложнение рассуждений позволит доказать теорему и следствие без предположения о взаимной однозначности отображений ω_n .

5.8. Укажем еще на одно свойство индуктивного предела.

Теорема 3 (5. XI). Если все пространства X_n борнологические, соответственно, тоннельные, то и пространство $X = \lim \text{ind. } X_n$ борнологическое, соответственно, тоннельное.

Доказательство. Пусть X_n — борнологические пространства. Рассмотрим выпуклое множество V , поглощающее каждое ограниченное в X множество. Обозначим $V_n = \Omega_n^{-1}(V) = V \cap X_n$ и пусть E — какое-нибудь ограниченное в X_n множество. Так как Ω_n — непрерывная операция, то множество $E = \Omega_n(E)$ будет ограниченным в X . Следовательно, при достаточно большом $\lambda > 0$ будет $\lambda V \supset E$ и, тем самым, $\lambda V_n \supset E$. Таким образом, выпуклое множество V_n поглощает любое ограниченное в X_n множество и потому является окрестностью нуля в пространстве X_n . По замечанию 3 из 5.6 множество V будет окрестностью нуля в X .

Случай тоннельных пространств исчерпывается аналогичными рассуждениями.

5.9. Дальнейшее изучение индуктивного предела в общем случае представляет весьма значительные трудности. Поэтому ниже мы подчиним эту конструкцию некоторым дополнительным требованиям.

Множество $E \subset X = \lim \text{ind. } X_n$ будем называть *регулярно ограниченным*, если существует такое m , что $E \subset X_m$ и ограничено в X_m . Ясно, что регулярно ограниченное множество ограничено в X . Обратное может и не быть верным, даже если X_n — нормированные пространства. Если каждое ограниченное в X множество регулярно ограничено, то будем говорить, что X — *регулярный индуктивный предел* последовательности $\{X_n\}$.

Регулярный индуктивный предел локально-выпуклых пространств обладает многими хорошими свойствами. Например, он является отдельным пространством. Действительно, если $x_0 \neq 0$ элемент, содержащийся в каждой окрестности нуля пространства X , то множество $\{\lambda x_0\}$ ($\lambda > 0$) также содержится в каждой окрестности нуля и потому ограничено в X ; но тогда оно должно быть ограничено и в некотором X_m , что невозможно ввиду отдельности пространства X_m .

Докажем еще теорему, дополняющую результат теоремы 2.

Теорема 4 (5. XI). Пусть X — регулярный индуктивный предел последовательности $\{X_n\}$. Тогда $X^* = \lim \text{pr. } (X_n^*, \omega_n^*)$.

Доказательство. На основании теоремы 2 $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n', \omega_n^*)$.

Далее, поскольку Ω_n^* суть непрерывные операции из X^* в X_n^* , топология $\tau_{\text{pr.}}^*$.

проективного предела $\lim \text{pr.} (X_n^*, \omega_n^*)$ слабее топологии τ^* пространства X^* (замечание 2 из 5.2). Покажем, что одновременно $\tau^* \leq \tau_{\text{pr.}}^*$. Возьмем окрестность нуля V в пространстве X^* , имеющую вид $V = \pi^*(E)$, где E — ограниченное множество в X . Множество E регулярно ограничено, т. е. существует такое m , что $E \subset X_m$ и ограничено в X_m . Обозначим $V_m = \pi_m^*(E)$, где π_m означает поляру, лежащую в X_m^* , т. е. множество всех функционалов $g \in X_m'$, для которых $g(E) \subset [-1, 1]$. Множество V_m является окрестностью нуля в пространстве X_m^* и поэтому $\Omega_m^{*-1}(V_m)$ есть окрестность нуля в пространстве $[X', \tau_{\text{pr.}}]$. Но если $f \in X'$ входит в $\Omega_m^{*-1}(V_m)$, то $g = \Omega_m^*(f) \in V_m$, т. е. для $x \in E$ будет $|g(x)| = |f(\Omega_m^*(x))| \leq 1$. Так как $\Omega_m^*(x) = x$, то, следовательно, $f(E) \subset [-1, 1]$, и $f \in V$. Таким образом, $\Omega_m^{*-1}(V_m) \subset V$, что и доказывает соотношение $\tau^* \leq \tau_{\text{pr.}}^*$, а вместе с ним и теорему.

Простые и вместе с тем нетривиальные необходимые и достаточные условия регулярности индуктивного предела, к сожалению, неизвестны. Ниже при различных дополнительных предположениях мы укажем некоторые достаточные условия. Они опираются на следующую лемму.

Лемма 3. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$ в пространстве X_n существует выпуклая симметричная окрестность нуля V_n^0 , замкнутая в пространстве $X = \lim \text{ind.} X_n$, причем $V_1^0 \subset V_2^0 \subset \dots \subset V_n^0 \subset \dots$. Тогда для любого ограниченного в X множества E найдется номер m и $\lambda > 0$ такие, что $E \subset \lambda V_m^0$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого ограниченного в X множества E утверждение леммы неверно. Это значит, что из E можно выделить последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$x_n \notin nV_n^0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Обозначим $y_n = \frac{1}{n} x_n$. В силу теоремы 2 (1. XI) $y_n \rightarrow 0$ в X . Вместе с тем

$$y_n \notin V_n^0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Положим $V_1 = V_1^0$. Так как множество V_1 замкнуто в X , а $y_1 \in V_1$, то существует выпуклая симметричная окрестность нуля V^1 в пространстве X такая, что $y_1 + 2V^1 \cap V_1 = \Lambda$. Или иначе: $y_1 + V^1 \cap V^1 + V_1 = \Lambda$, так что $y_1 \in \overline{V^1 + V_1}$.*) Множество $\overline{V^1 + V_1}$ является выпуклой симметричной окрестностью нуля в пространстве X , поэтому пересечение $\overline{V^1 + V_1} \cap X_2$ есть окрестность нуля (также выпуклая и симметричная) в пространстве X_2 . Этим же свойством будет обладать и множество $V_2 = \overline{V^1 + V_1} \cap V_2^0$. Ясно, что $V_2 \supset V_1$. Кроме того, V_2 , очевидно, замкнуто в X . Поскольку $y_1, y_2 \in V_2$, можно с помощью аналогичных построений найти выпуклую симметричную окрестность нуля V^2 в пространстве X так, что $y_1, y_2 \in \overline{V^2 + V_2}$. Полагая, как и выше, $V_3 = \overline{V^2 + V_2} \cap V_3^0$, без труда убедимся, что V_3 — выпуклая симметричная окрестность нуля в пространстве X_3 , содержащая V_2 ,

*) Символ $\overline{A}$ на протяжении всего доказательства используется для обозначения замыкания множества A в пространстве X .

замкнута в X . Продолжая описанный процесс, приходим к возрастающей последовательности $\{V_n\}$, где V_n — выпуклая симметричная окрестность нуля в пространстве X_n , причем

$$y_k \in V_n \quad (k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Так как для $k > n$ будет $y_k \in V_k^0 \supset V_n^0 \supset V_n$, то соотношение (9) выполнено для всех $k, n = 1, 2, \dots$. Таким образом, множество $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, яв-

ляясь окрестностью нуля в пространстве X , не содержит ни одного элемента последовательности $\{y_k\}$, что противоречит тому, что $y_k \rightarrow 0$ в X .

З а м е ч а н и е. Условие леммы выполнено, если каждое пространство X_n замкнуто в X . Действительно, в этом случае можно принять $V_n^0 = X_n (n = 1, 2, \dots)$.

5.10. В условиях леммы 3, вообще говоря, нельзя утверждать, что всякое ограниченное множество регулярно ограничено. Мы рассмотрим два случая, когда при определенных дополнительных предположениях регулярность индуктивного предела будет иметь место.

Теорема 5 (5. XI). Пусть имеется возрастающая последовательность локально-выпуклых пространств $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$, причем каждое пространство X_n является подпространством X_{n+1} , т. е. X_n замкнуто в X_{n+1} и топология τ_n пространства X_n совпадает с топологией $\tau_n^{(n+1)}$, которая наводится в X_n топологией пространства X_{n+1} . Тогда $X = \lim \text{ind. } X_n$ есть регулярный индуктивный предел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что каждое X_n является подпространством пространства X , т. е. что топология τ_n совпадает с топологией $\tau^{(n)}$, которую индуцирует в X_n топология пространства X , и что X_n замкнуто в X .

Поскольку для каждого индуктивного предела $\tau^{(n)} \leq \tau_n$, надо доказать только, что $\tau_n \leq \tau^{(n)}$. Не уменьшая общности, можно считать $n = 1$. Пусть V_1 — выпуклая окрестность нуля в X_1 . По условию теоремы существует выпуклая окрестность нуля V_2 в пространстве X_2 такая, что $V_2 \cap X_1 \subset V_1$. Продолжая рассуждения, найдем последовательность $\{V_n\}$ такую, что каждая V_n есть выпуклая окрестность нуля в пространстве X_n и

$$V_n \supset V_{n+1} \cap X_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Положим

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{4} V_2 + \dots + \frac{1}{2^n} V_n \right].$$

Множество V в силу замечания 1 из 5.6. есть окрестность нуля в пространстве X . А так как вследствие соотношения между окрестностями V_n

$$\left[\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{4} V_2 + \dots + \frac{1}{2^n} V_n \right] \cap X_1 \subset \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{4} V_1 + \dots + \frac{1}{2^n} V_1 \subset V_1,$$

то $V \cap X_1 \subset V_1$, следовательно, $\tau_1 \leq \tau^{(1)}$.

Докажем замкнутость множества X_n в пространстве X . Пусть $x \in X_n$. Можно указать $m > n$ так, что $x \in X_m$. Так как X_n замкнуто в каждом из пространств $X_{n+k} (k = 1, 2, \dots)$ и, в частности, в пространстве X_m , то найдется окрестность $V_x^{(m)}$ точки x в пространстве X_m такая, что $V_x^{(m)} \cap X_n = \Delta$. Но $V_x^{(m)} = V_x \cap X_m$, где V_x — окрестность точки x в пространстве X . Ясно, что $X_n \cap V_x = \Delta$. Замкнутость множества X_n доказана.

Таким образом, применима лемма 3, на основании которой для любого ограниченного в X множества E существует номер m такой, что $E \subset X_m$. Множество E будет ограничено в пространстве $[X_m, \tau^{(m)}]$, которое по доказанному совпадает с X_m .

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) — ограниченная обобщенная последовательность элементов пространства X , сходящаяся к нулю в X . По доказанному существует m такое, что $x_\alpha \in X_m$ ($\alpha \in A$). Ввиду совпадения топологий τ_m и $\tau^{(m)}$ будет $x_\alpha \rightarrow 0$ в X_m .

С л е д с т в и е. Если в условиях теоремы пространства X_n ограниченно-полные, то и X — ограниченно-полное пространство.

Рассмотрим последовательность пространств $D_n^\circ = D_{[-n, n]}^\circ$ ($n = 1, 2, \dots$) (см. XI. 1.4). Она удовлетворяет условиям теоремы 5. Поэтому для пространства $D^\circ = \lim \text{ind. } D_n^\circ$ справедливы все заключения упомянутой теоремы. В частности, $x_k \rightarrow 0$ в D° означает, что существует такое m , что $x_k \in D_m^\circ$ ($k = 1, 2, \dots$) и $x_k \rightarrow 0$ в D_m° , т. е. $x_k^{(s)}(t) \rightarrow 0$ равномерно относительно $t \in [-m, m]$ при каждом $s = 0, 1, 2, \dots$.

Линейные функционалы в пространстве D° называются *обобщенными функциями* (в $(-\infty, \infty)$). Согласно теореме 2 каждая обобщенная функция f в $(-\infty, \infty)$ индуцирует последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций в промежутке $[-n, n]$, причём

$$f_n(x) = f(x) \quad (x \in D_n^\circ).$$

Обобщенную функцию f_n будем называть *усечением* обобщенной функции f в промежутке $[-n, n]$.

Как и для конечного промежутка, производной обобщенной функции f называется функционал f' :

$$f'(x) = -f(x') \quad (x \in D^\circ).$$

Поскольку на основании теоремы 3 пространство D° борнологическое, для проверки того, что f' является обобщенной функцией, достаточно установить счетную непрерывность функционала f' (теорема 8 (2. XI)). Если учесть характер сходимости в пространстве D° , то указанное обстоятельство становится вполне очевидным.

Из самого способа определения производной обобщенной функции вытекает, что усечение производной есть производная усечения.

5.11. В случае, когда все пространства X_n нормированные, применение леммы 3 приводит к следующему результату. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$ замкнутая единичная сфера S_n в пространстве X_n замкнута в пространстве $X = \lim \text{ind. } X_n$. Ввиду непрерывности операции вложения ω_n можно найти такие положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ что $\lambda_1 S_1 \subset \lambda_2 S_2 \subset \dots \subset \lambda_n S_n \subset \dots$. Полагая в лемме 3 $V_n^0 = \lambda_n S_n$, заключаем, что рассматриваемый индуктивный предел регулярен.

Для доказательства замкнутости сфер S_n в пространстве X оказывается полезной следующая

Л е м м а 4. Пусть пространства X_n таковы, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ и произвольных положительных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ множество $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n S_n$ замкнуто в пространстве X_{n+1} . Тогда пространство $X = \lim \text{ind. } X_n$ отделимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 — отличный от нулевого элемент пространства X . Можно считать $x_0 \in X_1$. Найдется $\lambda_1 > 0$ такое, что $x_0 \notin \lambda_1 S_1$. Множество $\lambda_1 S_1$ замкнуто в пространстве X_2 , поэтому можно указать $\lambda_2 > 0$ так, что $x_0 + \lambda_2 S_2 \cap \lambda_1 S_1 = \Lambda$, т. е. $x_0 \notin \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$.

Рассуждая так и дальше, по индукции найдем последовательность $\{\lambda_n\}$ положительных чисел такую, что

$$x_0 \in V_n = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n S_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и, следовательно $x_0 \in V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Но V есть окрестность нуля в пространстве X . Отделимость пространства X доказана.

Теорема 6 (5. XI). * Если все пространства X_n рефлексивны, то $X = \lim \text{ind. } X_n$ есть регулярный индуктивный предел.

Доказательство. На основании теоремы 9 (4. XI) сфера S_n компактна в себе в пространстве $[X_n, \sigma]$. Операция вложения ω_n пространства X_n в X_{n+1} непрерывна. Тогда она будет непрерывной и если ее рассматривать как операцию из пространства $[X_n, \sigma]$ в пространство $[X_{n+1}, \sigma]$. На основании теоремы 4 (5. I) множество $S_n = \omega_n(S_n)$ компактно в себе в пространстве $[X_{n+1}, \sigma]$. Аналогичным образом любая сфера S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) компактна в себе в пространстве $[X_{n+1}, \sigma]$. В силу предложения IV из XI. 1.2 множество $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n S_n$ также компактно в себе в пространстве $[X_{n+1}, \sigma]$ и, следовательно, замкнуто в этом пространстве. Тем более указанное множество замкнуто в пространстве X_{n+1} . Итак, выполнены условия леммы 4, на основании которой X — отделимое пространство. Пространство $[X, \sigma]$ также отделимо, поэтому снова применяя теорему 4 (5. I), на этот раз к операции Ω_n , заключаем, что S_n слабо компактно в себе в пространстве X и, следовательно, замкнуто в этом пространстве. Заключение теоремы получается отсюда, если воспользоваться замечанием, сделанным в начале пункта.

Следствие. В условиях теоремы пространство X рефлексивно.

Действительно, если E — симметричное выпуклое ограниченное замкнутое в X множество, то по доказанному существует m такое, что E содержится и ограничено в X_m . Так как E , будучи замкнутым в X , замкнуто и в X_m , то по теореме 9 (4. XI) оно слабо компактно в себе в пространстве X_m и, тем более, в пространстве X . Снова на основании теоремы 9 (4. XI) заключаем, что X полурефлексивно, а так как в силу теоремы 3 оно тоннельно, то, следовательно, и рефлексивно.

В качестве примера рассмотрим последовательность пространств $L^2 \subset L^{\frac{3}{2}} \subset \dots \subset L^{\frac{n+1}{n}} \subset \dots$. Положим $L^{1+0} = \lim \text{ind. } L^{\frac{n+1}{n}}$. Докажем, что если $x_k \rightarrow 0$ в L^{1+0} , то при некотором m будет $x_k \in L^{\frac{m+1}{m}}$ и $x_k \rightarrow 0$ в $L^{\frac{m+1}{m}}$.

В самом деле, первая часть этого предложения вытекает из ограниченности последовательности $\{x_k\}$. Более того, при некотором s последовательность $\{x_k\} \subset L^{\frac{s+1}{s}}$ и ограничена в $L^{\frac{s+1}{s}}$. Пусть, например,

$$\|x_k\|_{\frac{s+1}{s}} \leq A \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как топология пространства L слабее топологии пространства L^{1+0} , то $x_k \rightarrow 0$ в пространстве L и, тем более в пространстве S , т. е. по мере. Обозначим через Φ функцию

$$\Phi(u) = u^{\frac{1}{s(s+2)}} \quad (u \geq 0).$$

*) См. [75]. Оттуда же заимствована идея доказательства леммы 3 и 4.

Имеем

$$\left[\int_0^1 |x_k(t)|^{\frac{s+2}{s+1}} \Phi\left(|x_k(t)|^{\frac{s+2}{s+1}}\right) dt \right]^{\frac{s}{s+1}} = \left[\int_0^1 |x_k(t)|^{\frac{s+1}{s}} dt \right]^{\frac{s}{s+1}} = \\ = \|x_k\|_{\mathbf{L}^{\frac{s+1}{s}}}^{\frac{s+1}{s}} \leq A \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, в силу известной теоремы Валле-Пуссена (Натансон-II, стр. 176) функции $|x_k(t)|^{\frac{s+2}{s+1}}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы, а тогда по теореме Витали (Натансон-II, стр. 168) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_{\mathbf{L}^{\frac{s+2}{s+1}}}^{\frac{s+2}{s+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 |x_k(t)|^{\frac{s+2}{s+1}} dt \right]^{\frac{s+1}{s+2}} = 0,$$

т. е. $x_k \rightarrow 0$ в пространстве $\mathbf{L}^{\frac{s+2}{s+1}}$, что и требовалось доказать.

Понятно, что результат остается верным, если вместо промежутка $[0, 1]$ рассмотреть произвольное измеримое множество конечной меры. Аналогичные рассуждения можно провести и для пространства $\mathbf{L}^{p+0}$ — индуктивного предела последовательности $\{\mathbf{L}^{p_n}\}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n > \dots$ и $p_n \rightarrow p \geq 1$.

5.12. Другой важный случай, когда можно применить замечание, сделанное в 5.11, состоит в том, что операции вложения ω_n вполне непрерывны.

Теорема 7 (5. XI). Пусть $\{X_n\}$ — возрастающая последовательность B -пространств, причем операции вложения ω_n вполне непрерывны. Тогда $X = \lim \text{ind. } X_n$ есть регулярный индуктивный предел.

Доказательство. Обозначим, как и выше, через S_n единичную замкнутую сферу пространства X_n . Не уменьшая общности, можно считать, что $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$. Пусть, далее, $\tilde{S}_n$ — замыкание множества S_n в пространстве X_{n+1} . Положим

$$\tilde{X}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \tilde{S}_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Множество $\tilde{X}_n$ становится нормированным пространством, если принять $\tilde{S}_n$ за единичную сферу. Отметим, что $X_n \subset \tilde{X}_n \subset X_{n+1}$ и операции $\omega_n^{(1)}$ и $\omega_n^{(2)}$ вложения X_n в $\tilde{X}_n$ и, соответственно, $\tilde{X}_n$ в X_{n+1} оказываются непрерывными, так как $S_n \subset \tilde{S}_n \subset S_{n+1}$. Положим

$$Y_{2k-1} = X_k, \quad Y_{2k} = \tilde{X}_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Согласно замечанию 5 из 5.6

$$X = \lim \text{ind. } X_n = \lim \text{ind. } Y_n = \lim \text{ind. } \tilde{X}_n.$$

Рассматривая X как индуктивный предел последовательности $\{\tilde{X}_n\}$ и повторяя рассуждения доказательства теоремы 6 с той лишь разницей, что в данном случае надо говорить не о слабой компактности в себе,

а о компактности в себе в исходных пространствах $(\tilde{X}_{n+1} \text{ и } X)$, получим, что X есть регулярный индуктивный предел последовательности $\{\tilde{X}_n\}$.

Если E — ограниченное в X множество, то по доказанному существует такое m , что E содержится и ограничено в $\tilde{X}_m$. Но тогда $E \subset X_{m+1}$ и ограничено в X_{m+1} . Теорема доказана.

Локально-выпуклое пространство, являющееся индуктивным пределом последовательности B -пространств, вложенных друг в друга вполне непрерывно, называется LN^* -пространством.

Следствие 1. Если $x_k \rightarrow 0$ в LN^* -пространстве X , то существует такое m , что $x_k \in X_m$ ($k = 1, 2, \dots$) и $x_k \rightarrow 0$ в X_m .

Действительно, так как последовательность $\{x_k\}$ ограничена в X , то согласно теореме найдется пространство X_m , содержащее последовательность $\{x_k\}$, и в котором эта последовательность ограничена. Докажем, что $x_k \rightarrow 0$ в X_{m+1} . В противном случае найдется $\lambda > 0$ и последовательность $\{x_{k_j}\}$ так, что

$$x_{k_j} \bar{\in} \lambda S_{m+1} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Последовательность $\{x_{k_j}\}$ ограничена в X_m и, значит, компактна в X_{m+1} . Выделим из нее сходящуюся в X_{m+1} подпоследовательность $\{x_{k_{j_i}}\}$. Пусть, например, $x_{k_{j_i}} \rightarrow x$. Ясно, что $x_{k_{j_i}} \rightarrow x$ и в пространстве X , откуда, вследствие отделимости пространства X , заключаем $x = 0$, что, однако, невозможно ввиду (10).

Следствие 2. Каждое ограниченное в X множество компактно в X . В самом деле, пусть E — ограниченное и замкнутое в X множество. Согласно теореме E содержится и ограничено в некотором X_m и, тем самым, компактно в пространстве X_{m+1} . Будучи замкнутым в пространстве X и тем более в пространстве X_{m+1} , множество E компактно в себе в X_{m+1} и, следовательно, в X .

Следствие 3. LN^* -пространство рефлексивно.

Типичный пример LN^* -пространства связан со следующей конструкцией (см. [3]). Пусть X_0 — B -пространство и U — вполне непрерывная операция, взаимно-однозначно отображающая X_0 в себя. Будем считать, кроме того, что $\|U\| \leq 1$.

Рассмотрим множество X всевозможных пар (x, n) , где $x \in X_0$, а $n \geq 0$ целое число. Пары (x, n) и (x', n') будем считать равными, если (в случае $n' \geq n$) $x' = U^{n'-n}(x)$. отождествляя равные пары и сохраняя, как обычно, за получившимся таким образом множеством то же обозначение X , введем в X алгебраические операции. Если $\xi = (x, n)$ и $\eta = (y, m)$ элементы из X , а λ число, то, предполагая $n \geq m$, положим

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= (x, n) + (y, m) = (x, n) + (U^{n-m}(y), n) = (x + U^{n-m}(y), n) \\ \lambda \xi &= \lambda(x, n) = (\lambda x, n). \end{aligned}$$

Ясно, что в силу данного определения X становится линейным множеством, причем роль нулевого элемента будет играть любая пара $(0, n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Отметим, кстати, что, кроме указанных, этим свойством не будет обладать никакая другая пара, так как если $(x, n) = 0$, то при некотором r должно быть $U^r(x) = 0$, откуда ввиду взаимной однозначности операции U следует $x = 0$.

Множество X естественным образом распадается на множество X_n , состоящие из пар (x, n) с данным $n = 1, 2, \dots$. При этом, очевидно, $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$. отождествляя элементы $x \in X_0$ с парами $(x, 0)$, можно считать, также, что $X_0 \subset X_1$. Множества X_n линейные. Введем в X_n норму, полагая для $\xi = (x, n) \in X_n$

$$\|\xi\|_n = \|x\| \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (11)$$

При этом для $x \in X_0$ будет $\|(x, 0)\|_0 = \|x\|$. Поскольку

$$\xi = (x, n) = (U(x), n+1) = \dots = (U^r(x), n+r) = \dots,$$

то

$$\|\xi\|_0 \geq \|\xi\|_1 \geq \dots \geq \|\xi\|_n \geq \dots \quad (\xi \in X). \quad (12)$$

Здесь мы считаем $\|\xi\|_n = \infty$, если $\bar{\xi} \notin X_n$.

Построенные нормированные пространства X_n полные. Действительно, в силу (11) они линейно изометричны исходному пространству X_0 .

Вследствие (12) операция ω_n вложения пространства X_n в X_{n+1} линейна. Далее, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Поэтому в X можно ввести топологию индуктивного предела последовательности B -пространств $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$. Впредь, говоря о X , мы будем считать его топологизированным указанным образом.

Докажем полную непрерывность операций вложения ω_n . Пусть $\xi_m = (x_m, n)$, причем последовательность $\{\xi_m\}$ ограничена в X_n . Это означает, что последовательность $\{x_m\}$ ограничена в X_0 . Поэтому из последовательности $\{U(x_m)\}$ можно выделить сходящуюся (в пространстве X_0) подпоследовательность $\{U(x_{m_k})\}$. Если, например, $U(x_{m_k}) \rightarrow x$, то, обозначая $\xi = (x, n+1)$, будем иметь

$$\|\xi - \xi_{m_k}\|_{n+1} = \|x - U(x_{m_k})\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

и $\xi_{m_k} \rightarrow \xi$ в пространстве X_{n+1} . Таким образом, X оказывается LN^* -пространством.

Операция U допускает естественное распространение с X_0 на все X . Положим для $\xi = (x, n) \in X$

$$\tilde{U}(\xi) = (U(x), n).$$

Ясно, что операция $\tilde{U}$ переводит равные пары в равные, так что действительно является операцией в X . Кроме того, если $x = (x, 0) \in X_0$, то $\tilde{U}(x) = (U(x), 0) = U(x)$.

Проверим, что операция $\tilde{U}$ осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства X на себя.

Если $\tilde{U}(\xi) = 0$, т. е. если $(U(x), n) = 0$, то, как было указано, $U(x) = 0$ и, следовательно, $x = 0$, так что $\xi = 0$.

Если $\eta = (x, n)$ — произвольный элемент из X , то, полагая $\xi = (x, n+1)$, получим

$$\tilde{U}(\xi) = (U(x), n+1) = (x, n) = \eta.$$

Докажем, наконец, непрерывность операций $\tilde{U}$ и $\tilde{U}^{-1}$. Для этого воспользуемся замечанием 6 из 5.6, т. е. проверим, что операции $\tilde{U}_n$ и $(\tilde{U}^{-1})_n$, получающиеся из операций $\tilde{U}$ и $\tilde{U}^{-1}$, если последние рассматривать лишь на X_n , непрерывны. Так как

$$\tilde{U}_n(\xi) = \tilde{U}(\xi) = (U(x), n) \quad (\xi = (x, n) \in X_n)$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{U}_n(\xi)\|_n = \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\| = \|U\| \|\xi\|_n,$$

то $\tilde{U}_n$ есть линейная операция из X_n в X_n и, тем более, из X_n в X .

Для операции $(\tilde{U}^{-1})_n$ имеем

$$(\tilde{U}^{-1})_n(\eta) = \tilde{U}^{-1}(\eta) = (x, n+1) \quad (\eta = (x, n) \in X_n),$$

поэтому

$$\|(\tilde{U}^{-1})_n(\eta)\|_{n+1} = \|x\| = \|\eta\|_n,$$

т. е. $(\tilde{U}^{-1})_n$ — линейная операция из пространства X_n в X_{n+1} и, подавно, из X_n в X .

Отметим в заключение еще одно соотношение: если $\xi = (x, n) \in X$, то $\tilde{U}^n(\xi) = (U^n(x), n) = (x, 0) = x$, т. е.

$$\xi = \tilde{U}^{-n}(x). \quad (13)$$

Пусть X_0 обозначает пространство непрерывных функций, заданных в промежутке $[a, b]$, обращающихся в нуль в точке a . Операцию U определим, полагая

$$y = U(x) \quad y(t) = \int_a^t x(s) ds \quad (t \in [a, b]).$$

Образуем пространство X . Операция U^{-1} есть в данном случае операция дифференцирования, в связи с чем ее распространение — операцию $\tilde{U}^{-1}$ — естественно также назвать дифференцированием (обобщенным). Формула (13) показывает тогда, что каждый элемент $\xi \in X$ есть обобщенная производная некоторого порядка функции из X_0 . Сопоставим элементу $\xi = (\varphi, n)$ функционал f_ξ в пространстве $D_{[a, b]}^\circ$ — обобщенную функцию в промежутке $[a, b]$ —

$$f_\xi(x) = (-1)^n \int_a^b \varphi(t) x^{(n)}(t) dt \quad (x \in D_{[a, b]}^\circ). \quad (14)$$

Интегрируя по частям, легко проверить, что f_ξ однозначно определяется элементом ξ . Вследствие формулы (13) из XI.2.4 каждая обобщенная функция f на $[a, b]$ может быть представлена в виде f_ξ ($\xi \in X$). При этом соответствие между элементами X и $(D_{[a, b]}^\circ)^*$ является алгебраическим изоморфизмом. Как будет ясно из дальнейшего (см. 5.14), оно осуществляет также и гомеоморфизм указанных пространств. Все эти обстоятельства дают основания называть элементы пространства X обобщенными функциями в промежутке $[a, b]$. Существенно отметить, что операция дифференцирования имеет один и тот же смысл как в $(D_{[a, b]}^\circ)^*$, так и в X . Действительно, если $\eta = \tilde{U}(\xi)$ и $\xi = (\varphi, n)$, то $\eta = (\varphi, n+1)$ и

$$f'_\xi(x) = -f_\xi(x') = (-1)^{n+1} \int_a^b \varphi(t) x^{(n+1)}(t) dt = f_\eta(x) \quad (x \in D_{[a, b]}^\circ).$$

Предоставляем читателю показать, что сходящийся ряд функций в промежутке $[a, b]$ можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем сходимость рядов из производных будет иметь место в пространстве обобщенных функций.

5.13. Индуктивный предел X последовательности $\{X_n\}$ B -пространств в случае, когда он не является нормированным пространством, есть пространство первой категории.

Действительно, обозначая, как и раньше, через S_n единичную сферу пространства X_n , будем иметь $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nS_n$. Множество $A_n = nS_n$ ограни-

чено в X и нигде не плотно в X , так как в противном случае его замыкание $\bar{A}_n$ в X содержало бы некоторое открытое множество и было бы, следовательно, ограниченной выпуклой окрестностью, так что X оказалось бы нормированным. Несмотря на то, что X первой категории, оно в силу теоремы 3 тоннельно.

Хотя в общем случае не удается доказать полноту пространства X , но если индуктивный предел регулярен и X — рефлексивное пространство, например если X есть LN -пространство, то X^* есть проективный предел последовательности $\{X_n^*\}$ B -пространств, т. е. является метрическим и, тем самым, борнологическим пространством, а по теореме 9 (3. XI) X , будучи сопряженным к борнологическому пространству, полно.

5.14. В теореме 4 было установлено, что пространство, сопряженное к регулярному индуктивному пределу есть проективный предел последовательности сопряженных пространств. Двойственный факт также имеет место, хотя и при менее простых условиях.

Выскажем некоторые предварительные замечания. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность локально-выпуклых пространств и ω_n — линейная операция, отображающая X_{n+1} в X_n ($n = 1, 2, \dots$). Как обычно, через Ω_n обозначим каноническое отображение пространства $X = \lim \text{pr.} (X_n, \omega_n)$ в пространство X_n . Пусть, наконец, $\tilde{X}_n = \overline{\Omega_n(X)}$. Отметим, что $\omega_n(\tilde{X}_{n+1}) \subset \tilde{X}_n$. Действительно, если $x \in \Omega_{n+1}(X)$, т. е. если $x = \Omega_{n+1}(y)$ ($y \in X$), то $\omega_n(x) = \omega_n \Omega_{n+1}(y) = \Omega_n(y) \in \Omega_n(X)$. Высказанное предложение получается отсюда предельным переходом. Обозначая через $\tilde{\omega}_n$ операцию ω_n , рассматриваемую лишь на $\tilde{X}_{n+1}$, без труда убедимся, что

$$X = \lim \text{pr.} (X_n, \omega_n)' = \lim \text{pr.} (\tilde{X}_n, \tilde{\omega}_n).$$

Это дает основание считать, что уже для данной последовательности $\{X_n\}$ множество $\Omega_n(X)$ плотно в пространстве X_n , что мы и будем делать в дальнейшем.

Рассмотрим произвольный функционал $f \in X'$. В 5.4 было показано, что существуют n и линейный функционал F в X_n такие, что

$$f(x) = F(\Omega_n(x)) \quad (x \in X), \quad (15)$$

и, наоборот, каждый функционал $F \in X'_n$ определяет по формуле (15) функционал $f \in X'$. Вследствие сделанного относительно пространств X_n предположения соответствие между функционалами f и F взаимно-однозначно. Более того, если обозначить через $\hat{X}_n$ множество всех функционалов $f \in X'$ имеющих вид (15), то $\hat{X}_n$ и X'_n изоморфны. Воспользовавшись этим изоморфизмом, введем в $\hat{X}_n$ топологию, перенеся ее из пространства X'_n . Если обозначить через φ_n указанный выше изоморфизм пространств X'_n и $\hat{X}_n$, то в силу данного определения топологии в $\hat{X}_n$ отображение φ_n будет гомеоморфизмом.

Пространства $\hat{X}_n$ образуют возрастающую последовательность. При этом операция вложения пространства $\hat{X}_n$ в пространство $\hat{X}_{n+1}$ есть $\varphi_n \omega_n^* \varphi_n^{-1}$ и, следовательно, линейна.

Теорема 8 (5. XI). Если пространство $X = \lim \text{pr.} (X_n, \omega_n)$ тоннельное и полное, а пространство $\hat{X} = \lim \text{ind.} X_n$ полурефлексивно, то $X^* = \hat{X}$.

Доказательство. Выше было установлено, что по составу элементов пространства X^* и $\hat{X}$ совпадают. Далее, так как операции Ω_n^* , отображающие X_n^* в X^* , непрерывны, то топология пространства X^* слабее топологии пространства $\hat{X}$ (замечание 2 из 5.6). Докажем, что запас ограниченных множеств в обоих пространствах один и тот же. Учитывая соотношение между топологиями этих пространств, достаточно проверить, что множество, ограниченное в X^* , будет ограничено и в $\hat{X}$. Рассмотрим поэтому ограниченное в X^* множество G . Так как X тоннельно, то G эквинепрерывно (см. XI.3.5) и можно считать $G = \pi(V)$, где V — окрестность нуля в пространстве X . Согласно определению проективного предела, существует n и выпуклая окрестность нуля V_n в пространстве X_n такая, что $\Omega_n^{-1}(V_n) \subset V$. Не умаляя общности, можно считать $\Omega_n^{-1}(V_n) = V$. Пусть $f \in G$ и $z \in X$ такой элемент, что $\Omega_n(z) = 0$. Поскольку при любом α элемент $\alpha z \in V$, то $|f(\alpha z)| \leq 1$, и, следовательно, $f(z) = 0$. Таким образом, функционал f принимает одинаковые значения на элементах множества $\Omega_n^{-1}(x)$ ($x \in \Omega_n(X)$) так что имеет смысл

$$F(x) = f(\Omega_n^{-1}(x)) \quad (x \in \Omega_n(X)).$$

Если $x \in V_n \cap \Omega_n(X)$, то $\Omega_n^{-1}(x) \subset V$ и потому $|F(x)| \leq 1$. Это означает, что F — линейный функционал в $\Omega_n(X) \subset X_n$, который можно считать линейным функционалом в X_n . Таким образом, $f \in \hat{X}_n$ и, следовательно, $G \subset \hat{X}_n$. Множество $\varphi_n^{-1}(G) = G_n$ функционалов $F \in \hat{X}_n$, соответствующих функционалам $f \in G$, как ясно из предыдущего, содержится в $\pi(V_n)$. Следовательно, G_n ограничено в X_n^* , а тогда G ограничено в $\hat{X}_n$ и тем более в $\hat{X}$.

Рассмотрим пространства X^{**} и $\hat{X}^*$. Ясно, что $X' \subset \hat{X}'$, а поскольку ограниченные множества в X^* и $\hat{X}$ одни и те же, топология пространства X^{**} совпадает с топологией, которую наводит в множестве X' топология пространства $\hat{X}^*$, т. е. $X^{**} \subset \hat{X}^*$ не только в теоретико-множественном смысле, но и в смысле совпадения соответствующих топологий. Далее, так как X — тоннельное пространство, то по следствию к теореме 1 (4. XI) топология τ в множестве X'' , взятая из пространства X , и топология τ^* , индуцируемая в X'' топологией пространства X^{**} , совпадают, и, ввиду того, что X — полное пространство, множество X'' замкнуто в пространстве $\hat{X}^*$. По теореме 4 (3. XI) множество X'' будет замкнуто и в пространстве $[\hat{X}', \sigma(\hat{X}', \hat{X}')]'$, которое в данном случае совпадает с пространством $[\hat{X}', \sigma(\hat{X}', \hat{X})]$. Но если $f \in \hat{X}$ таков, что $\Phi(f) = 0$ для любого $\Phi \in X''$, то это означает, что $f(x) = 0$ для любого $x \in X$ и, следовательно, $f = 0$. Отсюда следует, что $X'' = \hat{X}'$. Одновременно получаем $X'' = X'$ и $X^{**} = \hat{X}'$. Первое из этих соотношений означает полурефлексивность пространства X , а следовательно, в силу его тоннельности, и рефлексивность. Так как X^* также рефлексивно, то согласно теореме 3 (4. XI) оно тоннельно.

Проанализируем второе из выведенных соотношений. Так как X — тоннельное пространство, то его топология τ^* есть топология Макки (теорема 7 (4. XI)) $\tau = \mu(X, X')$. С другой стороны, на основании теоремы 6 (4. XI) топология $\hat{\tau}$ пространства $\hat{X}$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{\tau} \leq \mu(\hat{X}, \hat{X}') = \mu(X, X') = \tau,$$

что и завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Как видно из доказательства теоремы, из одного только предположения о тоннельности пространства X вытекает, что пространство $\hat{X}$ есть регулярный индуктивный предел последовательности пространств $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n, \dots$. Отметим, что X будет тоннельным, если все X_n F -пространства, так как в этом случае и X оказывается F -пространством.

Если X_n рефлексивные B -пространства, то выполнены все условия теоремы, как это вытекает из следствия к теореме 6. В частности, пространство, сопряженное пространству $L_\infty = \lim \operatorname{pr} L^n$ есть $\lim \operatorname{ind} L^{\frac{n+1}{n}} = L^{1+0}$.

Условия теоремы выполнены также, если операции ω_n вполне непрерывны, так как в этом случае операции ω_n^* тоже вполне непрерывны (теорема 3 (3.IX)) и, следовательно, $\hat{X}$ есть LN^* -пространство, которое, как отмечалось, рефлексивно.

Так, $D_{[a, b]}^\circ = \lim \operatorname{pr} C_{[a, b]}^{\circ(n)}$, где $C_{[a, b]}^{\circ(n)}$ есть B -пространство функций, заданных на всей числовой прямой, имеющих n непрерывных производных и обращающихся в нуль вне промежутка $[a, b]$. Норма элемента $x \in C_{[a, b]}^{\circ(n)}$ определяется так

$$\|x\| = \max |x^{(k)}(t)| \quad (t \in [a, b]; k = 0, 1, \dots, n),$$

так что операции ω_n — в данном случае операции вложения — вполне непрерывны. Таким образом, на основании сказанного выше

$$(D_{[a, b]}^\circ)^* = \lim \operatorname{ind} (C_{[a, b]}^{\circ(n)})^*. \quad (16)$$

В 5.12 в множестве $(D_{[a, b]}^\circ)'$ уже была введена топология. Предоставляем читателю, используя соотношение (16), проверить идентичность обеих топологий.

5.15. На протяжении данной главы рассматривались преимущественно вещественные пространства. Это ограничение не лежит, однако, в существе дела. Все сказанное выше по поводу вещественных пространств справедливо и по отношению к комплексным пространствам. Надо только во всех формулировках вместо выпуклого множества говорить об *абсолютно выпуклом множестве*. Так называется множество E , обладающее свойством: вместе с элементами x, y оно содержит и любой элемент $\alpha x + \beta y$, где $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Нетрудно сообразить, что абсолютно выпуклое множество выпукло и уравновешено, и, наоборот, выпуклое уравновешенное множество абсолютно выпукло. Поскольку абсолютная выпуклость включает в себя уравновешенность, упоминание о ней и тем более о симметричности в формулировках теорем излишне.

Для каждого из указанных в главе конкретных пространств можно рассмотреть его комплексный аналог. Приведем еще два примера комплексных локально-выпуклых пространств.

Будем говорить, что однозначная комплексная функция x , заданная на некотором множестве A расширенной комплексной плоскости, *локально-аналитическая на A* , если существует открытое множество $G \supset A$ и функция $\tilde{x}$ на G , совпадающая с x в точках множества A , и такая, что в каждой точке множества G она имеет конечную производную. Если, кроме того, $\infty \in A$, то предполагается, что $x(\infty) = 0$. Обозначим через X_A множество всех локально-аналитических на A функций. Если $A \subset B$, то, отождествляя функцию $x \in X_A$ с ее аналитическим продолжением на B (если такое существует), будем иметь $X_A \supset X_B$.

Пусть A — открытое множество на комплексной плоскости. Существует возрастающая последовательность F_n замкнутых множеств такая, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, причем, если замкнутое множество $F \subset A$, то при некотором m будет $F \subset F_m$. Введем в X_A последовательность норм, полагая для $x \in X_A$

$$\|x\|_n = \max_{t \in F_n} |x(t)| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При этом X_A становится счетнонормируемым пространством, как можно проверить, полным.

Рассмотрим теперь замкнутое множество C и убывающую последовательность G_n открытых множеств такую, что $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, причем, если открытое множество $G \supset C$, то при некотором m будет $G \supset G_m$. Обозначая через X_n B -пространство функций, локально-аналитических в G_n и непрерывных в $\bar{G}_n$ с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in \bar{G}_n} |x(t)| \quad (x \in X_n)$$

будем иметь $X_C = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. В X_C естественно ввести топологию индуктивного предела последовательности $\{X_n\}$. Как можно показать, X_C становится при этом LN -пространством.

Пусть, наконец, множество C замкнутое, а A — дополнительное к нему открытое. Имеют место соотношения: $(X_C)^* = X_A$ и $(X_A)^* = X_C$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА XII

СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Теоремы об обратной операции *)

В этом параграфе мы пополним те сведения об обратной операции, которые были даны в первой части (см. § 3, гл. V).

1.1. Напомним данные в первой части определения. Пусть U —линейная операция, отображающая нормированное пространство X в нормированное пространство Y . Если существует операция V , переводящая Y в X , такая, что

$$VU = I_X \quad (I_X x = x; x \in X), \quad (1)$$

$$UV = I_Y \quad (I_Y y = y; y \in Y), \quad (2)$$

то V называется обратной по отношению к U ($V = U^{-1}$).

Существование (хотя бы нелинейной) обратной операции U^{-1} равносильно тому, что U осуществляет взаимнооднозначное отображение пространства X на Y . Если, кроме того, U^{-1} —линейная операция, то указанное отображение будет и взаимно непрерывным.

Если выполнено лишь одно из соотношений (1) или (2), то операция V называется левой, соответственно правой обратной (в обозначениях: $V = U_l^{-1}$, соответственно $V = U_r^{-1}$ **). В V.2.4. было доказано, что для существования линейной левой обратной операции необходимо и достаточно, чтобы

$$\|U(x)\| \geq m \|x\| \quad (x \in X), \quad (3)$$

где $m > 0$ не зависит от x . Если при этом операция U отображает X на все Y , то левая обратная операция будет также и правой обратной, т. е. в этом случае существует линейная обратная (двусторонняя) операция U^{-1} .

*) По поводу содержания этого параграфа см. [83], также [1216]. Характер изложения близок к работе [92].

**) Иногда значки „ l “ и „ r “ будут опускаться.

1.2. Докажем теорему.

Теорема 1 (I. XII). Если операция U , переводящая B -пространство X в нормированное пространство Y , имеет линейную левую обратную, то множество $Y' = U(X)$ представляет собой B -пространство.

Доказательство. В нем нуждается только полнота пространства Y' . Пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства Y' . Обозначим $x_n = U^{-1}(y_n)$ ($y_n = U(x_n)$; $n = 1, 2, \dots$). Согласно отмеченному в 1.1

$$\|y_n - y_k\| = \|U(x_n - x_k)\| \geq m \|x_n - x_k\|,$$

где m — положительная постоянная. Таким образом,

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\| = 0.$$

Следовательно, в X существует элемент $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U(x_n) = U(x_0)$, то, обозначая $y_0 = U(x_0)$, получим $y_0 \in Y'$ и $y_n \rightarrow y_0$. Полнота пространства Y' доказана.

Следствие. В условиях теоремы множество Y' замкнуто в Y .

1.3. В дальнейшем окажется полезным понятие фактор-пространства, введенное в XI.1.3 для общего случая линейных топологических пространств. Напомним определение фактор-пространства и укажем некоторые его свойства, ограничиваясь при этом нормированными пространствами.

Пусть X — нормированное пространство и X_0 — его подпространство. Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x' и x'' в один класс, если $x' - x'' \in X_0$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов, и каждый элемент $x \in X$ входит в один (и, тем самым, только в один) класс. Пусть $\bar{x}$ — один из классов и $x \in \bar{x}$. Из самого определения следует, что $\bar{x} = x + X_0$. Наоборот, множество вида $x + X_0$ есть некоторый класс, именно класс, содержащий элемент x .

Во множество X/X_0 всех классов можно ввести алгебраические операции, полагая

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} &= x + y + X_0, & \lambda \bar{x} &= \lambda x + X_0 \\ (\bar{x}, \bar{y} \in X/X_0, x \in \bar{x}, y \in \bar{y}). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти определения, как легко проверить, не зависят от выбора элементов x, y — представителей классов $\bar{x}, \bar{y}$. В силу данных определений X/X_0 становится линейным множеством, причем роль нулевого элемента играет, очевидно, класс, содержащий нулевой элемент пространства X , т. е. подпространство X_0 .

Если для $\bar{x} \in X/X_0$ положить

$$\|\bar{x}\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|x\|,$$

то X/X_0 превращается в нормированное пространство. Действительно, если $\bar{x} = 0$, то в качестве $x \in \bar{x}$ можно взять нулевой элемент пространства X и поэтому $\|\bar{x}\| = 0$. Наоборот, если $\|\bar{x}\| = 0$, то из определения нормы вытекает, что существует последовательность $\{x_n\} \subset \bar{x}$ такая, что $x_n \rightarrow 0$. Так как класс $\bar{x}$ — замкнутое множество, то вместе с $\{x_n\}$ он содержит и предельную точку этой последовательности, т. е. $0 \in \bar{x}$ и $\bar{x}$ есть нулевой элемент из X/X_0 .

Однородность нормы также проверяется без труда. Рассматривая случай $\lambda \neq 0$, имеем

$$|\lambda| \|\bar{x}\| = |\lambda| \inf_{x \in \bar{x}} \|x\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\|.$$

Но когда x пробегает класс $\bar{x}$, элемент λx пробегает класс $\lambda \bar{x}$, откуда следует, что

$$\inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\| = \inf_{z \in \lambda \bar{x}} \|z\| = \|\lambda \bar{x}\|.$$

Докажем, наконец, неравенство треугольника. Для произвольных $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ ($\bar{x}, \bar{y} \in X/X_0$) будет $x + y \in \bar{x} + \bar{y}$, поэтому

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Переходя в правой части к точным нижним границам, получим требуемое неравенство.

Построенное нормированное пространство X/X_0 и называется *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0 .

Сопоставляя каждому элементу $x \in X$ класс $\bar{x} = x + X_0 = \varphi(x)$, содержащий этот элемент, мы получим операцию φ , которая называется *естественным гомоморфизмом* (или каноническим гомоморфизмом) пространства X на фактор-пространство X/X_0 . Поскольку

$$\|\varphi(x_0)\| = \inf_{x \in \varphi(x_0)} \|x\| \leq \|x_0\| \quad (x_0 \in X),$$

операция φ линейна. Более того, операция φ обладает свойством, приближающим ее к операциям, имеющим линейную обратную. Именно, для любого $\bar{x} \in X/X_0$ найдется $x \in \bar{x}$ так, что

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \|\bar{x}\| \geq \frac{1}{2} \|x\|. \quad (5)$$

Используя указанное свойство, докажем, что если данное пространство X полное, то полным будет и фактор-пространство X/X_0 .

Действительно, пусть $\{\bar{x}_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$. Разрезая, если нужно, данную последовательность, можно добиться того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\|$ будет сходящимся. В соответствии с (5) найдем элемент $x_n \in \mathbf{X}$ так, что

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = \varphi(x_n), \quad \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\| \geq \frac{1}{2} \|x_n\|$$

$$(n = 0, 1, \dots, \bar{x}_0 = 0).$$

Ясно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ сходится. Следовательно, в силу полноты пространства $\mathbf{X}$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Обозначая его сумму через x и полагая $\bar{x} = \varphi(x)$, найдем

$$\bar{x} = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n,$$

т. е. последовательность $\{\bar{x}_n\}$ сходится к элементу $\bar{x}$.

Пусть имеются два нормированных пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ и линейная операция U , отображающая $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Множество $\mathbf{X}_0 = U^{-1}(0)$ является, очевидно, подпространством пространства $\mathbf{X}$. Образует фактор-пространство $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\mathbf{X}_0$. Пусть $\bar{x} \in \bar{\mathbf{X}}$; рассмотрим произвольный элемент $x \in \bar{x}$ и положим

$$\bar{U}(\bar{x}) = U(x). \quad (6)$$

Определение элемента $\bar{U}(\bar{x})$ не зависит от выбора элемента $x \in \bar{x}$, так как если $x', x'' \in \bar{x}$, то $x' - x'' \in \mathbf{X}_0$ и, следовательно, $U(x') = U(x'')$. Таким образом, формула (6) определяет операцию $\bar{U}$, отображающую пространство $\bar{\mathbf{X}}$ в $\mathbf{Y}$. Эта операция однородна и аддитивна. Она и непрерывна, так как, переходя к точной нижней границе в правой части неравенства

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| = \|U(x)\| \leq \|U\| \|x\|, \quad (x \in \bar{x}),$$

можем написать

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| \leq \|U\| \|\bar{x}\| \quad (\bar{x} \in \bar{\mathbf{X}}).$$

Из самого определения операции $\bar{U}$ следует, что $U = \bar{U}\varphi$.

В отличие от исходной операции U операция $\bar{U}$ осуществляет взаимно однозначное отображение (пространства $\bar{\mathbf{X}}$ в $\mathbf{Y}$). Действительно, если $\bar{U}(\bar{x}) = 0$, то для любого $x \in \bar{x}$ будет $U(x) = 0$, т. е.

$x \in U^{-1}(0) = X_0$, и, следовательно, $\bar{x}$ совпадает с классом X_0 — нулевым элементом пространства X .

В случае, когда U отображает X на Y , операция $\bar{U}$ отображает $\bar{X}$ также на Y . Если при этом существует линейная обратная $\bar{U}^{-1}$, то пространства X и Y называются *гомоморфными*, а операция U — *гомоморфизмом* пространства X на Y .

В терминах исходных пространств X и Y то, что U является гомоморфизмом пространства X на Y может быть охарактеризовано следующими двумя условиями:

- 1) $U(X) = Y$;
- 2) существует $m > 0$ такое, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$ так, что

$$y = U(x), \quad \|y\| \geq m \|x\|.$$

В самом деле, если U — гомоморфизм, то первое условие, очевидно, выполнено. Беря, далее, $x \in \bar{x} = \bar{U}^{-1}(y)$ в соответствии с (5) получим

$$\|x\| \leq 2 \|\bar{x}\| \leq 2 \|\bar{U}^{-1}\| \|y\|,$$

и можно принять $m = \frac{1}{2 \|\bar{U}^{-1}\|}$.

Наоборот, если оба условия выполнены, то из первого получаем $\bar{U}(\bar{X}) = Y$. Пусть $\bar{x} \in \bar{X}$; по элементу $y = \bar{U}(\bar{x})$ найдем элемент $x \in X$ в соответствии со вторым условием. Поскольку

$$\bar{U}(\varphi(x)) = U(x) = y = \bar{U}(\bar{x}),$$

вследствие взаимной однозначности операции $\bar{U}$ будет $\varphi(x) = \bar{x}$, и, следовательно,

$$\|\bar{U}(\bar{x})\| = \|y\| \geq m \|x\| \geq m \|\bar{x}\|.$$

Как отмечалось в 1.1, это вместе с соотношением $\bar{U}(\bar{X}) = Y$ обеспечивает существование линейной обратной (двусторонней) операции $\bar{U}^{-1}$.

1.4. Фундаментальную роль в теории функциональных уравнений играет утверждение, обратное к теореме 1. Оно является частью следующего предложения.

Лемма. Пусть U — линейная операция, отображающая B -пространство X в нормированное пространство Y . Тогда, если образ $U(K)$ единичной сферы K (с центром в нуле) пространства X плотен в сфере S_r радиуса r (также с центром в нуле) пространства Y , то U является гомоморфизмом пространства X на пространство Y . В частности, если отображение, осуществляемое операцией U , взаимно однозначно, то существует линейная двусторонняя обратная операция U^{-1} .

Доказательство. Проверим выполнение двух условий предыдущего пункта. Очевидно, можно считать сферы K и S_r замкнутыми; докажем, что

$$U(K) \supset S_{\frac{r}{2}}. \quad (7)$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \leq 1$ и рассмотрим $y \in S_r$. Так как $\overline{U(K)} \supset S_r$, то найдется $y_1 \in U(K)$ такой, что

$$\|y - y_1\| \leq \varepsilon_1 r.$$

Обозначим через x_1 элемент из K такой, что $y_1 = U(x_1)$. Пусть K_h — замкнутая сфера пространства X радиуса h (с центром в нуле). Из условия леммы вытекает, что $\overline{U(K_h)} \supset S_{hr}$. Следовательно, поскольку элемент $y - y_1 \in S_{\varepsilon_1 r}$, найдется элемент $x_2 \in K_{\varepsilon_1}$ так, что

$$\|y - (y_1 + y_2)\| \leq \varepsilon_2 r \quad (y_2 = U(x_2)).$$

Продолжая рассуждать подобным образом, найдем две последовательности $\{y_n\} \subset Y$ и $\{x_n\} \subset X$ такие, что

$$y_n = U(x_n), \quad x_n \in K_{\varepsilon_{n-1}} \quad \left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\| \leq \varepsilon_n r \quad (8)$$

$$(n = 1, 2, \dots; \varepsilon_0 = 1).$$

Ввиду того, что $\|x_n\| \leq \varepsilon_{n-1}$, а пространство X полное, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится. Если x означает сумму этого ряда, то

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k-1} \leq 2,$$

т. е. $x \in K_2$. Далее,

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Но из (8) ясно, что $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$. Поэтому $y = U(x)$. Таким образом, доказано, что $U(K_2) \supset S_r$, что равносильно соотношению (7).

Так как из (7) следует, что $U(K_n) \supset S_{\frac{nr}{2}}$, то

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(K_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{nr}{2}} = Y,$$

и первое условие проверено.

Далее, если $y \neq 0$ произвольный элемент из Y , то элемент

$$y' = \frac{r}{2 \|y\|} y \in S_{\frac{r}{2}}$$

и в силу (7) можно указать элемент $x \in K$ такой, что $y' = U(x')$. Полагая $x = \frac{2 \|y\|}{r} x'$, будем иметь

$$U(x) = y, \quad \|x\| = \frac{2}{r} \|y\| \|x'\| \leq \frac{2}{r} \|y\|.$$

Следовательно, выполнено и второе условие. Лемма доказана.

Следствие. Если выполнены условия леммы, то пространство Y полное.

В самом деле, поскольку U — гомоморфизм, операция $\bar{U}$, отображающая фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$ ($X_0 = U^{-1}(0)$) на Y , имеет линейную обратную. Так как $Y = \bar{U}(\bar{X})$, применима теорема 1.

Условие леммы затруднительно для проверки. Более удобным является условие следующей теоремы.

Теорема 2 (1. XII) (Банах). Если множество $U(X)$ второй категории в пространстве Y , то выполнено условие леммы и, следовательно, операция U есть гомоморфизм пространства X на Y .

Доказательство. Сохраняя обозначения леммы, докажем, что если условие леммы не выполнено, то множество $U(K)$ нигде не плотно. Действительно, предполагая противное, найдем сферу $S(y_0, r)$ в пространстве Y (с центром в точке $y_0 \in Y$, радиуса r) такую, что

$$\overline{U(K)} \supset S(y_0, r). \quad (9)$$

Множество $U(K)$ симметрично, т. е. вместе с элементом y содержит и элемент $-y$. Замыкание $\overline{U(K)}$ также, очевидно, симметрично. Это дает возможность написать на основании (9)

$$\overline{U(K)} \supset S(-y_0, r).$$

Возьмем $y \in S_r$. Элемент $y_0 + y \in S(y_0, r)$, а элемент $-y_0 + y \in S(-y_0, r)$, так что эти элементы входят в $\overline{U(K)}$. Но множество $U(K)$, а, следовательно, и его замыкание $\overline{U(K)}$ выпукло, поэтому вместе с двумя элементами оно должно содержать и их сумму. В частности,

$$y = \frac{(y_0 + y) + (-y_0 + y)}{2} \in \overline{U(K)}.$$

Таким образом, $\overline{U(K)} \supset S_r$.

Итак, если условие леммы 1 не выполнено, множество $U(K)$ нигде не плотно. Таким же будет и любое из множеств $U(K_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Но

$$U(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(K_n),$$

и мы получаем, что множество $U(X)$ первой категории.

Теорема доказана.

Укажем на следствие из доказанной теоремы, являющееся обращением теоремы 1.

Следствие. Если линейная операция U осуществляет взаимно однозначное отображение B -пространства X на подпространство B -пространства Y , то обратная операция U^{-1} линейна.

Действительно, подпространство B -пространства само является B -пространством и, следовательно, будет множеством второй категории в себе (см. I. 4.1).

З а м е ч а н и е. Если воспользоваться результатами главы XI, то доказательство теоремы 2 становится совсем простым. Чтобы проиллюстрировать идею рассуждения, рассмотрим случай, когда $U(X) = Y$. Пространство Y , будучи второй категории в себе, тоннельно (теорема 7 (3.XI)). Множество $\overline{U(K)}$, очевидно, выпуклое, поглощающее и замкнутое, следовательно, является окрестностью нуля в пространстве Y . В общем случае, следовало бы рассмотреть пространство $\tilde{Y} = U(X)$, считая, что $\tilde{Y}$ — тоннельно.

Отметим, что приведенное доказательство теоремы 2 по существу воспроизводит доказательство теоремы 7 (3. XI).

1.5. Укажем на некоторые непосредственные приложения теоремы 2.

Допустим, что в линейном множестве X двумя различными способами введена норма. Норму элемента $x \in X$ при первом способе определения нормы будем обозначать через $\|x\|_1$, а при втором — через $\|x\|_2$. Множество X обращается при этом в различные нормированные пространства, которые мы будем обозначать X_1 и, соответственно, X_2 . Хотя X_1 и X_2 следует рассматривать как различные нормированные пространства, однако качественных различий между ними может и не быть. Последнее обстоятельство имеет место, когда всякая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся в одном пространстве, сходится и в другом к тому же самому элементу. В этом случае говорят, что нормы в пространствах X_1 и X_2 эквивалентны, это означает, что пространства X_1 и X_2 топологически эквивалентны (см. VIII. 3.1).

Теорема 3 (I.XII). Пусть X_1 и X_2 — два B -пространства, причем $X_1 \subset X_2$. *) Если из сходимости $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_1 вытекает сходимость $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_2 , то либо $X_1 = X_2$, и при этом нормы в пространствах X_1 и X_2 эквива-

*) При этом предполагается, что вложение $X_1 \subset X_2$ сохраняет алгебраические операции, т. е. что X_1 можно рассматривать как линейное множество в X_2 .

лентны, либо X_1 есть множество первой категории в пространстве X_2 .

Доказательство. Обозначим через U операцию вложения пространства X_1 в пространство X_2 , т. е. операцию, сопоставляющую элементу $x \in X_1$ этот же элемент x , но рассматриваемый в пространстве X_2 . По условию теоремы U — линейная операция. Если множество $X_1 = U(X_1)$ второй категории в пространстве X_2 , то на основании теоремы 2 $X_1 = X_2$ и U имеет линейную обратную. Поэтому, если $x_n \rightarrow x$ в пространстве X_2 , то $x_n = U^{-1}(x_n) \rightarrow U^{-1}(x) = x$ в пространстве X_1 , т. е. нормы в указанных пространствах эквивалентны.

З а м е ч а н и е. Обозначая, как и раньше, через $\|x\|_1$ норму элемента x в пространстве X_1 , а через $\|x\|_2$ — в пространстве X_2 , можно факт эквивалентности норм высказать в такой форме: существуют постоянные $m > 0$ и M такие, что

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad (x \in X_1 = X_2).$$

Действительно, можно положить $M = \|U\|$ и $m = \frac{1}{\|U^{-1}\|}$.

Принимая в теореме $X_1 = C^{(1)}$, $X_2 = C$, получаем, что множество всех непрерывно дифференцируемых функций — первой категории в пространстве C непрерывных функций. Точно так же убеждаемся, что множество измеримых почти везде ограниченных функций — первой категории в пространстве L и т. д.

1.6. Операция T (не обязательно линейная), переводящая множество $\mathfrak{Q}$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y , называется *замкнутой*, если из того, что

$$x_n \in \mathfrak{Q} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad x_n \rightarrow x_0, \quad T(x_n) \rightarrow y_0,$$

вытекает $x_0 \in \mathfrak{Q}$ и $T(x_0) = y_0$.

Линейная операция, определенная на замкнутом множестве, очевидно, замкнута. Если предположить, что T — аддитивная операция, а X , Y являются B -пространствами, то справедливо и обратное предложение. Именно, имеет место

Теорема 4 (I.XII). Пусть T — аддитивная замкнутая операция, отображающая замкнутое линейное множество $\mathfrak{Q}$ B -пространства X в B -пространство Y . Тогда T — линейная операция.

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{Q} = X$ (так как $\mathfrak{Q}$ само есть B -пространство). Введем в пространстве X новую норму, полагая

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \quad (x \in X). \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что так определенная норма удовлетворяет аксиомам нормированного пространства. Проверим, кроме того,

полноту пространства X по новой норме. Пусть

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\|_1 = 0.$$

Это значит, что

$$\lim_{k, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_k\| = 0 \text{ и } \lim_{k, n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(x_k)\| = 0.$$

А так как пространства X (по данной норме) и Y полные, то отсюда можно заключить о существовании пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y_0.$$

По замкнутости операции T : $y_0 = T(x_0)$. Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(x_0)\| = 0,$$

и полнота пространства X по новой норме доказана.

Так как

$$\|x\| \leq \|x\|_1,$$

то из $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ вытекает $\|x_n\| \rightarrow 0$. Применяя предыдущую теорему, получим

$$\|x\|_1 \leq M\|x\|.$$

Тем более

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|,$$

что и означает линейность операции T .

Замечание 1. Аддитивная замкнутая операция T , заданная на линейном множестве Ω , необходимо однородна.

Действительно, в силу аддитивности T соотношение $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ во всяком случае выполняется, если λ — рациональное. *) Если λ — иррациональное, то, взяв последовательность $\{\lambda_n\}$ рациональных чисел, сходящуюся к λ , будем иметь

$$\lambda_n x \rightarrow \lambda x; \quad T(\lambda_n x) = \lambda_n T(x) \rightarrow \lambda T(x);$$

отсюда по замкнутости T имеем $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Замечание 2. Класс аддитивных замкнутых операций, определенных на всем пространстве (или на замкнутом линейном множестве) совпадает с классом линейных операций. Однако, если рассматривать замкнутые операции на линейном (незамкнутом) множестве, то они образуют существенно более широкий класс, чем линейные операции. Так, например, в пространстве L^2 операция T :

$$y = T(x) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$

*) При этом, если X и Y — комплексные пространства, следует иметь в виду сделанное в III. 1.1. замечание о том, что в требование аддитивности включается условие $T(ix) = i T(x)$.

определенная на множестве Ω всех абсолютно непрерывных функций, производная которых входит в L^2 , будет, как нетрудно проверить, замкнутой, но не линейной операцией.

Замкнутые, но не линейные операции изучаются главным образом в случае, когда $X=Y$ есть гильбертово пространство. Рассмотрение общего случая сильно затрудняется сложностью структуры произвольного B -пространства.

§ 2. Связь между данным и сопряженным уравнением

В этом параграфе мы наряду с уравнением

$$U(x) = y \quad (1)$$

рассмотрим уравнение

$$U^*(g) = f, \quad (2)$$

которое будем называть *сопряженным* по отношению к уравнению (1). При этом, как обычно, предполагается, что U является линейной операцией, отображающей пространство X в пространство Y . Эти пространства, не оговаривая этого в дальнейшем, мы будем считать полными, хотя некоторые из теорем настоящего параграфа верны и без предположения полноты указанных пространств.

Для пространства L^2 теоремы этого параграфа были доказаны в [117] (см. также Хеллингера и Тёплица), для пространств L^p и L^p Ф. Риссом (см. Рисс-1); в общем случае см. [115а], Банах-1, [1196].

2.1. Большую роль в дальнейшем изложении будут играть так называемые нулевые множества. Пусть Γ — некоторое множество линейных функционалов в пространстве X . Через $N(\Gamma)$ обозначим совокупность всех таких $x \in X$, для которых $f(x) = 0$ для любого $f \in \Gamma$. Если $E \subset X$, то через $N^*(E)$ будем обозначать множество всех функционалов $f \in X^*$, обращающихся в нуль на каждом из элементов множества E . Множества $N(\Gamma)$ и $N^*(E)$ называются *нулевыми множествами* множества Γ , соответственно, множества E .

Множество $N(\Gamma)$ очевидно, линейное и замкнутое. Наоборот, если $X_0 \subset X$ — замкнутое линейное множество, то существует $\Gamma \subset X^*$ такое, что $X_0 = N(\Gamma)$. Действительно, можно принять, например, $\Gamma = N^*(X_0)$. Непосредственно ясно, что $X_0 \subset N(\Gamma)$. Если же $x_0 \notin X_0$, то на основании теоремы 3(2.IV) можно построить функционал $f_0 \in X^*$ такой, что $f_0(x_0) = 1$ и $f_0(x) = 0$ для $x \in X_0$. Последнее обстоятельство показывает, что $f_0 \in \Gamma$, а так как $f_0(x_0) = 1$, то $x_0 \notin N(\Gamma)$, и мы приходим к равенству $X_0 = N(\Gamma)$. Таким образом,

$$X_0 = N(N^*(X_0)). \quad (3)$$

Так как правая часть этого равенства, очевидно, не изменится, если заменить в ней X_0 на множество E , линейное замыкание которого

есть X_0 , то множество $N(N^*(E))$ является наименьшим линейным замкнутым множеством, содержащим E .

Множество вида $N^*(E)$ будет, разумеется, также линейным и замкнутым в пространстве X^* . Однако не всякое линейное замкнутое множество в X^* имеет вид $N^*(E) (E \subset X)$. В самом деле, если, например, $X = m$, то пространство l является подпространством пространства X^* . Однако, если бы существовало множество $E \subset X$ такое, что $l = N^*(E)$, то, предполагая E линейным и замкнутым, мы получили бы на основании (3) $E = N(N^*(E)) = \{0\}$ и, следовательно, $l = N^*(E) = X^*$, тогда как на самом деле $l \neq X^*$.

Будем называть линейное множество $Z \subset X^*$ *слабо замкнутым*, если для любого линейного в X функционала $f_0 \notin Z$ существует элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$f_0(x_0) = 1, \quad f(x_0) = 0 \quad (f \in Z). \quad (*) \quad (4)$$

Повторяя почти дословно все сказанное по поводу множеств вида $N(\Gamma)$, легко доказать, что множества вида $N^*(E) (E \subset X)$ будут слабо замкнуты. Наоборот, если $Z \subset X^*$ — слабо замкнутое множество, то

$$Z = N^*(N(Z)).$$

Отсюда, как и выше, получаем, что при произвольном $\Gamma \subset X^*$ множество $N^*(N(\Gamma))$ есть *слабое линейное замыкание*, т. е. наименьшее слабо замкнутое множество, содержащее Γ .

Пусть E — некоторое множество в пространстве X . Обозначим через E_0^{**} множество линейных функционалов в X^{**} , имеющих вид $X_x (x \in E)$, где, как обычно,

$$X_x(f) = f(x) \quad (f \in X^*). \quad (5)$$

Очевидно соотношение

$$N^*(E) = N(E_0^{**}). \quad (6)$$

Для множества $\Gamma \subset X^*$ можно рассматривать два нулевых множества — $N(\Gamma) \subset X$ и $N^*(\Gamma) \subset X^{**}$. Легко видеть, что

$$[N(\Gamma)]_0^{**} = N^*(\Gamma) \cap X_0^{**}, \quad (7)$$

где X_0^{**} означает в соответствии с принятым обозначением совокупность всех функционалов в X^* вида (5).

З а м е ч а н и е. Если $E = X_0$ — линейное множество, то нулевое множество $N^*(X_0)$ совпадает с полярной $\pi(X_0)$ множества X_0 , определенной в XI. 3.2. Действительно, очевидно всегда $N^*(X_0) \subset \pi(X_0)$. Если же $f \in \pi(X_0)$, то для любого $x \in X_0$ будет $|f(x)| \leq 1$. Если бы при этом оказалось $f(x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in X_0$, то при достаточно большом α было бы $|f(\alpha x_0)| > 1$, что противоречит тому, что $\alpha x_0 \in X_0$.

*) Термин «слабо замкнутое множество» обусловлен тем, что линейное множество Z , удовлетворяющее указанному условию, будет замкнутым, если ввести в пространстве X^* слабую топологию $\sigma(X^*, X)$. См. XI.3.1.

То же самое относится к нулевому множеству вида $N(Z)$ (Z — линейное множество в $X^\sim$). В этом случае также $N(Z) = \pi(Z)$, причем поляру следует рассматривать в пространстве X (а не в X^{**}).

Введем, наконец, множество $N(U)$ — нулевое множество операции U , — понимая под этим совокупность всех $x \in X$, которые операция U переводит в нуль. Иначе говоря, $N(U) = U^{-1}(0)$.

2.2. Следующая теорема дает некоторые сведения о том, из каких элементов состоит образ $U(X)$ пространства X .

Теорема 1 (2. XII). Обозначим $Y' = U(X)$ и пусть Y_1 — замыкание множества Y' . Тогда

$$Y_1 = N(N(U^*)).$$

т. е. Y_1 представляет собой множество общих нулей тех функционалов $g \in Y^*$, на которых обращается в нуль операция U^* .

Доказательство. Докажем сначала соотношение

$$N^*(Y') = N(U^*). \quad (8)$$

Пусть $g \in N^*(Y')$. Тогда, так как $U(x) \in Y'$ при любом $x \in X$, имеем

$$U^*(g)(x) = g(U(x)) = 0 \quad (x \in X), \quad (9)$$

т. е. $U^*(g) = 0$ и $g \in N(U^*)$. То же равенство (9) показывает, что если $U^*(g) = 0$, то $g \in N^*(Y')$. Таким образом, соотношение (8) установлено. Переходя в обеих частях этого соотношения к нулевым множествам, получим

$$N(N^*(Y')) = N(N(U^*)).$$

Но ввиду того, что Y' есть линейное множество, его замыкание, как указано в 2.1, совпадает с $N(N^*(Y'))$. Теорема доказана.

Имеет место и двойственная теорема.

Теорема 1* (2. XII). Обозначим через $\tilde{X}^*$ слабое замыкание множества $U^*(Y^*)$. Тогда

$$\tilde{X}^* = N^*(N(U)).$$

Доказательство. Напишем соотношение (8), заменив в нем операцию U операцией U^*

$$N^*(U^*(Y^*)) = N(U^{**}),$$

и рассмотрим пересечение обеих частей с множеством X_0^{**} . Так как

$$U^{**}(X_x)(g) = X_x(U^*(g)) = U^*(g)(x) = g(U(x)) = Y_{U(x)}(g) \\ (g \in Y^*, x \in X),$$

т. е.

$$U^{**}(X_x) = Y_{U(x)} \quad (x \in X), \quad (10)$$

пересечение $N(U^{**}) \cap X_0^{**}$ состоит из тех функционалов $X_x \in X_0^{**}$, для которых $x \in N(U)$. Иными словами,

$$N(U^{**}) \cap X_0^{**} = [N(U)]_0^{**}.$$

С другой стороны, на основании (7) имеем

$$N^*(U^*(Y^*)) \cap X_0^{**} = [N(U^*(Y^*))]_0^{**}.$$

Сопоставляя полученные соотношения, найдем

$$N(U^*(Y^*)) = N(U),$$

и, следовательно,

$$N^*(N(U^*(Y^*))) = N^*(N(U)).$$

Но $\tilde{X}^* = N^*(N(U^*(Y^*)))$, что и доказывает теорему.

2.3. Следующие две теоремы дают зависимость между разрешимостью одного из уравнений (1) или (2) при любой правой части и однозначной разрешимостью другого уравнения.

Теорема 2 (2. XII). Для того чтобы уравнение (2) имело решение при любом $f \in X^*$, необходимо и достаточно, чтобы операция U имела линейную левую обратную U^{-1} .

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (2) имеет решение при любом $f \in X^*$. Иными словами, пусть $U^*(Y^*) = X^*$. Рассмотрим в пространстве X произвольный элемент $x \neq 0$. На основании теоремы 2 (2. IV) существует функционал $f \in X^*$, такой, что

$$f(x) = \|x\|, \quad \|f\| = 1.$$

Далее, согласно теореме 2 (1. XII), операция U^* является гомоморфизмом, поэтому найдется $g \in Y^*$ такой, что

$$U^*(g) = f, \quad \|g\| \leq m \|f\| = m,$$

где m не зависит от f и, следовательно, от x . Учитывая сказанное, можем написать

$$\|x\| = f(x) = g(U(x)) \leq \|g\| \|U(x)\| \leq m \|U(x)\|.$$

Таким образом,

$$\|U(x)\| \geq \frac{1}{m} \|x\| \quad (x \in X),$$

откуда и вытекает существование линейной левой обратной операции U^{-1} .

Достаточность. Пусть f_0 — произвольный линейный функционал в X . Предполагая существование линейной операции $U_l^{-1} = U^{-1}$, обозначим

$$g'(y) = f_0(U^{-1}(y)) \quad (y \in U(X)).$$

Определенный на множестве $Y' = U(X)$ функционал g' — линейный. Распространяя его на все Y , получим функционал $g_0 \in Y^*$. Так как $U(x) \in Y'$ при любом $x \in X$, то

$$U^*(g_0)(x) = g_0(U(x)) = g'(U(x)) = f_0(U^{-1}U(x)) = f_0(x).$$

Следовательно, $U^*(g_0) = f_0$, т. е. уравнение (2) разрешимо при любой правой части.

Теорема 2*(2. XII). Для того чтобы уравнение (1) имело решение при любом $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы операция U^* имела линейную левую обратную U^{*-1} .

Доказательство. Необходимость условия данной теоремы проверяется аналогично необходимости условия теоремы 2. Пусть $y \in Y$ — произвольный элемент с $\|y\| \leq 1$. Согласно теореме 2 (1. XII) в X найдется такой элемент x , что

$$U(x) = y, \quad \|x\| \leq m\|y\| \leq m.$$

Если, далее, $g \in Y^*$ и $f = U^*(g)$, то

$$|g(y)| = |g(U(x))| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq m\|f\|.$$

Переходя в левой части к точной верхней границе по y (с $\|y\| \leq 1$) и учитывая при этом, что m не зависит от y , получим

$$\|g\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |g(y)| \leq m\|f\| = m\|U^*(g)\|,$$

и мы приходим к условию, обеспечивающему существование линейной левой обратной операции U^{*-1} .

Достаточность. Рассмотрим случай, когда пространство X рефлексивно. Применяя теорему 2 к операции U^* найдем, что $U^{**}(X^{**}) = Y^{**}$, т. е. что уравнение

$$U^{**}(X) = Y \quad (11)$$

имеет решение (в пространстве X^{**}) при любой правой части $Y \in Y^{**}$. Учитывая рефлексивность пространства X , получим, беря в правой части уравнения (11) в качестве Y функционал вида $Y_y(y \in Y)$, что существует $x \in X$ такой, что

$$U^{**}(X_x) = Y_y.$$

Но вследствие (10)

$$U(x) = y$$

и разрешимость уравнения (1) установлена.

Если не предполагать рефлексивности пространства X , то рассуждения несколько усложняются. Докажем в этом случае, что операция U удовлетворяет условию леммы предыдущего параграфа и, следовательно, на основании леммы, $U(X) = Y$.

Итак, пусть K — единичная сфера пространства X (с центром в нуле). Множество $U(K)$ симметрично и выпукло, поэтому его замыкание

в пространстве Y есть $\pi(\pi(U(K)))$ (см. следствие к теореме 2 (3.XI)). Поляра $\pi(U(K))$ есть множество всех таких функционалов $g \in Y^*$, что $|g(y)| \leq 1$ для всех $y \in U(K)$. Или иначе

$$|g(U(x))| \leq 1 \quad \text{для всех } x \in K.$$

Обозначая $f = U^*(g)$, мы можем записать последнее соотношение так:

$$|f(x)| \leq 1 \quad (x \in K).$$

Таким образом, когда g пробегает множество $\pi(U(K))$, функционал $f = U^*(g)$ не выходит за пределы единичной сферы K° пространства X^* , т. е.

$$U^*(\pi(U(K))) \subset K^\circ \cap U(Y^*).$$

Перепишем это соотношение следующим образом:

$$\pi(U(K)) \subset U^{*-1}(K^\circ \cap U^*(Y^*)).$$

Вследствие непрерывности операции U^{*-1} множество $S^\circ = U^{*-1}(K^\circ \cap U^*(Y^*))$ ограничено в пространстве Y^* . Поэтому поляр $\pi(S^\circ)$ является окрестностью нуля в пространстве Y . Но

$$\overline{U(K)} = \pi(\pi(U(K))) \supset \pi(S^\circ),$$

что и требовалось доказать.

Из теорем 2 и 2* вытекает

Следствие. Для того чтобы существовала линейная двусторонняя обратная операция U^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы существовала линейная двусторонняя обратная операция U^{*-1} . При этом

$$U^{*-1} = (U^{-1})^*.$$

Докажем последнее соотношение. Пусть $f \in X^*$ и $g = (U^{-1})^*(f)$. Имеем

$$g(y) = f(U^{-1}(y)) = f(x) \quad (y = U(x) \in Y).$$

С другой стороны, если обозначить $g' = U^{*-1}(f)$, т. е. $f = U^*(g')$, то

$$f(x) = g'(U(x)) = g'(y) \quad (x = U^{-1}(y) \in X).$$

При любом $y \in Y$ будет, таким образом, $g(y) = g'(y)$, иначе говоря, $(U^{-1})^*(f) = U^{*-1}(f)$ ($f \in X^*$), что и требовалось доказать.

2.4. Обобщением теорем 2 и 2* являются следующие две теоремы, в которых устанавливаются условия разрешимости уравнений (1) и (2).

Теорема 3 (2.XII). Если множество $U^*(Y^*)$ замкнуто, то

$$U(X) = N(N(U^*)),$$

т. е. уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда из $U^*(g) = 0$ следует $g(y) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $Y_1 = \overline{U(X)}$ пространства Y и операцию U_1 , отображающую пространство X в Y_1 :

$$U_1(x) = U(x) \quad (x \in X). *$$

Докажем, что

$$U_1^*(Y_1^*) = U^*(Y^*). \quad (12)$$

Для этого обозначим через ω операцию вложения пространства Y_1 в Y . Поскольку, очевидно, существует линейная левая обратная ω^{-1} на основании теоремы 2 заключаем, что $\omega^*(Y^*) = Y_1^*$. Но $U = \omega U_1$, поэтому $U^* = U_1^* \omega^*$ (см. IX.3.1), и, следовательно,

$$U^*(Y^*) = U_1^*(\omega^*(Y^*)) = U_1^*(Y_1^*).$$

Так как $\overline{U_1(X)} = Y_1$, то на основании теоремы 1 будем иметь $Y_1 = N(N(U_1^*))$, что возможно лишь в случае, когда $N(U_1^*) = \{0\}$, следовательно, операция U_1^* осуществляет взаимно однозначное отображение B -пространства Y_1^* на пространство $U_1^*(Y_1^*)$, которое в силу (12) также является B -пространством. На основании следствия к теореме 2 (1.XII) заключаем, что существует линейная левая обратная U_1^{*-1} , а тогда по теореме 2*

$$U(X) = U_1(X) = Y_1,$$

после чего применение теоремы 1 приводит к требуемому результату.

Теорема 3* (2.XII). Если множество $U(X)$ замкнуто, то

$$U^*(Y^*) = N^*(N(U)), \quad (13)$$

т. е. уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда функционал f обращается в нуль на множестве нулей операции U .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $U(X) = Y$. Обозначим $X_0 = N(U) = U^{-1}(0)$ и введем фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$. Построим, как указано в XII.1.3, операцию $\bar{U}$, отображающую пространство $\bar{X}$ на Y . При этом $U = \bar{U}\varphi$, где φ — естественный гомоморфизм пространства X на $\bar{X}$. Так как пространство $\bar{X}$ полное, а операция $\bar{U}$ взаимно однозначна, то по следствию к теореме 2 (1.XII) существует линейная $\bar{U}^{-1}$ и, следовательно, согласно теореме 2 $\bar{U}^*(Y^*) = \bar{X}^*$. Но $U^* = \varphi^* \bar{U}^*$, и поэтому

$$U^*(Y^*) = \varphi^*(\bar{U}^*(Y^*)) = \varphi^*(\bar{X}^*).$$

*) Различие между операциями U и U_1 состоит в том, что пространства, в которых лежат образы $U(X)$ и $U_1(X)$, различны, так что сопряженные операции U^* и U_1^* действуют в разных пространствах.

Таким образом, осталось доказать, что $\varphi^*(\bar{X}^*) = N^*(X_0)$. Возьмем произвольный функционал $f \in \varphi^*(\bar{X}^*)$. Пусть $\bar{f} \in \bar{X}^*$ таков, что $f = \varphi^*(\bar{f})$. Так как

$$f(x) = \bar{f}(\varphi(x)) \quad (x \in X),$$

а при $x \in X_0$ будет $\varphi(x) = 0$, то $f \in N^*(X_0)$.

Будем теперь считать, что f — произвольный функционал из $N^*(X_0)$. Проводя буквально те же рассуждения, которые были использованы в XII. 1.3 при построении операции $\bar{U}$, мы убедимся, что функционал $\bar{f}$:

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) \quad (x \in \bar{x} = \varphi(x))$$

определен корректно и является линейным функционалом в $\bar{X}$. Но тогда $f = \varphi^*(\bar{f}) \in \varphi^*(\bar{X}^*)$.

В общем случае, когда, возможно, $U(X) = Y_1 \neq Y$ введем, как и при доказательстве теоремы 3, операцию U_1 , отображающую X на Y_1 . Операция U_1 подходит под рассматриваемый частный случай, вследствие чего, учитывая соотношение (12), можем записать

$$U^*(Y^*) = U_1^*(Y_1^*) = N^*(N(U_1)) = N^*(N(U)).$$

Теорема полностью доказана.

Следствие. Если множество $U^*(Y^*)$ замкнуто, то оно и слабо замкнуто.

Действительно, по теореме 3 будет замкнутым множество $U(X)$, а тогда применима теорема 3*, на основании которой и заключаем о слабой замкнутости множества $U^*(Y^*)$.

Отметим частный случай следствия — когда U^* имеет линейную левую обратную. Множество $U^*(Y^*)$ замкнуто в этом случае на основании следствия к теореме 1 (1.XII).

2.5. Укажем некоторые следствия доказанных теорем.

Теорема 4 (2.XII). Для того чтобы уравнение (1) имело единственное решение при любом $u \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2) имело единственное решение при любом $f \in X^*$.

Теорема 5 (2.XII). Пусть уравнения (1) и (2) разрешимы, каковы бы ни были $u \in Y$ и $f \in X^*$. Тогда существуют линейные обратные (двусторонние) операции U^{-1} и U^{*-1} . Таким образом, решения уравнений (1) и (2) единственны.

Теорема 6 (2.XII). Пусть уравнения (1) и (2) при $u = 0$ и $f = 0$ имеют только нулевые решения. Тогда, если одно из множеств $U(X)$ или $U^*(X^*)$ замкнуто, то уравнения (1) и (2) разрешимы при любом $u \in Y$ и $f \in X^*$, причем решения единственны.

Замечание. Замкнутость множества $U(X)$ или $U^*(Y^*)$ равносильна (в условиях теоремы) существованию линейной левой обратной операции U^{-1} или U^{*-1} .

Так как множество $U(X_\mu)$, будучи конечномерным линейным множеством, заведомо замкнуто (II.4.3), то теорема 1 дает

$$U(X_\mu) = N(N(U^*)).$$

Но $N(U^*)$ состоит из тех функционалов $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\nu) \in Y_\nu^*$, для которых $U^*(g) = 0$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} \psi_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \mu). \quad (15)$$

Следовательно, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in U(X_\mu)$ в том и только в том случае, когда из (15) вытекает

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\nu} \psi_j \eta_j = 0.$$

Иными словами, для того чтобы система (14) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы правые части системы образовывали вектор, ортогональный любому решению однородной системы с сопряженной матрицей.

Допустим теперь, что $\mu = \nu$. Если система (14) разрешима при любых правых частях, то операция U^* имеет линейную левую обратную (теорема 2*). Нетрудно видеть, что в таком случае $U^*(Y_\nu^*) = X_\nu^*$, так как иначе U^* отображала бы ν -мерное пространство в пространство меньшей размерности, что противоречило бы существованию левой обратной U^{*-1} .*) Применяя теорему 4, находим, что решение системы (14) единственно.

Используя теорему 5 и применяя аналогичные рассуждения, можно установить обратный результат: если система (14) имеет не более одного решения, то решение существует при любых правых частях.

Для систем с симметричными матрицами оба эти результата непосредственно следуют из теоремы 7.

*) Действительно, пусть множество $U^*(Y_\nu^*)$ имеет размерность $\nu_0 < \nu$, т. е. существуют элементы $f_1, f_2, \dots, f_{\nu_0} \in U^*(Y_\nu^*)$ такие, что для любого $f \in U^*(Y_\nu^*)$

$$f = \sum_{k=1}^{\nu_0} c_k f_k.$$

Для любого $g \in Y_\nu^*$ имеем тогда $g = \sum_{k=1}^{\nu_0} c_k g_k$, где $g_k = U^{*-1}(f_k)$, т. е. размерность Y_ν^* была бы меньше ν .

ГЛАВА XIII

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

В этой главе будет изучаться уравнение вида

$$x - \lambda U(x) = y \quad (*)$$

где U — линейная операция, отображающая B -пространство X в себя. Такое уравнение мы будем называть *уравнением второго рода*, а операцию U — *ядром* уравнения. Терминология эта заимствована из теории интегральных уравнений, где уравнением второго рода называется уравнение

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (s \in [a, b])$$

в отличие от уравнения первого рода

$$\int_a^b K(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (s \in [a, b]).$$

Хотя формально функциональное уравнение $(*)$ может быть записано и в виде уравнения «первого рода»

$$T(x) = y \quad (U = I - \lambda U),$$

однако выделение тождественной операции оказывается целесообразным, поскольку операция U может обладать лучшими свойствами, нежели операция T , что позволяет полнее исследовать уравнение $(*)$.

§ 1. Уравнения с вполне непрерывным ядром

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$x - U(x) = y \quad (x, y \in X) \quad (1)$$

и сопряженное к нему

$$g - U^*(g) = f \quad (f, g \in X^*), \quad (2)$$

предполагая, что U (а следовательно, и U^* — теорема 3 (3.IX)) — вполне непрерывная операция в B -пространстве X . Введем обозначение

$T = I - U$, где, как всегда, через I обозначена тождественная операция в пространстве X . Уравнение (1) можно записать при этом более коротко:

$$T(x) = y, \quad (1')$$

а уравнение (2):

$$T^*(g) = f, \quad (2')$$

поскольку $T^* = I^* - U^*$ (IX.3.1), и I^* — тождественная операция в X^* .

1.1. Докажем предварительно три леммы.

Лемма 1. Множество $T(X)$ замкнуто.

Доказательство. Обозначим $X_0 = N(T) = T^{-1}(0)$ и рассмотрим фактор-пространство $\bar{X} = X/X_0$ и операцию $\bar{T}$, отображающую $\bar{X}$ в $\bar{X}$ (см. XII.1.3). Через φ , как и в XII.1.3, обозначим естественный гомоморфизм пространства X на $\bar{X}$. Пусть $\{y_n\} \subset T(X)$ — последовательность, сходящаяся к элементу $y_0 \in X$. Так как $T(\bar{X}) = T(X)$, то существуют элементы $\bar{x}_n \in \bar{X}$ такие, что $y_n = \bar{T}(\bar{x}_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Найдем, далее, $x_n \in X$ в соответствии с соотношением (5) из XII.1.3, т. е. так, что

$$\bar{x}_n = \varphi(x_n), \quad \|\bar{x}_n\| \geq \frac{1}{2} \|x_n\| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Докажем, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ ограничена. В противном случае, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно было бы добиться того, что $c_n = \|\bar{x}_n\| \rightarrow \infty$. В силу (3) последовательность $\left\{\frac{x_n}{c_n}\right\}$ ограничена, поэтому, переходя еще раз к подпоследовательности, можно было бы считать, что $\left\{U\left(\frac{x_n}{c_n}\right)\right\}$ сходится. Пусть, например, $U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) \rightarrow z$. Ввиду того, что $T(x_n) = \bar{T}(\bar{x}_n) = y_n$, можно написать

$$\frac{x_n}{c_n} = U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) + T\left(\frac{x_n}{c_n}\right) = U\left(\frac{x_n}{c_n}\right) + \frac{y_n}{c_n} \rightarrow z,$$

и, следовательно,

$$T(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\frac{x_n}{c_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{c_n} = 0,$$

т. е. $z \in X_0$. Но тогда

$$\frac{\bar{x}_n}{c_n} = \varphi\left(\frac{x_n}{c_n}\right) \rightarrow \varphi(z) = 0,$$

что невозможно, поскольку $\left\|\frac{\bar{x}_n}{c_n}\right\| = 1$ при любом $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, последовательность $\{\bar{x}_n\}$, а на основании (3) и последовательность $\{x_n\}$, ограничена. Можно поэтому считать, что

$\{U(x_n)\}$ — сходящаяся последовательность. Если, например, $U(x_n) \rightarrow x$, то

$$x_n = T(x_n) + U(x_n) = y_n + U(x_n) \rightarrow y_0 + x = x_0.$$

Отсюда получаем

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0) \in T(X),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Последовательность множеств

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

возрастающая и содержит лишь конечное число различных множеств.

Доказательство. Первая часть утверждения леммы почти очевидна, так как, если $x \in N(T^n)$, то $T^n(x) = 0$ и тем более $T^{n+1}(x) = 0$, т. е. $x \in N(T^{n+1})$. $N(T^n) \subset N(T^{n+1})$.

Для доказательства второй части обозначим $X_n = N(T^n)$ и установим, что, если при некотором $n = 1, 2, \dots$ будет $X_n = X_{n+1}$, то и $X_{n+1} = X_{n+2}$. Возьмем $x \in X_{n+2}$. Это значит, что $T^{n+2}(x) = T^{n+1}(T(x)) = 0$ и, следовательно, $T(x) \in X_{n+1} = X_n$. Стало быть, $T^{n+1}(x) = T^n(T(x)) = 0$, т. е. $x \in X_{n+1}$. Таким образом, $X_{n+2} \subset X_{n+1}$. Обратное включение имеет место всегда, поэтому окончательно $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \dots$.

Предположим теперь, что при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$X_n \neq X_{n+1}.$$

Каждое X_n является подпространством пространства X_{n+1} , поэтому по лемме о почти перпендикуляре (II.2.9) в X_{n+1} можно указать такой нормированный элемент x_{n+1} , что

$$\rho(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4)$$

Пусть $m > n$. Рассмотрим элемент

$$U(x_m) - U(x_n) = x_m - T(x_m) - [x_n - T(x_n)] = x_m - \bar{x},$$

где обозначено $\bar{x} = T(x_m) + x_n - T(x_n)$. Докажем, что $\bar{x} \in X_{m-1}$. В самом деле,

$$T^{m-1}(\bar{x}) = T^m(x_m) + T^{m-1}(x_n) - T^m(x_n) = 0,$$

так как $x_n \in X_n \subset X_{m-1}$, а $x_m \in X_m$.

Принимая во внимание (4), имеем

$$\|U(x_m) - U(x_n)\| = \|x_m - \bar{x}\| > \frac{1}{2} \quad (m > n; m, n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Но $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, и вследствие полной непрерывности операции U из последовательности $\{U(x_n)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что, однако, противоречит (5).

Лемма 3. Среди множеств

$$T(X), T^2(X), \dots, T^n(X), \dots \quad (6)$$

имеется лишь конечное число различных.

Доказательство в общих чертах сходно с доказательством предыдущей леммы, вследствие чего мы проведем его не входя в подробности.

Отметим, что множества (6), согласно лемме 1, замкнуты и, кроме того, они образуют убывающую последовательность. Ясно, что из равенства $T^n(X) = T^{n+1}(X)$ при некотором n , вытекает, что

$$T^n(X) = T^{n+1}(X) = T^{n+2}(X) = \dots,$$

и лемма в этом случае доказана.

Допуская, что $T^n(X) \neq T^{n+1}(X)$ ($n = 0, 1, \dots$), с помощью леммы о почти перпендикуляре (II.2.9) построим последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$\|x_n\| = 1; \quad x_n \in T^n(X); \quad \rho(x_n, T^{n+1}(X)) > \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Пусть $m > n$. Как и в лемме 2, имеем

$$U(x_n) - U(x_m) = x_n - T(x_n) - [x_m - T(x_m)] = x_n - \bar{x}.$$

Но

$$T(x_n) \in T^{n+1}(X); \quad x_m \in T^m(X) \subset T^{n+1}(X); \quad T(x_m) \in T^{m+1}(X) \subset T^{n+1}(X),$$

и, таким образом, $\bar{x} = T(x_n) + x_m - T(x_m) \in T^{m+1}(X)$. Из (7) вытекает поэтому

$$\|U(x_n) - U(x_m)\| = \|x_n - \bar{x}\| > \frac{1}{2} \quad (m > n; m, n = 1, 2, \dots),$$

что противоречит полной непрерывности операции U .

1.2. Обозначим через r наименьшее из неотрицательных целых чисел n такого рода, что $T^n(X) = T^{n+1}(X)$. Если, в частности, $T(X) = X = T^0(X)$, то полагаем $r = 0$.

Пусть, далее, $X' = T^r(X)$, $X'' = N(T^r)$.

Характеристика операции T и, следовательно, уравнения (1) содержатся в следующей теореме.

Теорема 1(1.XIII). а) Операция T взаимно однозначно отображает подпространство X' на себя.

б) Подпространство X'' конечномерное. Операция T отображает X'' в себя.

с) Каждый элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме

$$x = x' + x'' \quad (x' \in X', \quad x'' \in X''); \quad (8)$$

при этом существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|x'\| \leq M\|x\|, \quad \|x''\| \leq M\|x\|. \quad (9)$$

d) Операция U допускает представление в форме

$$U = U' + U'', \quad (10)$$

где U' , U'' — вполне непрерывные операции, отображающие пространство X в X' (операция U') и в X'' (операция U''). При этом операция $T' = I - U'$ имеет линейную двустороннюю обратную и справедливо соотношение

$$U'U'' = U''U' = 0. \quad (11)$$

Доказательство. а) Так как $X' = T^r(X)$, то

$$T(X') = T^{r+1}(X) = T^r(X) = X'.$$

Если $T(x) = 0$, где $x \in X'$, то, взяв $n \geq r$ так, чтобы в соответствии с леммой 2 было $N(T^n) = N(T^{n+1})$, будем иметь $x \in T^n(X)$ и, следовательно, существует $\tilde{x} \in X$ такой, что $x = T^n(\tilde{x})$. Но тогда $0 = T(x) = T^{n+1}(\tilde{x})$, и поэтому $\tilde{x} \in N(T^{n+1}) = N(T^n)$, т. е. $x = T^n(\tilde{x}) = 0$.

б) Имеем

$$T^r = (I - U)^r = I - U_1,$$

где операция U_1 есть линейная комбинация положительных степеней операции U . Таким образом, на основании теоремы 2(2.IX) операция U_1 вполне непрерывная. Так как для $x \in X''$ будет $U_1(x) = x$, то каждое ограниченное множество в X'' компактно. В силу теоремы 2(2.II) X'' конечномерно.

Множество $T(X'')$ в случае $r > 0$ есть, очевидно, $N(T^{r-1}) \subset N(T^r) = X''$. Если же $r = 0$, то $X'' = \{0\}$ и включение $T(X'') \subset X''$ тривиально.

с) Обозначим через T_0 операцию T , рассматриваемую лишь на множестве X' . На основании леммы 1, примененной к операции $T^r = I - U_1$, заключаем, что множество X' замкнуто и, следовательно, является B -пространством. Поэтому в силу теоремы 2(1.XII) операция T_0 , взаимно однозначно отображающая X' на себя, имеет линейную обратную T_0^{-1} .

Пусть x — произвольный элемент из X ; положим

$$x' = T_0^{-r}T^r(x), \quad x'' = x - x' = x - T_0^{-r}T^r(x). \quad (12)$$

Ясно, что $x' \in X'$, а так как

$$T^r(x'') = T^r(x) - T^r T_0^{-r} T^r(x) = T^r(x) - T^r(x) = 0,$$

то $x'' \in X''$, что и доказывает возможность представления x в форме (8).

Если $x = x'_1 + x''_1$ какое-нибудь другое представление элемента x в форме (8), так что $x'_1 \in X'$, $x''_1 \in X''$, то

$$T^r(x) = T^r(x'_1) + T^r(x''_1) = T^r(x'_1).$$

Но так как $x'_1 \in X'$, то $T^r(x'_1) = T_0^r(x'_1)$, поэтому

$$x'_1 = T_0^{-r} T^r(x) = x',$$

и единственность представления (8) доказана.

Наличие оценок (9) вытекает на основании (12) из линейности операции T_0^{-1} .

д) Ввиду того, что $U = I - T$, для $x \in X'$ имеем

$$U(x) = x - T(x) \in X',$$

т. е. операция U отображает X' в себя. Аналогично убеждаемся, что $U(X'') \subset X''$.

Для произвольного $x \in X$ положим

$$U'(x) = U(x'), \quad U''(x) = U(x''), \quad (13)$$

где $x' \in X'$ и $x'' \in X''$ из представления элемента x в форме (8). Учитывая оценки (9), без труда убеждаемся, что U' и U'' — линейные операции. Кроме того, ясно, что $U = U' + U''$ и $U'(X) \subset X'$, а $U''(X) \subset X''$. Далее, очевидно,

$$U'(X'') = U''(X') = \{0\}. \quad (14)$$

Из этих соотношений следует, что $U'U'' = U''U' = 0$, т. е. (11).

Операция U'' отображает пространство X в конечномерное пространство X'' , в котором всякое ограниченное множество компактно. Поэтому U'' — вполне непрерывная операция. Но $U' = U - U''$ и с помощью теоремы 2 (2.IX) можно заключить о полной непрерывности операции U' .

Докажем, наконец, что операция $T' = I - U'$ имеет двустороннюю линейную обратную. Для этого достаточно установить, во-первых, что $T'(x) = 0$ влечет $x = 0$, и, во-вторых, что $T'(X) = X$. Пусть $T'(x) = 0$. Представляя x в форме (8), получим

$$0 = T'(x) = x - U'(x) = x' - U(x') + x'' = T(x') + x''.$$

Так как $T(x') \in X'$, то вследствие единственности представления элемента 0 в форме (8) будем иметь

$$T(x') = x'' = 0$$

и на основании пункта а) $x' = 0$. Тем самым $x = x' + x'' = 0$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $y \in X$. Представим его в форме (8): $y = y' + y''$ ($y' \in X'$, $y'' \in X''$) и положим

$$x = T_0^{-1}(y') + y''.$$

Так как $T_0^{-1}(y') \in X'$, то

$$U'(x) = U(T_0^{-1}(y'))$$

и

$$\begin{aligned} T'(x) &= x - U'(x) = T_0^{-1}(y') - U(T_0^{-1}(y')) + y'' = \\ &= TT_0^{-1}(y') + y'' = y' + y'' = y. \end{aligned}$$

Итак $T'(X) = X$.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть m означает наименьшее из неотрицательных целых чисел n таких, что $N(T^n) = N(T^{n+1})$. Тогда $m = r$.

В самом деле, беря $x \in N(T^{r+1})$ и представляя его в форме (8), получим

$$0 = T^{r+1}(x) = T^{r+1}(x') + T^{r+1}(x'') = T^{r+1}(x'),$$

что в силу пункта а) возможно лишь при $x' = 0$. Отсюда $x = x'' \in N(T^r)$ и, следовательно, $m \leq r$.

Далее, если $y = T^n(x)$ ($x \in X$), то, представляя x в форме (3), будем иметь

$$y = T^n(x) = T^n(x') + T^n(x'') = T^n(x') = T^{n+1}(T_0^{-1}(x')),$$

и $y \in T^{n+1}(X)$, следовательно, должно быть также $r \leq m$.

Частный случай факта, указанного в замечании, содержится в следующей теореме.

Теорема 2 (I. XIII). Для того чтобы уравнение (1) было разрешимо при любом $y \in X$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$T(x) = 0 \tag{15}$$

имело единственное решение (очевидно $x = 0$).

Действительно; разрешимость уравнения (1) при любом $y \in X$ означает, что $T(X) = X$, т. е. что $r = 0$. Единственность решения уравнения (15) эквивалентна тому, что $m = 0$.

З а м е ч а н и е. Опираясь на результаты § 2 предыдущей главы, можно дать доказательство теоремы, не зависящее от теоремы 1, используя лишь тот факт, что множество $T(X)$ замкнуто. Предоставляем читателю самостоятельно провести необходимые рассуждения.

1.3. Связь между уравнениями (1) и (2) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3 (1.XIII). Множества $N(T)$ и $N(T^*)$ имеют одинаковую конечную размерность.

Доказательство. Так как $N(T) \subset N(T^r) = X''$, а на основании пункта б) теоремы 1 X'' конечномерно, то будет конечномерным и $N(T)$. Поскольку U^* также вполне непрерывная операция, то сказанное применимо и к множеству $N(T^*)$.

Пусть размерность множества $N(T)$ равна n , а размерность $N(T^*) = \nu$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — система линейно независимых элементов в $N(T)$, а $g_1, g_2, \dots, g_\nu$ — линейно независимые элементы в $N(T^*)$.

Поскольку элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, к ним применима теорема о биортогонализации (теорема 5 (2.IV)), на основании которой существует биортогональная система функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$:

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Равным образом, пользуясь теоремой 3 (1.V), найдем элементы $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ так, что

$$g_j(y_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, \nu). \quad (17)$$

Предположим сначала, что $n < \nu$. Рассмотрим в пространстве X операцию $V = U + W$, где

$$W(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k \quad (x \in X).$$

Так как линейная операция W переводит X в конечномерное пространство, то она вполне непрерывна. Значит, и V — вполне непрерывная операция. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{T}(x) = x - V(x) = T(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = 0. \quad (18)$$

Пусть x_0 — некоторое его решение:

$$\tilde{T}(x_0) = T(x_0) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0. \quad (19)$$

Из этого равенства следует

$$g_s(T(x_0)) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) g_s(y_k) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (20)$$

т. е., учитывая (17),

$$g_s(T(x_0)) - f_s(x_0) = 0$$

и вследствие того, что $T^*(g_s) = 0$, будет

$$f_s(x_0) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (21)$$

Вместе с (19) это дает $T(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in N(T)$ и, значит, x_0 может быть представлен в форме

$$x_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Так как в силу (16) $\alpha_s = f_s(x_0)$, то из (21) вытекает $\alpha_s = 0$, а потому и $x_0 = 0$. Таким образом, уравнение (18) имеет единственное решение. По теореме 2 соответствующее неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части. В частности, имеет решение уравнение

$$\tilde{T}(x) = T(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = y_{n+1}.$$

Обозначим через x^* решение этого уравнения. С одной стороны,

$$g_{n+1} \left(T(x^*) - \sum_{k=1}^n f_k(x^*) y_k \right) = T^*(g_{n+1})(x^*) - \sum_{k=1}^n f_k(x^*) g_{n+1}(y_k) = 0.$$

Между тем, $g_{n+1}(y_{n+1}) = 1$.

Таким образом, должно быть $v \leq n$.

Возможность неравенства $v < n$ исключается аналогичными рассуждениями. А именно вместо уравнения (13) надо рассмотреть в пространстве X^* уравнение

$$T^*(g) - \sum_{k=1}^v g(y_k) f_k = 0.$$

1.4. Объединяя доказанные выше теоремы, получаем следующий результат.

Теорема 4 (1. XIII). Либо уравнения (1) и (2) разрешимы при любой правой части, и тогда их решения единственны. Либо однородные уравнения

$$T(x) = 0 \quad \text{и} \quad T^*(g) = 0$$

имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно. В этом случае, для того чтобы уравнение (1) (соответственно уравнение (2)) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(соответственно

$$f(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)).$$

При этом общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = x^* + \sum_{k=1}^n c_k x_k,$$

а общее решение уравнения (2) —

$$g = g^* + \sum_{k=1}^n c_k g_k,$$

где x^* (соответственно g^*) — какое-нибудь решение уравнения (1) (соответственно (2)), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Вторая часть теоремы получается применением к уравнениям (1) и (2) теорем 3 (2. XII) и 3* (2. XII), условия которых выполнены вследствие леммы 1.

Ввиду аналогии с известной теоремой теории интегральных уравнений настоящую теорему называют *альтернативой Фредгольма*.

§ 2. О комплексных нормированных пространствах

Как это ясно будет из дальнейшего (см. § 3), уравнение

$$x - \lambda U(x) = y$$

естественно рассматривать в комплексном пространстве, в частности придавая λ комплексные значения. В связи с этим ниже вводятся некоторые вспомогательные понятия, относящиеся к комплексным пространствам и позволяющие включить вещественный случай в комплексный.

2.1. Пусть $\mathbf{Z}$ — комплексное нормированное пространство. Мы говорим, что $\mathbf{Z}$ имеет *вещественное ядро*, если на $\mathbf{Z}$ определена операция C , переводящая $\mathbf{Z}$ в себя и называемая *инволюцией*, которая обладает свойствами:

1. $C(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \bar{\lambda}_1 C(z_1) + \bar{\lambda}_2 C(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbf{Z});$
2. $C^2(z) = z \quad (z \in \mathbf{Z});$
3. $\|C(z)\| = \|z\|.$

Множество тех элементов, для которых $C(z) = z$, называется *вещественным ядром* пространства $\mathbf{Z}$ и обозначается $\text{Re } \mathbf{Z}$; элементы этого множества называются *вещественными*.

Пусть $z \in \mathbf{Z}$; элемент $x = \frac{1}{2} [z + C(z)]$ называется *вещественной частью* элемента z и обозначается $x = \text{Re } z$. Элемент $y = \frac{1}{2i} [z - C(z)]$ называется *мнимой частью* элемента z и обозначается $y = \text{Im } z$. Так как

$$C(x) = \frac{1}{2} [C(z) + C^2(z)] = x, \quad C(y) = -\frac{1}{2i} [C(z) - C^2(z)] = y,$$

то $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ вещественные элементы. Очевидно

$$z = x + yi \quad (1)$$

и

$$C(z) = x - yi.$$

Последнее соотношение дает основание называть элемент $C(z)$ *сопряженным* к элементу z и ввести обычное обозначение: $C(z) = \bar{z}$.

Если элемент z каким-нибудь образом представлен в форме (1) с вещественными x и y , то непременно $x = \operatorname{Re} z$, а $y = \operatorname{Im} z$. Действительно $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}i = x - yi$ и поэтому $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re} z$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \operatorname{Im} z$. Таким образом, представление (1) единственно; элементы x и y однозначно определяются элементом z .

Вещественное ядро X пространства Z является вещественным нормированным пространством, полным, если полно исходное пространство Z .

В самом деле, линейная комбинация с вещественными коэффициентами элементов из X снова является элементом множества X . Выполнение для X аксиом нормированного пространства вытекает из того, что эти аксиомы выполнены для данного пространства Z . Убедимся в полноте X (предполагая Z полным пространством). Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов пространства X . Рассматривая ее в пространстве Z и принимая во внимание его полноту, найдем, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z \in Z$. Так как в силу условия $1 \overline{x_n - z} = \bar{x}_n - \bar{z}$, то $\|x_n - z\| = \|\bar{x}_n - \bar{z}\| = \|x_n - \bar{z}\|$, откуда $x_n \rightarrow \bar{z}$. Ввиду единственности предела $\bar{z} = z$, т. е. $z \in X$.

Все конкретные вещественные пространства, рассмотренные выше, являются вещественными ядрами соответствующих комплексных пространств. Так, например, пространство C_T вещественных непрерывных в параллелепипеде T функций является вещественным ядром комплексного пространства $\bar{C}_T$ комплексно-значных непрерывных на T функций. То же можно сказать по отношению к вещественным пространствам L^p , V , I^p , $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}$, M и комплексным пространствам $\bar{L}^p$, $\bar{V}$, $\bar{I}^p$, $\bar{\mathfrak{c}}$, $\bar{\mathfrak{m}}$, $\bar{M}$ и т. д. *)

Вообще произвольное вещественное пространство X можно рассматривать как вещественное ядро некоторого комплексного пространства, именно как вещественное ядро пространства Z , элементы которого суть упорядоченные пары элементов пространства X ;

*) В дальнейшем в этой главе мы будем для конкретных комплексных пространств применять те же обозначения, что и для соответствующих вещественных — без черточек.

$z = (x, y)$ ($x, y \in X$), причем действия над ними введены по следующим правилам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\lambda(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \quad (\lambda = \alpha + \beta i, \alpha, \beta — \text{вещественные})$$

$$\|(x, y)\| = \max_{\theta} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|. \quad *) \quad (2)$$

Чтобы убедиться, что X — вещественное ядро пространства Z достаточно положить

$$C((x, y)) = (x, -y).$$

При этом вещественными в пространстве Z будут все элементы вида $(x, 0)$ и только они. Так как

$$\alpha(x_1, 0) + \beta(x_2, 0) = (\alpha x_1 + \beta x_2, 0)$$

$$\|(x, 0)\| = \max_{\theta} \|x \cos \theta\| = \|x\|,$$

то, отождествляя элемент $(x, 0)$ с элементом x , мы и получим требуемый результат. Такое отождествление позволяет вместо (x, y) использовать обычное обозначение: $x + yi$.

2.2. Пусть Z и W — комплексные пространства с вещественными ядрами $X = \text{Re } Z$ и $Y = \text{Re } W$. Операция $\tilde{U}$, переводящая Z в W , называется *вещественной*, если она переводит вещественные элементы пространства Z в вещественные элементы пространства W , т. е. если $\tilde{U}(X) \subset Y$; вещественная операция индуцирует, таким образом, линейную операцию из вещественного пространства X в вещественное пространство Y .

Наоборот, если U — линейная операция, отображающая пространство X в пространство Y и если $X = \text{Re } Z$, а $Y = \text{Re } W$, то, полагая

$$\tilde{U}(z) = \tilde{U}(x + yi) = U(x) + iU(y) \quad (z = x + yi),$$

мы получим линейную операцию $\tilde{U}$ из комплексного пространства Z в комплексное пространство W . Очевидно на X операция $\tilde{U}$ совпадает с U . Операция $\tilde{U}$ называется *комплексным расширением* операции U .

Отметим неравенство

$$\|U\| \leq \|\tilde{U}\| \leq 2\|U\|. \quad (3)$$

*) Разумеется, в конкретных пространствах норма может быть введена и иначе. Так, если $X = L^p$, то естественно положить

$$\|(x, y)\| = \left[\int_a^b |x(t) + y(t) i|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_a^b [|x(t)|^2 + |y(t)|^2]^{\frac{p}{2}} dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

что дает норму, эквивалентную определенной равенством (2).

Первая часть неравенства очевидна. Что касается второй, то она является следствием цепи неравенств

$$\begin{aligned}\|\tilde{U}(z)\| &= \|U(x) + iU(y)\| \leq \|U(x)\| + \|U(y)\| \leq \\ &\leq \|U\|(\|x\| + \|y\|) \leq 2\|U\| \|z\|\end{aligned}$$

(здесь мы использовали неравенство $\|\operatorname{Re} z\| \leq \|z\|$, которое доказывается так: $\|\operatorname{Re} z\| = \frac{1}{2} \|z + \bar{z}\| \leq \frac{1}{2} [\|z\| + \|\bar{z}\|] = \|z\|$).

В ряде случаев можно доказать равенство $\|\tilde{U}\| = \|U\|$. Так, если норма в пространствах $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{W}$ определена формулой (2), то

$$\begin{aligned}\|\tilde{U}(z)\| &= \max_{\theta} \|U(x) \cos \theta + U(y) \sin \theta\| \leq \\ &\leq \|U\| \max_{\theta} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = \|U\| \|z\|,\end{aligned}$$

и, следовательно, $\|\tilde{U}\| \leq \|U\|$, что вместе с (3) дает $\|\tilde{U}\| = \|U\|$.

Далее, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой нормированный вещественный элемент x , что $\|\tilde{U}(x)\| > \|\tilde{U}\| - \varepsilon$, то также $\|\tilde{U}\| = \|U\|$, так как в этом случае

$$\|\tilde{U}\| \leq \|\tilde{U}(x)\| + \varepsilon = \|U(x)\| + \varepsilon \leq \|U\| + \varepsilon.$$

Последнее условие выполнено, например, когда $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{W}$ суть пространства функций из числа указанных выше, а $\tilde{U}$ —интегральная операция

$$w = \tilde{U}(z), \quad w(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt$$

с вещественным ядром $K(s, t)$.

Точно так же условие выполнено, если $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{W}$ —пространства последовательностей, а операция $\tilde{U}$ определяется вещественной матрицей.

2.3. Если вещественная операция $\tilde{U}$ вполне непрерывна, то, очевидно, и индуцируемая ею операция U из $\mathbf{X} = \operatorname{Re} \mathbf{Z}$ в $\mathbf{Y} = \operatorname{Re} \mathbf{W}$ также вполне непрерывна. Справедливо и обратное утверждение, т. е. если U —вполне непрерывная операция из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, то ее комплексное расширение—операция $\tilde{U}$ —вполне непрерывна.

Для того чтобы доказать этот факт, достаточно сослаться на то, что из сходимости последовательности $\{z_n\}$ вытекает сходимость последовательностей $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$ и обратно.

2.4. Если $\mathbf{Z}$ —пространство с вещественным ядром, то и сопряженное пространство $\mathbf{Z}^*$ также имеет вещественное ядро.

Действительно, пусть $f \in \mathbf{Z}^*$; инволюцию определим, полагая $C(f) = \bar{f}$:

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (z \in \mathbf{Z}). \quad (4)$$

Убедимся прежде всего, что $\bar{f}$ — линейный функционал. В самом деле,

$$\begin{aligned}\overline{\bar{f}(\lambda z_1 + \mu z_2)} &= \overline{f(\lambda \bar{z}_1 + \mu \bar{z}_2)} = \overline{f(\lambda \bar{z}_1 + \mu \bar{z}_2)} = \\ &= \overline{\lambda f(\bar{z}_1) + \mu f(\bar{z}_2)} = \bar{\lambda} \bar{f}(\bar{z}_1) + \bar{\mu} \bar{f}(\bar{z}_2) = \bar{\lambda} \bar{f}(z_1) + \bar{\mu} \bar{f}(z_2)\end{aligned}$$

и

$$|\bar{f}(z)| = |f(\bar{z})| \leq \|f\| \|\bar{z}\| = \|f\| \|z\|. \quad (5)$$

Проверим теперь, что выполнены условия 1 — 3 определения инволюции. Имеем, учитывая правило умножения функционала на комплексное число (V.1.2),

$$\begin{aligned}\overline{(\lambda f_1 + \mu f_2)(z)} &= \overline{(\lambda f_1 + \mu f_2)(\bar{z})} = \overline{\lambda f_1(\bar{z}) + \mu f_2(\bar{z})} = \\ &= \overline{\lambda f_1(\bar{z})} + \overline{\mu f_2(\bar{z})} = \bar{\lambda} \bar{f}_1(z) + \bar{\mu} \bar{f}_2(z) = (\bar{\lambda} \bar{f}_1 + \bar{\mu} \bar{f}_2)(z) \\ \bar{\bar{f}}(z) &= \overline{\bar{f}(\bar{z})} = \overline{f(z)} = f(z).\end{aligned}$$

Наконец, из (5) вытекает неравенство $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$. С другой стороны, $\|f\| = \|\bar{\bar{f}}\| \leq \|\bar{f}\|$, откуда $\|\bar{f}\| = \|f\|$.

Обозначим через X вещественное ядро пространства Z и докажем, что если φ — линейный функционал в вещественном пространстве X , то комплексное расширение f функционала φ принадлежит вещественному ядру пространства Z^* , которое исчерпывается функционалами указанного вида. Оба эти утверждения без труда вытекают из определения сопряженного функционала. В самом деле, если f есть комплексное расширение функционала $\varphi \in X^*$, то

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\varphi(x) - \varphi(y)i} = \varphi(x) + \varphi(y)i = f(z) \quad (z = x + yi \in Z).$$

Напротив, если функционал f является вещественным элементом пространства Z^* , т. е. если $\bar{f} = f$, то согласно (4) это означает, что $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$. В частности, если $z = x \in X$, то $\overline{f(x)} = f(x)$, т. е. $f(x)$ вещественно.

Доказанное предложение можно высказать в следующей форме: вещественное ядро сопряженного пространства является сопряженным пространством по отношению к вещественному ядру данного пространства.

2.5. Естественно ожидать, что операция, сопряженная к вещественной, снова будет вещественной операцией. Пусть $\tilde{U}$ — вещественная операция, отображающая пространство Z в пространство W , и U — индуцируемая ею операция из пространства X в Y ($X = \text{Re } Z$, $Y = \text{Re } W$). Докажем, что $\tilde{U}^*$ будет вещественной операцией и что индуцируемая ею операция из пространства Y^* в X^* есть U^* . Послед-

нее утверждение надо понимать в том смысле, что если φ и ψ — функционалы в пространствах X и Y соответственно, причем

$$\varphi = U^*(\psi), \quad (6)$$

то

$$f = \tilde{U}^*(g), \quad (7)$$

где f — комплексное расширение функционала φ , а g — комплексное расширение функционала ψ ; наоборот, если вещественные функционалы $f \in Z^*$ и $g \in W^*$ связаны соотношением (7), то индуцируемые ими функционалы $\varphi \in X^*$ и $\psi \in Y^*$ связаны соотношением (6).

Вещественность операции $\tilde{U}^*$ доказывается совсем просто: если $g \in W^*$ — вещественный функционал, т. е. если $\bar{g} = g$, и $f = \tilde{U}^*(g)$, то

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{g(\tilde{U}(\bar{z}))} = \overline{g(\overline{\tilde{U}(z)})} = \bar{g}(\tilde{U}(z)) = f(z).$$

Пусть, далее, $\varphi = U^*\psi$, тогда ($x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(x) + i\varphi(y) = \psi(U(x)) + i\psi(U(y)) = \\ &= g(U(x) + iU(y)) = g(\tilde{U}(z)), \end{aligned}$$

так что $f = \tilde{U}^*(g)$. Столь же просто устанавливается, что из (7) вытекает (6).

§ 3. Спектр

3.1. В этом и следующем параграфах мы исследуем поведение уравнения

$$T_\lambda(x) = x - \lambda U(x) = y, \quad (1)$$

или, что то же самое, уравнение

$$T'_\mu(x) = \mu x - U(x) = y \quad (1')$$

в зависимости от комплексного параметра λ (или μ). Под U здесь и в дальнейшем подразумевается линейная операция в комплексном B -пространстве X .*)

В отношении разрешимости уравнения (1) комплексная плоскость разбивается на два множества: множество $\rho(U)$ тех значений λ , при которых уравнение (1) имеет единственное решение, какова бы ни была правая часть уравнения $y \in X$ (следовательно, операция T_λ имеет линейную обратную, см. XII.1.3), и множество $\chi(U)$ остальных значений λ . Точки множества $\rho(U)$ называются *регулярными значениями* операции U ; множество $\chi(U)$ называется *характеристическим множеством* операции U .

*) Если первоначально пространство X вещественное, то вместо U мы рассмотрим ее комплексное расширение.

Аналогично введем множество $\pi(U)$ тех μ , для которых уравнение (1') однозначно разрешимо при любой правой части и дополнительное множество $\sigma(U)$. Точки множества $\pi(U)$ называются *неособенными значениями* операции U ; множество $\sigma(U)$ называется *спектром* операции U .

Если при некотором λ однородное уравнение

$$T_{\lambda}(x) = x - \lambda U(x) = 0 \quad (2)$$

имеет отличные от нуля решения, то λ называется *характеристическим значением* операции U . Очевидно, множество $\chi_0(U)$ всех характеристических значений содержится в множестве $\chi(U)$. Каждое решение уравнения (2) называется *собственным* (или *характеристическим*) элементом, отвечающим данному характеристическому числу.

Множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} N(T_{\lambda}^n)$ называется *собственным* (или *характеристическим*) *подпространством*, а его размерность (конечная или бесконечная) — *кратностью* характеристического значения λ . Число r различных множеств $N(T_{\lambda}^n)$ ($n = 1, 2, \dots$) называется *рангом* характеристического значения (ср. лемма 2 из XIII. 1.1).

Если вместо уравнения (2) рассматривать однородное уравнение, соответствующее уравнению (1'):

$$T'_{\mu}(x) = \mu x - U(x) = 0, \quad (2')$$

то мы приходим к понятию *собственного значения, собственного элемента и собственного подпространства*, отвечающего данному собственному значению, которые уже были определены для операций в гильбертовом пространстве (IX. 4.1).

Отметим, что если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и μ — его собственное значение, то его ранг $r = 1$, т. е.

$$N(T'_{\mu}) = N(T'^2_{\mu}) = \dots = N(T'^n_{\mu}) = \dots \quad (3)$$

и потому в этом случае собственное подпространство есть $N(T'_{\mu})$, т. е. состоит из всех собственных элементов оператора U . Это обстоятельство и было учтено в определении главы IX.

Докажем соотношение (3). Так как собственные значения самосопряженного оператора вещественны, то оператор T'_{μ} и все его степени суть самосопряженные операторы. Опуская для простоты индекс μ и беря $n = 2^k$, будем иметь для $x \in N(T'^{2^k})$

$$(T'^{2^{k-1}}x, T'^{2^{k-1}}x) = (T'^{2^k}x, x) = 0,$$

откуда

$$T'^{2^{k-1}}x = 0.$$

Продолжая так дальше, придем в конце концов к равенству $T'x = 0$, т. е. $x \in N(T')$ и тем самым $N(T') \supset N(T'^{2k})$. Обратное включение выполнено для произвольного оператора. Таким образом, $N(T') = N(T'^{2k})$ ($k = 1, 2, \dots$). Если взять, далее, произвольное $n = 2, 3, \dots$, то, подбирая k так, чтобы $n \leq 2^k$ будем иметь очевидное включение $N(T') \subset N(T'^n) \subset N(T'^{2k})$. Откуда $N(T') = N(T'^n)$.

Укажем на простую связь между спектром и характеристическим множеством одной и той же операции U . Легко видеть, что если $\lambda \in \chi(U)$, то $\mu = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(U)$, и наоборот. Очевидно, таким же образом связаны характеристические и собственные значения операции U . Важно при этом иметь в виду, что собственный элемент, отвечающий характеристическому значению λ , будет также собственным элементом, отвечающим собственному значению $\mu = \frac{1}{\lambda}$ и обратно. Далее,

так как при $\lambda\mu = 1$ будет $N(T_\lambda^n) = N(T_\mu^n)$ ($n = 1, 2, \dots$), то последнее замечание распространяется и на собственные подпространства. В связи с указанным обстоятельством нет необходимости различать понятия собственного (характеристического) элемента, соответствующего характеристическому значению, и собственного элемента, соответствующего собственному значению, что и отражено в терминологии, введенной выше.

Указанная связь между характеристическим множеством и спектром позволяет рассматривать, в зависимости от удобства, лишь одно из этих параллельных, а, по существу, эквивалентных понятий, только в исключительных случаях давая обе формулировки.

Выскажем несколько простых предложений, относящихся к введенным выше понятиям.

I. Соотношение $\lambda \in \rho(U)$ равносильно существованию линейной двусторонней обратной операции $B_\lambda = T_\lambda^{-1} = (I - \lambda U)^{-1}$.

См. XII. 1.3, следствие к теореме 2(1. XII).

II. Множество регулярных значений открыто, и, следовательно, характеристическое множество замкнуто.

Это вытекает из теоремы о том, что если некоторая операция имеет линейную обратную, то и операция, близкая к ней по норме, также имеет линейную обратную (V. 2.6). В нашем случае

$$\|T_\lambda - T_{\lambda'}\| = |\lambda - \lambda'| \|U\|,$$

так что, если T_λ^{-1} существует, то при достаточно малой разности $\lambda - \lambda'$ будет существовать и $T_{\lambda'}^{-1}$.

III. Круг $|\lambda| < \frac{1}{\|U\|}$ содержится в множестве $\rho(U)$; следовательно, спектр $\sigma(U)$ целиком входит в круг $|\mu| \leq \|U\|$.

Чтобы установить справедливость этого предложения, достаточно применить теорему Банаха об обратной операции (V. 2.5).

IV. Множества $\chi(U)$ и $\chi(U^*)$ расположены симметрично относительно вещественной оси.

Действительно (IX.3.1),

$$T_{\lambda}^* = [I - \lambda U]^* = I^* - \bar{\lambda} U^*.$$

А по теореме 4 (2. XII) операции T_{λ}^{-1} и $(T_{\lambda}^*)^{-1*}$ существуют одновременно.

V. Если X — пространство с вещественным ядром, а U — вещественная операция, то множество $\chi_0(U)$ симметрично относительно вещественной оси. Кроме того, если $\lambda \in \chi_0(U)$ и z — соответствующий собственный элемент, то характеристическому значению $\bar{\lambda}$ будет отвечать собственный элемент $\bar{z}$.

В самом деле,

$$\bar{z} - \bar{\lambda} U(\bar{z}) = \overline{z - \lambda U(z)},$$

откуда вытекает, что равенства $z - \lambda U(z) = 0$ и $\bar{z} - \bar{\lambda} U(\bar{z}) = 0$ равносильны.

З а м е ч а н и е. В IX.5.3 было дано определение спектра для случая самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Доказанная там теорема 3 (5. IX) показывает равносильность обоих определений (главы IX и данного выше).

3.2. В случае, когда U — вполне непрерывная операция, структура характеристического множества может быть выяснена довольно полно.

Теорема 1 (3. XIII). Если U — вполне непрерывная операция, то а) характеристическое множество содержит лишь характеристические значения, т. е. $\chi(U) = \chi_0(U)$; при этом каждое характеристическое значение имеет конечную кратность;

б) каково бы ни было $r > 0$, круг $|\lambda| \leq r$ содержит разве лишь конечное число характеристических значений;

с) если $\lambda_1 \in \chi(U)$ и $\lambda_2 \in \chi(U^*)$, причем $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$, и если $x_1 \in X$ — собственный элемент, отвечающий λ_1 , а $g_2 \in X^*$ — собственный элемент, отвечающий λ_2 , то

$$g_2(x_1) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Согласно теореме 4 (1. XIII), если $\lambda \in \rho(U)$, то однородное уравнение (2) имеет ненулевое решение. Конечность собственного подпространства вытекает из леммы 2 (XIII.1.1). Действительно, согласно этой лемме существует такое n_0 , что $N(T_{\lambda}^{n_0}) = N(T_{\lambda}^{n_0})$ ($n \geq n_0$). Поэтому в данном случае собственное подпространство есть $N(T_{\lambda}^{n_0})$. Но

$$T_{\lambda}^{n_0} = (I - \lambda U)^{n_0} = I - \tilde{U},$$

*) T_{λ}^* следует понимать как $(T_{\lambda})^*$.

где $\tilde{U} = \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^{k-1} C_{n_0}^k \lambda^k U^k$ есть, очевидно, вполне непрерывная операция. Поэтому на основании упоминавшейся уже теоремы 4 (1. XIII) совокупность решений однородного уравнения

$$T_\lambda^{n_0}(x) = 0$$

образует конечномерное подпространство, а $N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^{n_0})$.

б) Допустим противное, т. е. предположим, что в некотором круге $|\lambda| \leq r$ содержится бесконечное множество характеристических значений. Выделим из этого множества последовательность $\{\lambda_n\}$ различных характеристических значений: $|\lambda_n| \leq r$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть $\{x_n\}$ — последовательность соответствующих собственных элементов:

$$x_n - \lambda_n U(x_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Покажем (по индукции), что при любом $n = 1, 2, \dots$ элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы. Для $n = 1$ это верно. Предположим, что утверждение справедливо при некотором $n \geq 1$. Проверим его для элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Допуская противное, будем иметь

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k,$$

откуда, в силу (4)

$$\frac{x_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda_k} x_k.$$

Сопоставляя это с предыдущим равенством, найдем

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k}\right) \alpha_k x_k = 0.$$

Так как $1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то, таким образом, элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ оказались линейно зависимыми вопреки индуктивному предположению.

Образуем множества $X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Так как по доказанному $X_{n+1} \neq X_n$, то по лемме о почти перпендикуляре (II. 2.9) можно найти такие элементы $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, что

$$y_n \in X_n; \quad \|y_n\| = 1; \quad \rho(y_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Если $x \in X_n$, т. е. если $x = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k$, то $U(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\lambda_k} x_k \in X_n$.

Вместе с тем $T_{\lambda_n}(x) = x - \lambda_n U(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) x_k \in X_{n-1}$ (так как коэффициент при x_n равен нулю).

Пусть $m > n$. Рассмотрим выражение

$$U(\lambda_m y_m) - U(\lambda_n y_n) = y_m - [T_{\lambda_m}(y_m) + U(\lambda_n y_n)] = y_m - \tilde{y}.$$

По доказанному $T_{\lambda_m}(y_m) \in X_{m-1}$ и $U(\lambda_n y_n) \in X_n \subset X_{m-1}$. Следовательно,

$$\tilde{y} = T_{\lambda_m}(y_m) + U(\lambda_n y_n) \in X_{m-1}.$$

Вследствие (5)

$$\|U(\lambda_m y_m) - U(\lambda_n y_n)\| = \|y_m - \tilde{y}\| > \frac{1}{2}.$$

Это, однако, противоречит полной непрерывности операции U , поскольку последовательность $\{\lambda_n y_n\}$ ограничена ($\|\lambda_n y_n\| \leq r$).

с) Имеем $\lambda_1 U(x_1) = x_1$ и $\lambda_2 U^*(g_2) = g_2$. Следовательно,

$$g_2(x_1) = g_2(\lambda_1 U(x_1)) = \lambda_1 U^*(g_2)(x_1) = \lambda_1 \left(\frac{g_2}{\lambda_2}\right)(x_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} g_2(x_1),$$

что, в силу $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$, возможно лишь в случае, если $g_2(x_1) = 0$.

§ 4. Резольвента

4.1. Здесь мы будем продолжать изучение уравнения

$$x - \lambda U(x) = y, \quad (1)$$

однако, в противоположность предыдущему параграфу, сейчас нас будет интересовать случай однозначной его разрешимости.

Пусть $\lambda \neq 0$ — регулярное значение операции U . Операция B_λ , определяемая из соотношения

$$I + \lambda B_\lambda = (I - \lambda U)^{-1}, \quad (2)$$

называется *резольвентой* операции U . При $\lambda = 0$ полагаем $B_0 = U$.

Если рассматривается спектр и, соответственно, множество неособенных значений, то вместо B_λ удобнее говорить об операции

$$R_\mu = (\mu I - U)^{-1}, \quad (3)$$

которая имеет смысл для всех неособенных значений операции U . Операцию R_μ мы также будем называть *резольвентой*. Опасность смешения двух понятий исключается, так как из контекста всегда будет ясно, о какой именно резольвенте идет речь; кроме того, тут

различения той и другой резольвенты остаются разные обозначения.

Если $\mu \neq 0$, то, очевидно,

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} B_{\frac{1}{\mu}}. \quad (4)$$

Наоборот, из равенства

$$(I + \lambda B_\lambda)(I - \lambda U) = (I - \lambda U)(I + \lambda B_\lambda) = I$$

получаем

$$B_\lambda = U(I - \lambda U)^{-1} = (I - \lambda U)^{-1} U. \quad (5)$$

Следовательно,

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda} U R_{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} R_{\frac{1}{\lambda}} U. \quad (6)$$

Соотношения (4) и (6) позволяют все предложения, доказанные для B_λ , переформулировать для R_μ , и обратно.

4.2. Исследуем поведение резольвенты B_λ при малых λ . Рассмотрим ряд

$$I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \dots + \lambda^n U^n + \dots \quad (7)$$

Если он сходится в пространстве операций $[X \rightarrow X]$, то согласно замечанию к теореме Банаха (V. 2.5) его сумма есть $(I - \lambda U)^{-1}$, т. е.

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \dots + \lambda^n U^n + \dots,$$

отсюда вследствие (5)

$$B_\lambda = U + \lambda U^2 + \dots + \lambda^n U^{n+1} + \dots \quad (8)$$

Эта формула имеет место для тех же λ , для которых сходится ряд (7). Но, как установлено в V. 2.2, ряд (7) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} < 1,$$

и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\lambda^n U^n\|} > 1.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1 (4. XIII). Резольвента B_λ разлагается в ряд (8) по степеням λ , радиус сходимости которого:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{B_0^n}}.$$

Если от резольвенты B_λ с помощью соотношения (4) перейти к резольвенте R_μ , то получим

Следствие. Резольвента R_μ разлагается в ряд по степеням μ^{-1} :

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \dots + \frac{1}{\mu^n} U^{n-1} + \dots \left(|\mu| > \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} \right).$$

4.3. Можно указать другое выражение для радиуса сходимости ряда (8), связанное с расположением характеристического множества на комплексной плоскости.

Докажем сначала два вспомогательных предложения.

Лемма 1. Каковы бы ни были $\lambda, \mu \in \rho(U)$, имеет место равенство

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda - \mu) B_\mu B_\lambda. \quad (9)$$

Доказательство. Из соотношения (5) имеем

$$B_\lambda - B_\mu = U(I - \lambda U)^{-1} - (I - \mu U)^{-1} U.$$

Умножая это равенство справа на $I - \lambda U$, а затем слева на $I - \mu U$, получим

$$(I - \mu U)(B_\lambda - B_\mu)(I - \lambda U) = (I - \mu U)U - U(I - \lambda U) = (\lambda - \mu)U^2,$$

и, следовательно,

$$B_\lambda - B_\mu = (\lambda - \mu)(I - \mu U)^{-1} U \cdot U(I - \lambda U)^{-1} = (\lambda - \mu) B_\mu B_\lambda,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Операции B_λ и B_μ перестановочны, т. е. $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$.

Лемма 2. Резольвента B_λ является непрерывной функцией параметра λ в каждой точке множества $\rho(U)$, т. е. если $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ($\lambda_n, \lambda_0 \in \rho(U)$), то $B_{\lambda_n} \rightarrow B_{\lambda_0}$.

Доказательство. Докажем сначала, что вещественная функция $\|B_\lambda\|$ непрерывна на $\rho(U)$. Если $U = 0$, то $B_\lambda = 0$, и наше утверждение доказано. Если же $U \neq 0$, то $B_\lambda \neq 0$, ввиду чего можно доказывать непрерывность функции $\frac{1}{\|B_\lambda\|}$. Из равенства (9) получаем

$$|\|B_\lambda\| - \|B_\mu\|| \leq \|B_\lambda - B_\mu\| = |\lambda - \mu| \|B_\mu B_\lambda\| \leq |\lambda - \mu| \|B_\mu\| \|B_\lambda\|,$$

следовательно,

$$\left| \frac{1}{\|B_\mu\|} - \frac{1}{\|B_\lambda\|} \right| \leq |\lambda - \mu|,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Установим теперь непрерывность B_λ . Так как множество $\rho(U)$ — открытое, а $\lambda_0 \in \rho(U)$, то найдется круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$, целиком содержащийся в $\rho(U)$. Непрерывная функция $\|B_\lambda\|$ ограничена в этом круге; пусть, например,

$$\|B_\lambda\| \leq M \quad (|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon). \quad (10)$$

Согласно (9) и (10)

$$\|B_\lambda - B_{\lambda_0}\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|B_{\lambda_0}\| \|B_\lambda\| \leq M^2 |\lambda - \lambda_0| \quad (|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon).$$

Лемма доказана.

Теорема 2 (4.XIII). Радиус сходимости r ряда (8) равен расстоянию r_0 от точки $\lambda = 0$ до характеристического множества $\chi(U)$.

Доказательство. Во-первых, так как в круге $|\lambda| < r$ ряд (8) сходится и, следовательно, при этих λ существует резольвента, то указанный круг содержится в множестве регулярных значений. Поэтому $r \leq r_0$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и произвольный функционал $f \in X^*$ и рассмотрим функцию φ комплексного переменного λ :

$$\varphi(\lambda) = f(B_\lambda(x)).$$

Докажем, что φ регулярна на множестве $\rho(U)$. Действительно, если $\lambda, \mu \in \rho(U)$, то в силу (9)

$$\frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} = \frac{f(B_\mu(x)) - f(B_\lambda(x))}{\mu - \lambda} = f(B_\mu B_\lambda(x)).$$

При $\mu \rightarrow \lambda$ правая часть имеет пределом $f(B_\lambda^2(x))$ (лемма 2). Таким образом, существует непрерывная производная

$$\varphi'(\lambda) = f(B_\lambda^2(x)).$$

Разложим функцию φ в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda_0 = 0$

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} \lambda + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n + \dots \quad (11)$$

Это разложение имеет место в круге, не содержащем особых точек функции φ и, тем более, в круге $|\lambda| < r_0$. Но в силу (8)

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(U^{n+1}(x)) \lambda^n \quad (|\lambda| < r). \quad (12)$$

При этом вследствие известной теоремы теории функций комплексного переменного ряды (11) и (12) тождественны, так что ряд (12) сходится при $|\lambda| < r_0$.

Возьмем произвольное $0 < \lambda_1 < r_0$. Из сходимости ряда (12) при $\lambda = \lambda_1$ вытекает, что

$$\lambda_1^n f(U^{n+1}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

и, следовательно, ввиду произвольности f ,

$$\lambda_1^n U^{n+1}(x) \longrightarrow 0.$$

Но слабо сходящаяся последовательность элементов ограничена (VIII. 2.1):

$$\sup_n \|\lambda_1^n U^{n+1}(x)\| < \infty.$$

Так как это неравенство выполнено для каждого $x \in X$, а пространство X полное, то по теореме 1 (I.VII)

$$\sup \|\lambda_1^n U^{n+1}\| = M < \infty. \quad (13)$$

Поэтому

$$\lambda_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{n}} = 1$$

и

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}} = r.$$

Так как λ_1 можно взять сколь угодно близким к r_0 , то $r_0 \leq r$. Учитывая доказанное выше неравенство $r \leq r_0$, получаем отсюда $r = r_0$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Пусть λ_0 — регулярное значение операции U . Как и выше, обосновывается разложение

$$B_\lambda = B_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) B_{\lambda_0}^2 + \dots + (\lambda - \lambda_0)^n B_{\lambda_0}^{n+1} + \dots,$$

имеющее место в круге $|\lambda - \lambda_0| < \rho_0$, где ρ_0 есть расстояние от точки λ_0 до характеристического множества, или, как в теореме 1,

$$\rho_0 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B_{\lambda_0}^{n+1}\|}}.$$

Заменяя резольвенту B_λ резольвентой R_μ , получаем следующий результат:

Следствие. Разложение

$$R_\mu = \frac{1}{\mu} I + \frac{1}{\mu^2} U + \dots + \frac{1}{\mu^{n+1}} U^n + \dots \quad (14)$$

имеет место при $|\mu| > \frac{1}{r}$, где $\frac{1}{r}$ — радиус наименьшего круга с центром в начале координат, целиком содержащего спектр.

Замечание 2. Если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то по IX. 5.3 $\frac{1}{r} = \|U\|$. Сопоставляя это с ре-

зультатом следствия к теореме 1, приходим к интересному соотношению

$$\|U\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}. *)$$

4.4. Применим доказанный результат к исследованию сходимости метода последовательных приближений для уравнения

$$x - U(x) = y. \quad (15)$$

Как было показано в V.3.1, сходимость ряда

$$I + U + U^2 + \dots + U^n + \dots \quad (16)$$

обеспечивает сходимость метода последовательных приближений, с какого бы начального приближения x_0 ни начать процесс последовательных приближений. Полагая в (14) $\mu = 1$, приходим к следующему критерию сходимости метода последовательных приближений для уравнения (15).

Теорема 3 (4. XIII). Если спектр операции U лежит в круге $|\mu| < 1$, то метод последовательных приближений для уравнения (15) сходится, каковы бы ни были $y \in X$ и начальное приближение $x_0 \in X$. Если же вне круга $|\mu| \leq 1$ имеются точки спектра, то существует множество $E \subset X$, являющееся вычетом **) в X , такое, что при $y \in E$ процесс последовательных приближений для уравнения (15), начатый с $x_0 = 0$, расходится.

В доказательстве нуждается только вторая часть теоремы. Заметим, что в этом случае будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U^n\| = \infty,$$

и вследствие замечания к теореме 1 (1. VII)

$$\sup_n \|U^n(y)\| = \infty \quad (17)$$

для всех $y \in X$ за исключением может быть некоторого множества G первой категории в X . Но сходимость процесса последовательных приближений, начатого с $x_0 = 0$, равносильна сходимости ряда

$$y + U(y) + U^2(y) + \dots + U^n(y) + \dots,$$

а ввиду (17) этот ряд расходится, если $y \notin G$.

*) Впрочем это равенство является следствием более сильного соотношения

$$\|U\| = \sqrt[n]{\|U^n\|} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

которое можно получить, если воспользоваться теоремой о спектре оператора $\varphi(U)$ (теорема 4 (5. IX)) применительно к функции $\varphi(t) = t^n$ ($n = 1, 2, \dots$).

**) Напомним, что множество E в пространстве X называется вычетом, если его дополнение — первой категории в X (см. 1.4.2).

З а м е ч а н и е 1. Если операция U такова, что все точки спектра, отличные от нулевой, суть собственные значения, то теорема может быть высказана в более определенной форме. Именно, для сходимости метода последовательных приближений в этом случае необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения операции U лежали в круге $|\mu| < 1$.

Действительно, согласно доказанной теореме, если метод последовательных приближений сходится, спектр операции U лежит в круге $|\mu| \leq 1$. Если допустить, что существует собственное значение μ_0 , лежащее на окружности $|\mu| = 1$, то, полагая в уравнении (15) $y = y'$, где y' — собственный элемент, отвечающий собственному значению μ_0 , и беря $x_0 = 0$, получим для n -го приближения x_n выражение

$$x_n = (1 + \mu_0 + \dots + \mu_0^{n-1}) y',$$

которое не имеет предела.

З а м е ч а н и е 2. Результаты теоремы и замечания 1 значительно упрощаются, если в уравнении (15) операция U является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Учитывая замечание 2 из 4.3, имеем в этом случае: для сходимости метода последовательных приближений для уравнения (15) достаточно, чтобы $\|U\| < 1$. Если все отличные от нуля точки спектра являются собственными значениями, то это условие также и необходимо.

Сформулируем, наконец, теорему 3 в терминах характеристического множества.

Теорема 3' (4. XIII). Если характеристическое множество операции U лежит вне круга $|\lambda| \leq 1$, то метод последовательных приближений для уравнения (15) сходится, каковы бы ни были $y \in X$ и начальное приближение $x_0 \in X$. Если же в круге $|\lambda| < 1$ имеются точки характеристического множества, то существует такое множество $E \subset X$, являющееся вычетом в X , что если $y \in E$, то процесс последовательных приближений, начатый с $x_0 = 0$, расходится.

В связи с этой теоремой также можно сделать замечания, аналогичные замечаниям 1 и 2. Предоставляем это читателю.

4.5. Если U — вполне непрерывная операция, то к результатам теорем 1 и 2 можно присоединить более тонкие факты, относящиеся к поведению резольвенты в окрестности характеристического значения.

Будем называть линейную операцию V *конечномерной*, если она отображает пространство X в конечномерное подпространство $\tilde{X} \subset X$. Выберем в $\tilde{X}$ полную систему линейно независимых элементов: $x_1, x_2, \dots, x_n$. По самому определению для произвольного $x \in X$

$$V(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ зависят, очевидно, от x . Полагая $\alpha_k = f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), мы без труда убедимся, что функционалы f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) линейные: аддитивность их не вызывает сомнений,

а непрерывность вытекает из того факта, что если последовательность элементов нормированного конечномерного пространства стремится к нулю, то к нулю стремится и каждая координата (см. II. 2.8). Таким образом, получаем

$$V(x) = f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2 + \dots + f_n(x)x_n. \quad (18)$$

Обратно, всякая операция V , представимая в форме (18), будет, разумеется, конечномерной.

Отметим, что конечномерная операция necessarily вполне непрерывна.

Рассмотрим теперь вполне непрерывную операцию U , и пусть λ_0 — ее характеристическое значение. Справедлива

Теорема 4 (4. XIII). *Операция U допускает представление, в форме*

$$U = U' + U'',$$

где U'' — конечномерная операция, а U' — вполне непрерывная, при этом характеристическое множество операции U'' состоит из единственной точки λ_0 , а характеристическое множество операции U' получается из характеристического множества операции U удалением из последнего точки λ_0 .

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_0 = 1$ (иначе мы рассмотрим бы вместо U операцию $\frac{1}{\lambda_0}U$). При этом предположении докажем, что разложение операции U на сумму $U' + U''$, указанное в теореме 1 (1. XIII), удовлетворяет требованиям данной теоремы.

Будем употреблять обозначения, использованные в теореме 1 (1. XIII). Проверим, что операция U'' имеет единственное характеристическое значение $\lambda_0 = 1$. Действительно, если $x_0 \in N(T)$, то тем самым $x_0 \in N(T') = X''$ и, следовательно, в силу определения операции U''

$$U''(x_0) = U(x_0) = x_0$$

и $\lambda_0 = 1$ есть характеристическое значение операции U'' .

Если

$$\lambda U''(x) = x \quad (19)$$

при некотором $x \in X$ ($x \neq 0$), то, так как $U''(x) \in X''$, будет $x \in X''$ и, следовательно, $U''(x) = U(x)$. Пусть $m \geq 0$ таково, что $T^{m+1}(x) = 0$, но $T^m(x) \neq 0$. Вследствие (19)

$$\begin{aligned} 0 &= T^m(x - \lambda U(x)) = T^m(x - \lambda [x - T(x)]) = \\ &= (1 - \lambda) T^m(x) + \lambda T^{m+1}(x) = (1 - \lambda) T^m(x), \end{aligned}$$

что возможно лишь при $\lambda = 1$.

Итак, единственное характеристическое значение операции U'' есть $\lambda_0 = 1$.

Докажем теперь утверждение теоремы, относящееся к характеристическому множеству операции U' .

Так как согласно теореме 1 (1. XIII) операция $T' = I - U'$ имеет линейную обратную, то $\lambda_0 = 1$ не является характеристическим значением операции U' . Пусть $\lambda \neq 1$ — какое-нибудь характеристическое значение операции U , к $x_0 \neq 0$ — соответствующий собственный элемент. Если бы оказалось, что $x_0 \in X''$, то, рассуждая как выше, мы получили бы $\lambda = 1$. Таким образом, $x_0 \notin X''$. Поэтому в разложении

$$x_0 = x_0' + x_0'' \quad (x_0' \in X', x_0'' \in X'') \quad (20)$$

(см. пункт с) теоремы 1 (1. XIII)) должно быть $x_0' \neq 0$. В силу единственности представления (20) из соотношения

$$x_0 = \lambda U(x_0') + \lambda U(x_0'')$$

получаем $x_0' = \lambda U(x_0') = \lambda U'(x_0')$, т. е. λ является характеристическим значением операции U' .

Наоборот, пусть λ — характеристическое значение операции U' и $x \neq 0$ — соответствующий собственный элемент. Так как

$$x = \lambda U'(x) \in X',$$

то $U'(x) = U(x)$ и, следовательно, $x = \lambda U(x)$, т. е. λ есть характеристическое значение операции U .

Остальные утверждения теоремы содержатся в теореме 1 (1. XIII). Теорема доказана.

4.6. Более полное представление о поведении резольвенты в окрестности характеристического значения можно составить на основании следующей теоремы.

Теорема 5 (4. XIII). Пусть λ_0 — характеристическое значение вполне непрерывной операции U . Тогда в достаточно малой окрестности точки λ_0 имеет место разложение

$$B_\lambda = \frac{U_{-r}}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \dots + \frac{U_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + U_0 + \\ + U_1(\lambda - \lambda_0) + \dots + U_n(\lambda - \lambda_0)^n + \dots \quad (21)$$

При этом r — ранг характеристического значения λ_0 ; операции $U_{-r}, \dots, U_{-1}$ — конечномерные; операция $U_{-r} \neq 0$.

Ряд в правой части (21) сходится в пространстве операций $[X \rightarrow X]$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем считать $\lambda_0 = 1$. Отметим сразу же, что на основании леммы 2 из XIII.1.1 ранг характеристического значения λ_0 конечен. Снова используя обозначения теоремы 1 (1. XII), будем иметь на основании замечания к упомянутой теореме, что $X' = T^r(X)$, $X'' = N(T^r)$.

Представляя элемент $x \in X$ в форме

$$x = x' + x'' \quad (x' \in X', x'' \in X'')$$

(пункт с) теоремы 1 (1. XIII)) и сопоставляя элементу x элемент $x' = P'(x)$ или элемент $x'' = P''(x)$, построим операции P' и P'' — проекции пространства X на подпространства X' и X'' . В силу оценки (9) § 1 эти операции линейные. Отметим еще, что

$$P'(X) = X', \quad P''(X) = X'', \quad P' + P'' = I.$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in X$. Элемент $x = B_\lambda(y)$ есть решение уравнения

$$x - \lambda U(x) = U(y). \quad (22)$$

Подставляя сюда $x = P'(x) + P''(x)$, $y = P'(y) + P''(y)$ и учитывая, что $U(X') \subset X'$, а $U(X'') \subset X''$, можем записать уравнение (22) в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} P'(x) - \lambda U P'(x) &= U P'(y) \\ P''(x) - \lambda U P''(x) &= U P''(y) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Замечая, что $U P' = U' P'$, можно переписать первое из уравнений в форме

$$T'_\lambda(P'(x)) = U' P'(y),$$

где обозначено $T'_\lambda = I - \lambda U'$. В силу теоремы 4 $\lambda_0 = 1$ есть регулярное значение операции U' . Поэтому на основании замечания к теореме 2, если разность $\lambda - 1$ достаточно мала, резольвента B'_λ операции U' допускает разложение

$$B'_\lambda = U'_0 + (\lambda - 1) U'_1 + \dots + (\lambda - 1)^n U'_n + \dots,$$

причем ряд в правой части сходится в пространстве $[X \rightarrow X]$. Учитывая сказанное, можем написать

$$P'(x) = B'_\lambda P'(y) = [U_0 + (\lambda - 1) U_1 + \dots + (\lambda - 1)^n U_n + \dots](y), \quad (24)$$

где $U_n = U'_n P'$ ($n = 1, 2, \dots$) и ряд в правой части по-прежнему сходится в пространстве $[X \rightarrow X]$.

Займемся теперь вторым из уравнений (23).

Образуем фактор-пространства

$$X^{(k)} = N(T^k)/N(T^{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

и через φ_k обозначим естественный гомоморфизм пространства $N(T^k)$ на $X^{(k)}$. Пространство $X^{(r)}$, очевидно, конечномерное. Выберем в нем полную систему линейно независимых элементов $\bar{x}_1^{(r)}, \bar{x}_2^{(r)}, \dots, \bar{x}_{n_r}^{(r)}$,

и пусть $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_{n_r}^{(r)}$ такие элементы из $\mathbf{N}(T^r)$, что $\varphi_r(x_j^{(r)}) = \bar{x}_j^{(r)}$. Элементы $x_j^{(r-1)} = T(x_j^{(r)})$ ($j = 1, 2, \dots, n_r$) входят в $\mathbf{N}(T^{r-1})$. При этом их образы $\bar{x}_j^{(r-1)} = \varphi_{r-1}(x_j^{(r-1)})$ линейно независимы, так

как если $\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j \bar{x}_j^{(r-1)} = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r-1)} = T\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)}\right) \in \mathbf{N}(T^{r-2});$$

иначе говоря, $\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)} \in \mathbf{N}(T^{r-1})$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j \bar{x}_j^{(r)} = \varphi_r\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j x_j^{(r)}\right) = 0,$$

что возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n_r} = 0$.

Присоединим к элементам $\bar{x}_1^{(r-1)}, \bar{x}_2^{(r-1)}, \dots, \bar{x}_{n_r}^{(r-1)}$ еще элементы $\bar{x}_{n_r+1}^{(r-1)}, \dots, \bar{x}_{n_{r-1}}^{(r-1)} \in \mathbf{X}^{(r-1)}$ так, чтобы в результате получился базис в $\mathbf{X}^{(r-1)}$. Выберем, далее, $x_{n_r+1}^{(r-1)}, \dots, x_{n_{r-1}}^{(r-1)} \in \mathbf{N}(T^{r-1})$ так, чтобы $\bar{x}_j^{(r-1)} = \varphi_{r-1}(x_j^{(r-1)})$.

Продолжая рассуждать так и дальше, мы для каждого $k = 1, 2, \dots, r$ построим элементы $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}$ так, что $x_j^{(k)} \in \mathbf{N}(T^k)$; $T(x_j^{(k)}) = x_j^{(k-1)}$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$; $k = 1, 2, \dots, r$; $x_j^{(0)} = 0$). (25)

При этом элементы

$$\bar{x}_1^{(k)} = \varphi_k(x_1^{(k)}), \bar{x}_2^{(k)} = \varphi_k(x_2^{(k)}), \dots, \bar{x}_{n_k}^{(k)} = \varphi_k(x_{n_k}^{(k)})$$

образуют при каждом $k = 1, 2, \dots, r$ базис в пространстве $\mathbf{X}^{(k)}$.

Обозначим

$$\mathbf{X}_k = \mathcal{L}(\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}\}) \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Вследствие (25)

$$T(\mathbf{X}_k) \subset \mathbf{X}_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, r; \mathbf{X}_0 = \{0\}). \quad (26)$$

Докажем, что элементы $\{x_j^{(k)}\}$ ($j = 1, 2, \dots, n_k$; $k = 1, 2, \dots, r$) образуют полную в $\mathbf{X}''$ систему линейно независимых элементов. Пусть

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)} = 0.$$

Поскольку $x_j^{(k)} \in N(T^{r-1})$ при $k < r$, применение операции φ_r дает

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j^{(k)} \varphi_r(x_j^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n_r} \lambda_j^{(r)} \bar{x}_j^{(r)} = 0,$$

и, следовательно, $\lambda_j^{(r)} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n_r$). Аналогичным образом убеждаемся, что и все остальные коэффициенты $\lambda_j^{(k)}$ равны нулю. Рассмотрим теперь произвольный элемент $x'' \in X''$. Элемент $\varphi_r(x'') \in X^{(r)}$, поэтому найдутся коэффициенты $\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_{n_r}^{(r)}$ такие, что

$$\varphi_r(x'') = \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} \bar{x}_j^{(r)} = \varphi_r\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} x_j^{(r)}\right).$$

Поэтому

$$x'' - \sum_{j=1}^{n_r} \alpha_j^{(r)} x_j^{(r)} \in N(T^{r-1}).$$

Продолжая подобные рассуждения, получим в конце концов, что при некоторых $\alpha_j^{(k)}$

$$x'' - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j^{(k)} \in N(T^0) = \{0\},$$

и, следовательно, $x'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j^{(k)}$.

Пусть x —произвольный элемент из X . Элемент $P''(x) \in X''$, вследствие чего

$$P''(x) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)}(x) x_j^{(k)},$$

при этом, как отмечалось в 4.5, коэффициенты $\alpha_j^{(k)}$ суть линейные функционалы. Если обозначить

$$P_k(x) = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)}(x) x_j^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

то в силу сказанного P_k будет линейной операцией, отображающей X на X_k , причем

$$P'' = P_1 + P_2 + \dots + P_r, \quad (27)$$

$$P_m P_k = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ P_m & m = k \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \dots, r). \quad (28)$$

Принимая во внимание соотношение $UP'' = P''U$, запишем правую часть второго из уравнений (23) в виде $P''U(y)$, после чего заменим операцию P'' суммой $P_1 + P_2 + \dots + P_r$.

$$\sum_{k=1}^r P_k(x) - \lambda \sum_{k=1}^r UP_k(x) = \sum_{k=1}^r P_k U(y).$$

Применяя к обеим частям равенства операцию P_m , получим с учетом (28)

$$P_m(x) - \lambda \sum_{k=1}^r P_m UP_k(x) = P_m U(y) \quad (m = 1, 2, \dots, r). \quad (29)$$

Но

$$UP_k(x) = P_k(x) - TP_k(x),$$

поэтому вследствие (26)

$$P_m UP_k(x) = \begin{cases} P_m(x) & k = m \\ -TP_{m+1}(x) & k = m + 1 \\ 0 & k \neq m, m + 1 \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \dots, r; P_{r+1} = 0).$$

Используя это соотношение, можем записать уравнение (29) в более простой форме

$$P_r(x) - \lambda P_r(x) = P_r U(y), \quad (30)$$

$$P_m(x) - \lambda [P_m(x) - TP_{m+1}(x)] = P_m U(y) \quad (m = 1, 2, \dots, r-1). \quad (31)$$

Из (30) находим

$$P_r(x) = \frac{P_r U(y)}{1 - \lambda},$$

и, следовательно, на основании (31)

$$P_{r-1}(x) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} TP_r(x) + \frac{1}{1 - \lambda} P_{r-1} U(y) = \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2} TP_r U(y) + \frac{1}{1 - \lambda} P_{r-1} U(y),$$

и вообще для любого $m = 1, 2, \dots, r$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{r-m} \frac{\lambda^k}{(1 - \lambda)^{k+1}} T^k P_{m+k} U(y).$$

Складывая все полученные равенства, будем иметь

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{m=1}^r P_m(x) = \sum_{m=1}^r \sum_{k=0}^{r-m} \frac{\lambda^k}{(1 - \lambda)^{k+1}} T^k P_{m+k} U(y) = \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k}{(1 - \lambda)^{k+1}} \sum_{m=1}^{r-k} T^k P_{m+k} U(y). \end{aligned} \quad (32)$$

Дробь $\frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}}$ разложим на простейшие:

$$\frac{\lambda^k}{(1-\lambda)^{k+1}} = \sum_{j=0}^k \frac{c_j^{(k)}}{(\lambda-1)^{j+1}}.$$

Здесь $c_j^{(k)}$ — некоторые постоянные, причем $c_k^{(k)} = (-1)^{k+1}$. Подставляя это в (32), получим

$$P''(x) = \sum_{s=1}^r \frac{U_{-s}(y)}{(\lambda-1)^s}, \quad (33)$$

где операции U_{-s} ($s=1, 2, \dots, r$) суть линейные комбинации операций вида $T^k P_{m+k} U$. Так как $P_{m+k}(X) = X_{m+k} \subset X''$, а на основании пункта б) теоремы 1 (1.XIII) $T(X'') \subset X''$, то операции U_{-s} отображают пространство X в X'' и, следовательно, являются конечномерными. Далее, из равенства (32) видно, что

$$U_{-r} = (-1)^r T^{r-1} P_r U.$$

Поэтому, если, например, $y = x_1^{(r)}$, то в силу (25)

$$\begin{aligned} U_{-r}(y) &= (-1)^r T^{r-1} P_r U(x_1^{(r)}) = (-1)^r T^{r-1} P_r(x_1^r - x_1^{(r-1)}) = \\ &= (-1)^r T^{r-1}(x_1^{(r)}) = (-1)^r x_1^{(1)} \neq 0, \end{aligned}$$

так что $U_{-r} \neq 0$.

Складывая соотношения (24) и (33), получим требуемое разложение резольвенты B_λ .

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то теорема может быть несколько уточнена, так как в этом случае $r=1$ (см. XIII. 3.1) и, следовательно, в разложении (21) будет лишь одно слагаемое с отрицательным показателем у разности $\lambda - \lambda_0$, именно $(\lambda - \lambda_0)^{-1} U_{-1}$. Мы не приводим подробной формулировки соответствующего результата, так как он сформулирован уже (и в более сильной форме) в IX.4.5.

§ 5. Альтернатива Фредгольма

В этом параграфе будут указаны условия, которым должна удовлетворять линейная операция T , отображающая B -пространство X в себя, чтобы для нее имела место альтернатива Фредгольма (см. XIII.1.4). В частности, оказывается, что если некоторая степень U^m линейной операции U есть вполне непрерывная операция, то для $T = I - U$ справедлива альтернатива Фредгольма. Изложенные ниже результаты принадлежат С. М. Никольскому (см. [86a]).

5.1. Рассмотрим уравнение

$$T(x) = y \quad (1)$$

и сопряженное к нему

$$T^*(g) = f. \quad (2)$$

Рассмотрим также соответствующие однородные уравнения

$$T(x) = 0, \quad (3)$$

$$T^*(g) = 0. \quad (4)$$

Напомним, что справедливость альтернативы Фредгольма для операции T означает, что

1) либо уравнения (1) и (2) разрешимы, каковы бы ни были их правые части, и тогда их решения единственны;

2) либо однородные уравнения (3) и (4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ соответственно; в этом случае для разрешимости уравнения (1), соответственно уравнения (2), необходимо и достаточно, чтобы

$$g_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

соответственно

$$f(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

при этом общее решение уравнения (1) дается равенством

$$x = x^* + \sum_{k=1}^n c_k x_k,$$

а общее решение уравнения (2) —

$$g = g^* + \sum_{k=1}^n c_k g_k,$$

где x^* (соответственно g^*) какое-нибудь решение уравнения (1) (уравнения (2)), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Следующая ниже теорема показывает, что класс операций T , для которых имеет место альтернатива Фредгольма, немногим, по существу, отличается от класса операций вида $T = I - U$, где U — вполне непрерывная операция.

Теорема 1 (5.XIII). Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно, чтобы для операции T имела место альтернатива Фредгольма.

1) Операция T представима в форме

$$T = W + V,$$

где W — операция, имеющая двустороннюю линейную обратную, а V — вполне непрерывная операция.

2) Операция T представима в форме

$$T = W_1 + V_1,$$

где W_1 — операция, имеющая двустороннюю линейную обратную, а V_1 — конечномерная операция.

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться доказательством достаточности условия 1) и необходимости условия 2).

Достаточность условия 1). Пусть

$$T = W + V,$$

причем W имеет двустороннюю линейную обратную W^{-1} , а V вполне непрерывна. Уравнение (1) эквивалентно в этом случае уравнению

$$W^{-1}T(x) = W^{-1}(y). \quad (5)$$

Далее, существует линейная двусторонняя обратная операция $W^{*-1} = (W^{-1})^*$ (XII.2.3), поэтому уравнение (2) равносильно уравнению

$$T^*W^{*-1}(g) = f \quad (6)$$

в том смысле, что если g_0 — решение уравнения (6), то $W^{*-1}(g_0)$ будет решением уравнения (2), а если g'_0 — решение уравнения (2), то $W^*(g'_0)$ будет решением уравнения (6).

Введем обозначение $U = -W^{-1}V$. Принимая во внимание, что $U^* = -V^*(W^{-1})^* = -V^*W^{*-1}$ (см. IX.3.1), мы можем переписать уравнения (5) и (6) в форме

$$x - U(x) = W^{-1}(y), \quad (7)$$

$$g - U^*(g) = f. \quad (8)$$

Поскольку операция U вполне непрерывна, для уравнений (7) и (8) справедливо заключение теоремы 4 (1.XIII). Следовательно, однородные уравнения

$$x - U(x) = 0, \quad (9)$$

$$g - U^*(g) = 0 \quad (10)$$

имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$. Однородное уравнение (3), очевидно, будет иметь ту же полную систему линейно независимых решений, что и уравнение (9), т. е. $x_1, x_2, \dots, x_n$. Докажем, что функционалы

$$g_k = W^{*-1}(g'_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

образуют полную систему линейно независимых решений уравнения (4). То, что каждый функционал (11) является решением уравнения (4), вытекает из отмеченной выше эквивалентности уравнений (2) и (6). Функционалы (11) линейно независимы, так как из соотношения $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = 0$ вытекает $\sum_{k=1}^n \alpha_k g'_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k W^*(g_k) = 0$, а это возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Наконец, если бы

уравнение (4) имело решение g_0 , не являющееся линейной комбинацией функционалов (11), то функционал $W^*(g_0)$ был бы решением уравнения (10), не являющимся линейной комбинацией функционалов $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$, что невозможно.

Таким образом, уравнения (3) и (4) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.

Далее, снова по теореме 4(1.XIII), уравнение (5), а, следовательно, и уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$g'_k(W^{-1}(y)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Это условие в силу (11) эквивалентно следующему:

$$(W^{-1})^*(g'_k)(y) = W^{*-1}(g'_k)(y) = g_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Аналогично проверяется, что условия

$$f(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (2).

Необходимость условия 2). Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $g_1, g_2, \dots, g_n$ — полные системы линейно независимых решений уравнений (3) и (4) соответственно. Пользуясь теоремой 5(2.IV) и теоремой 3(1.V), найдем функционалы $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ и элементы $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ так, что

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

$$g_k(y_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Обозначим $Y' = T(X)$, $Y'' = \mathcal{L}(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$. Каждый элемент $y \in X$ может быть единственным образом представлен в виде

$$y = y' + y'' \quad (y' \in Y', y'' \in Y''). \quad (15)$$

Действительно, если положить

$$y'' = \sum_{k=1}^n g_k(y) y_k, \quad y' = y - y'',$$

то в силу (14)

$$g_j(y') = g_j(y) - \sum_{k=1}^n g_k(y) g_j(y_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

так что уравнение $T(x) = y'$ имеет решение, и, следовательно, $y' \in Y'$. Единственность представления (15) вытекает из того, что

если $y'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y'$, то уравнение $T(x) = y''$ должно иметь решение и поэтому $g_j(y'') = \alpha_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим, далее, $X' = N(f_1, f_2, \dots, f_n)$ и $X'' = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Аналогично предыдущему докажем, что всякий элемент $x \in X$ может быть единственным образом представлен в форме

$$x = x' + x'' \quad (x' \in X', \quad x'' \in X''). \quad (16)$$

Построим операцию W_1 , полагая

$$W_1(x) = T(x) + \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k,$$

и докажем, что W_1 осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на себя и, следовательно, имеет двустороннюю линейную обратную (теорема 2(1.XII)). В самом деле, пусть y — произвольный элемент из X . Представим его в форме (15) $y = y' + y''$.

При этом $y' \in Y' = T(X)$, $y'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k \in Y''$; т. е. уравнение $T(x) = y'$ имеет решение x' , которое можно считать элементом из X' . *)

Положив

$$x'' = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad x^* = x' + x''$$

и учитывая, что $T(x'') = 0$, $f_j(x') = 0$, а также (13), получим

$$\begin{aligned} W_1(x^*) &= T(x') + T(x'') + \sum_{k=1}^n f_k(x'') y_k = T(x') + \\ &+ \sum_{k=1}^n f_k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right) y_k = y' + \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k = y. \end{aligned}$$

Покажем, что, кроме элемента x^* , других решений уравнение $W_1(x) = y$ не имеет. В самом деле, в противном случае существовал бы такой элемент $x_0 \neq 0$, что

$$W_1(x_0) = 0,$$

т. е.

$$T(x_0) + \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0,$$

*) Действительно, представляя решение x в форме (16): $x = x' + x''$ и принимая во внимание, что $T(x'') = 0$, будем иметь $y' = T(x) = T(x')$.

При этом $T(x_0) \in Y'$, а $\sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k \in Y''$. В силу единственности представления элемента в форме (15), приходим к соотношениям

$$T(x_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^n f_k(x_0) y_k = 0, \quad f_k(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

откуда получаем $x_0 = 0$ (так как одновременно $x_0 \in X''$ и $x_0 \in X'$).

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно положить

$$V_1(x) = - \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k.$$

З а м е ч а н и е. Предоставляем читателю доказать, что если в условиях 1) или 2) заменить операцию T операцией T^* , то получатся два условия, также необходимых и достаточных для того, чтобы для операции T имела место альтернатива Фредгольма.

5.2. Дальнейшее изложение опирается на две простые леммы.

Лемма 1. Пусть A и B — линейные операции, отображающие нормированное пространство X в себя. Если эти операции перестановочны, а операция $C = AB$ имеет обратную (двустороннюю), то операции A и B также имеют обратные.

Доказательство. Докажем сначала, что операции A и C^{-1} перестановочны. Действительно, имеем

$$A = C^{-1}CA = C^{-1}ABA = C^{-1}A(AB) = C^{-1}AC.$$

Умножая это соотношение справа на C^{-1} , получим $AC^{-1} = C^{-1}A$.

Далее, используя доказанную перестановочность операций A и C^{-1} , можем написать

$$B(AC^{-1}) = BAC^{-1} = CC^{-1} = I$$

и

$$(AC^{-1})B = C^{-1}AB = C^{-1}C = I,$$

откуда и следует, что существует $B^{-1} = AC^{-1}$. Аналогично доказывается, что существует $A^{-1} = BC^{-1}$.

З а м е ч а н и е. Если операция C^{-1} линейная, то будут линейными и операции A^{-1} и B^{-1} .

Лемма 2. Пусть U — линейная операция в пространстве X . Характеристическое множество $\chi(U)$ операции U и характеристическое множество $\chi(U^m)$ операции U^m связаны соотношением

$$[\chi(U)]^m \subset \chi(U^m),$$

т. е. если $\lambda \in \chi(U)$, то $\lambda^m \in \chi(U^m)$.

Доказательство. Обозначим $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Имеем

$$I - \lambda^m U^m = (I - \lambda U)(I - \lambda \varepsilon U) \dots (I - \lambda \varepsilon^{m-1} U).$$

Если $\lambda^m \notin \chi(U^m)$, то, полагая

$$A = I - \lambda U, \quad B = (I - \lambda \varepsilon U) \dots (I - \lambda \varepsilon^{m-1} U), \quad C = I - \lambda^m U^m,$$

будем иметь, что существует линейная обратная C^{-1} . Следовательно, на основании замечания к лемме 1 существует линейная обратная A^{-1} , т. е. $\lambda \in \chi(U)$.

5.3. Считая X , как и в 5.1, B -пространством, рассмотрим линейную операцию U в X .

Теорема 2 (5. XIII). Пусть существует такое натуральное число m , что операция U^m вполне непрерывна. Тогда для операции $T = I - U$ справедлива альтернатива Фредгольма.

Доказательство. Согласно лемме 2 характеристическое множество $\chi(U)$ состоит из изолированных точек, поэтому на единичной окружности комплексной плоскости имеется лишь конечное число точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v \in \chi(U)$.

Пусть p пробегает множество всех простых чисел; числа

$$e^{\frac{2k\pi i}{p}} \quad (k = 1, 2, \dots, p-1)$$

все различны, поэтому при достаточно большом p_0

$$\lambda_j \neq e^{\frac{2k\pi i}{p}} \quad (p \geq p_0; \quad k = 1, 2, \dots, p-1; \quad j = 1, 2, \dots, v). \quad (17)$$

Можно считать, что m —простое число, причем $m \geq p_0$. Напишем разложение

$$I - U^m = (I - U)(I - \varepsilon U) \dots (I - \varepsilon^{m-1} U) = (I - U)V, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}, \quad V = (I - \varepsilon U) \dots (I - \varepsilon^{m-1} U).$$

Вследствие (17) операции $I - \varepsilon^k U$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$) обратимы, и, следовательно, существует линейная операция V^{-1} . Но тогда

$$T = I - U = (I - U^m)V^{-1} = V^{-1} - U^m V^{-1}.$$

Поскольку операция V^{-1} обратима, а операция $U^m V^{-1}$ вполне непрерывна, применима теорема 1.

Доказательство теоремы закончено.

5.4. На операции рассмотренного в предыдущей теореме вида распространяется теорема о характеристическом множестве вполне непрерывной операции (теорема 1 (3. XIII)). Именно, справедлива

Теорема 3 (5. XIII). Если при некотором t операция U^m вполне непрерывна, то 1) характеристическое множество $\chi(U)$ операции U состоит только из характеристических значений, причем каждое характеристическое значение имеет конечный ранг, а соответствующее собственное подпространство конечномерно; 2) в каждом круге $|\lambda| \leq R$ комплексной плоскости имеется лишь конечное число характеристических значений.

Доказательство. Принимая во внимание результат леммы 2, можно ограничиться доказательством только первого пункта теоремы. При этом первая его часть очевидным образом вытекает из теоремы 2. Следовательно, остается доказать конечность ранга каждого характеристического значения и конечномерность соответствующего собственного подпространства.

Не умаляя общности, можно считать, что рассматриваемое характеристическое значение $\lambda_0 = 1$. Обозначим $T_m = I - U^m$. На основании (18) можно записать

$$T_m = VT, \quad T = V^{-1}T_m.$$

Поскольку операции T , T_m , V и V^{-1} перестановочны друг с другом, то

$$T_m^n = V^n T^n, \quad T^n = V^{-n} T_m^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда сразу же следует, что

$$N(T_m^n) = N(T^n). \quad (19)$$

Таким образом, поскольку U^m — вполне непрерывная операция, а для таких операций доказываемое утверждение уже установлено, на основании (19) можно заключить о справедливости этого утверждения и в рассматриваемом случае.

В заключение приведем пример линейной операции U , которая сама не является вполне непрерывной, но имеет вполне непрерывную степень U^2 .

Пусть X — одно из пространств l^p , m , c , c_0 . Для $x = \{\xi_n\} \in X$ положим $y = U(x)$, где

$$y = \{\eta_n\} \left(\eta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ нечетное} \\ \xi_{n-1} & n \text{ четное} \end{cases}; \quad n = 1, 2, \dots \right).$$

Очевидно, $U^2 = 0$.

Замечание. Поскольку теоремы § 4, доказанные для вполне непрерывных операций, использовали лишь те свойства вполне непрерывных операций, которые заключены в теореме 4 (1. XIII) и теореме 1 (3. XIII), а эти теоремы переносятся на случай операций рассмотренного выше вида без каких-либо изменений в формулировках, то упомянутые результаты из § 4 также верны, если считать, что лишь некоторая степень операции U вполне непрерывна.

§ 6. Применение к интегральным уравнениям

6.1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (1)$$

предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывной в квадрате $[0, 1; 0, 1]$ функцией. Если трактовать интегральное слагаемое как линейную операцию в пространстве $\mathbf{C}$, то уравнение (1) оказывается уравнением изученного в предыдущих параграфах типа.

Можно было бы рассматривать интегральное уравнение более общего вида, чем (1), а именно уравнение

$$x(s) - \lambda \int_T K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (1')$$

где T — произвольное замкнутое ограниченное множество в ν -мерном евклидовом пространстве (s, t в данном случае означают точки ν -мерного пространства). Однако все, что будет доказано для уравнения (1), без каких-либо существенных изменений в доказательствах переносится на уравнение (1'), ввиду чего мы и будем рассматривать более простой случай.

Интегральная операция U

$$z = U(x) \quad z(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt, \quad (2)$$

рассматриваемая как операция из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$, имеет норму (см. III. 2.4.)

$$\|U\| = \max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt$$

и является вполне непрерывной (IX. 2.1).

Запишем уравнение (1) в форме

$$x - \lambda U(x) = y. \quad (3)$$

Решение x^* этого уравнения, выражающееся через y по формуле

$$x^* = y + \lambda B_\lambda(y),$$

может быть, согласно теореме 1 (4. XIII), разложено в ряд по степеням

$$x^* = y + \lambda U(y) + \dots + \lambda^n U^n(y) + \dots, \quad (4)$$

который сходится для всех

$$|\lambda| < \frac{1}{d} = r,$$

где $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|U^n\|}$, а r есть расстояние от точки $\lambda = 0$ до характеристического множества операции U (теорема 2(4.XIII)). Сходимость ряда (4) во всяком случае имеет место для

$$|\lambda| < \frac{1}{\|U\|} = \frac{1}{\max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt}.$$

Как было показано в V. 3.8 степени операции U также будут интегральными операциями. Именно

$$z = U^n(x) \quad z(s) = \int_0^1 K_n(s, t) x(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где $K_n(s, t)$ — повторные ядра.

Подставляя (5) в (4), получим разложение решения интегрального уравнения (1) в ряд по степеням параметра

$$x^*(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) y(t) dt + \dots + \lambda^n \int_0^1 K_n(s, t) y(t) dt + \dots$$

При этом ряд сходится равномерно относительно $s \in [0, 1]$.

Поскольку ряд

$$B_\lambda = U + \lambda U^2 + \dots + \lambda^{n-1} U^n + \dots \quad (6)$$

сходится в пространстве операций из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$, то

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda^{j-1} U^j \right\| = \max_s \int_0^1 \left| \sum_{j=m+1}^{m+p} \lambda^{j-1} K_j(s, t) \right| dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(s, t) \quad (7)$$

сходится в пространстве $\mathbf{L}$ равномерно относительно $s \in [0, 1]$. Сумма этого ряда — функция $\Gamma(s, t; \lambda)$ — называется *резольвентой* интегрального уравнения (1). Ясно, что

$$B_\lambda(y)(s) = \int_0^1 \Gamma(s, t; \lambda) y(t) dt,$$

в силу чего формулу (4) можно записать еще в виде

$$x^*(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \Gamma(s, t; \lambda) y(t) dt.$$

Если $|\lambda| < r$, то по теореме 3(4.XIII) процесс последовательных приближений для уравнения (3) сходится, а это в применении к интегральному уравнению (1) дает следующий результат: для указанных λ решение уравнения (1) может быть получено как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $\{x_n(s)\}$, определяемых по рекуррентной формуле

$$x_{n+1}(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) x_n(t) dt + y(s) \quad (n=0, 1, \dots),$$

причем $x_0(t)$ — произвольная непрерывная функция.

6.2. Если ядро $K(s, t)$ обращается в нуль при $s < t$, то уравнение (1) можно записать в форме

$$x(s) - \lambda \int_0^s K(s, t) x(t) dt = y(s). \quad (8)$$

Уравнения такого вида называются *интегральными уравнениями Вольтерра*.

Нетрудно проверить, что повторные ядра для уравнения Вольтерра также обращаются в нуль при $s < t$.

Предполагая ядро $K(s, t)$ непрерывным при $0 \leq t \leq s \leq 1$, докажем, что разложение (4) имеет место при всех комплексных λ , т. е. что $r = \infty$.

Положим $|K(s, t)| \leq M$. Для $K_n(s, t)$ без труда получаем оценку

$$|K_n(s, t)| \leq \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} M^n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Действительно, при $n=1$ эта оценка тривиальна, а если она верна при некотором $n > 1$, то

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(s, t)| &\leq \int_0^s |K(s, u) K_n(u, t)| dt \leq M \int_0^s \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} M^n du = \\ &= \frac{s^n}{n!} M^{n+1}. \end{aligned}$$

Из (9) получаем

$$\|U^n\| = \max_s \int_0^s |K_n(s, t)| dt \leq M^n \max_s \int_0^s \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{M^n}{(n-1)!},$$

откуда

$$\sqrt[n]{\|U^n\|} \leq M \sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, $r = \infty$ и интегральная операция типа Вольтерра не имеет характеристических значений.

6.3. Рассмотрим опять уравнение (1). Так как операция (2) вполне непрерывна, для уравнения (3) имеет место альтернатива Фредгольма. Это приводит к следующему результату для интегрального уравнения (1).

Теорема 1 (6. XIII). *Либо уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, какова бы ни была непрерывная функция $y(s)$, либо уравнение*

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = 0 \quad (10)$$

имеет конечное число линейно независимых решений $x_1(s)$, $x_2(s)$, ..., $x_n(s)$. При этом уравнение

$$\psi(t) - \bar{\lambda} \int_0^1 \overline{K(s, t)} \psi(s) ds = 0$$

имеет также n линейно независимых непрерывных решений $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_n(t)$. В последнем случае уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \overline{\psi_k(s)} y(s) ds = 0.$$

Те значения λ , для которых уравнение (10) имеет решения, отличные от нуля, называются *характеристическими значениями* уравнения (1) или ядра $K(s, t)$. Иначе говоря, характеристические значения уравнения (1) не что иное, как характеристические значения операции U . Поэтому для наименьшего по модулю характеристического значения λ_1 интегрального уравнения справедлива оценка

$$|\lambda_1| = R = \frac{1}{d} \geq \frac{1}{\|U\|} = \frac{1}{\max_{s, t} \int_0^1 |K(s, t)| dt} \geq \frac{1}{\max_{s, t} |K(s, t)|}.$$

Используя зависимость решения уравнения (3) от λ , мы на основании теоремы 5(4. XIII) приходим к следующему результату.

Теорема 2 (6. XIII). *В окрестности характеристического значения λ_0 решение x^* уравнения (1) может быть представлено в форме*

$$x^*(s) = \frac{y_{-r}(s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \dots + \frac{y_{-1}(s)}{\lambda - \lambda_0} + y_0(s) + \dots \\ \dots + y_n(s) (\lambda - \lambda_0)^n + \dots$$

где $y_k(s)$ ($k = -r, \dots, 0, \dots$) — непрерывные функции, зависящие только от y . Ряд в правой части сходится равномерно относительно $s \in [0, 1]$.

Таким образом, $x^*(s)$ при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ является мероморфной функцией λ с полюсами в характеристических значениях.

6.4. Рассмотрим теперь пространство L^p_D , где D — ограниченная область ν -мерного пространства, и интегральное уравнение в нем

$$x(s) - \lambda \int_D K(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (s \in D). \quad (11)$$

Пусть ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 (2.X) ($\sigma = p$), т. е.

$$1) \left\{ \int_D |K(s, t)|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leq C_1 \quad (s \in D);$$

$$2) \left\{ \int_D |K(s, t)|^q ds \right\} \leq C_2 \quad (t \in D);$$

$$3) p - r(p - 1) < \sigma < p.$$

Тогда по цитированной выше теореме интегральная операция U с ядром $K(s, t)$ будет вполне непрерывной операцией из L^p_D в L^p_D с нормой $\|U\| \leq C_1^{1-\frac{\sigma}{p}} C_2^{\frac{\sigma}{p}}$ и, следовательно, к уравнению (11) применимо все сказанное выше по поводу уравнения (1).

В частности, если ядро $K(s, t)$ — типа потенциала, т. е. если

$$K(s, t) = \frac{B(s, t)}{|s - t|^m},$$

где $B(s, t)$ — ограниченная непрерывная при $s \neq t$ функция, а $m < \nu$, то указанные выше условия будут выполнены (теорема 6 (2.X)).

Если, кроме того, $B(s, t)$ — непрерывная функция и

$$p > \frac{\nu}{\nu - m},$$

то по теореме 7 (2.X) операция U будет отображать L^p_D в C_D , так что в этом случае степенные ряды, представляющие решение $x^*(s)$ в окрестности характеристического значения или в окрестности нулевой точки, будут сходиться равномерно.

Подробные формулировки предоставляем читателю.

6.5. В заключение рассмотрим пример, относящийся к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta x + \lambda \left[ax + b \frac{\partial x}{\partial s} + c \frac{\partial x}{\partial t} \right] = 0; \quad x|_S = 0. \quad (12)$$

Здесь S — окружность единичного радиуса с центром в начале координат; коэффициенты a , b , c — непрерывные функции в круге D , ограниченном окружностью S .

Будем считать $x \in W_2^{(2)}(D)$ (X.3.5). По теореме вложения (X.3.4) функция из $W_2^{(2)}(D)$ имеет на S суммируемые значения, поэтому множество тех $x \in W_2^{(2)}$, для которых $x|_S = 0$, образует подпространство пространства $W_2^{(2)}(D)$, которое мы будем обозначать $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$.

Докажем, что оператор Лапласа Δ , если его рассматривать как операцию из $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$ в L_D^2 , имеет линейный обратный. Для этого установим сначала неравенство

$$\|\Delta x\|_{L^2}^2 \geq \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right\|_{L^2}^2 \quad (x \in \overset{\circ}{W}_2^{(2)}). \quad (13)$$

Отметим, что доказывая это неравенство можно учитывать не все $x \in \overset{\circ}{W}_2^{(2)}$, а лишь принадлежащие какому-нибудь плотному в $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$ множеству. В качестве такого множества рассмотрим совокупность всех трижды непрерывно-дифференцируемых функций в D , обращающихся в нуль в некотором кольце, примыкающем к граничной окружности S (ширина кольца для каждой функции своя). Если x — функция указанного вида, то на основании формулы Грина имеем

$$\begin{aligned} \int_D \int \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} ds dt &= - \int_D \int \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^3 x}{\partial t^2 \partial s} ds dt = \\ &= \int_D \int \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \right)^2 ds dt \geq 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\Delta x\|_{L^2}^2 &= \int_D \int \left[\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right]^2 ds dt = \int_D \int \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 ds dt + \\ &+ \int_D \int \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)^2 ds dt + 2 \int_D \int \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} ds dt \geq \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если воспользоваться указанным в X.3.5 выражением для нормы в $W_2^{(2)}$, взяв в качестве определяющего функционал

$$f(x) = \int_S x dS \quad (x \in W_2^{(2)}),$$

то неравенство (13) можно переписать в форме

$$\|\Delta x\|_{L^2} \geq \|x\|_{W_2^{(2)}} \quad (x \in \overset{\circ}{W}_2^{(2)}).$$

Используя замечание из V.2.3, заключаем отсюда, что существует линейная левая обратная операция Δ^{-1} .

С другой стороны, $\Delta(\overset{\circ}{W}_2^{(2)})$ плотно в L_D^2 , так как $\Delta(\overset{\circ}{W}_2^{(2)})$ содержит, например, все полиномы. *)

Так как по теореме 1(1.XII) множество $\Delta(\overset{\circ}{W}_2^{(2)})$ должно быть замкнуто, то

$$\Delta(\overset{\circ}{W}_2^{(2)}) = L_D^2,$$

и, следовательно, существует линейная двусторонняя обратная операция Δ^{-1} , отображающая L_D^2 в $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$.

Применяя к обеим частям уравнения (12) операцию Δ^{-1} , получим эквивалентное уравнение

$$x + \lambda U(x) = 0, \quad (14)$$

где

$$U(x) = \Delta^{-1} \left[ax + b \frac{\partial x}{\partial s} + c \frac{\partial x}{\partial t} \right] \quad (x \in \overset{\circ}{W}_2^{(2)}).$$

По теореме вложения операция, стоящая в скобках, рассматриваемая как операция из $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$ в L^2 , вполне непрерывна. Поэтому U — вполне непрерывная операция в $\overset{\circ}{W}_2^{(2)}$ (IX.2.2).

К уравнению (14), или, что то же, к граничной задаче (12), применимы результаты общей теории.

Отметим, например, такой факт. Существует не более чем счетное изолированное множество значений λ , для которых граничная задача имеет решение, отличное от нулевого. Если λ_0 — одно из таких значений, то при $\lambda = \lambda_0$ число линейно независимых решений задачи (12) конечно.

Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать другие факты общей теории применительно к рассматриваемой задаче.

Отметим в заключение, что неравенство, подобное неравенству (13), имеет место не только для оператора Лапласа, но и для произвольного эллиптического оператора. Точнее говоря, если

$$L(x) = \frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial x}{\partial t} \right) - cx,$$

*) Уравнение

$$\Delta x = p,$$

где p — полином, имеет решение вида $(s^2 + t^2 - 1)\pi(s, t)$, где π также полином, который можно найти по способу неопределенных коэффициентов.

где $x \in \overset{\circ}{W}_2^{(2)}(D)$, коэффициенты a и b непрерывно-дифференцируемые, а коэффициент c — непрерывная функция в круге D , причем $a, b > 0$, $c \geq 0$ в D , то

$$\|L(x)\|_{L_D^2} \geq m \|x\|_{\overset{\circ}{W}_2^{(2)}(D)}, \quad (15)$$

где m — положительная постоянная.

Неравенство (15) известно под названием *неравенства Бернштейна — Ладыженской* (см. [68]).

ГЛАВА XIV

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Для приближенного решения задач математического анализа: дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач математической физики, конформного отображения и других предложено и фактически применяется большое число методов, основанных на различных идеях. Так, для граничных задач применяются вариационные и подобные им методы (Ритца, Галеркина, метод моментов, метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям), разностные методы, интерполяционные методы. Для суждения об эффективности и обоснованности применения этих методов необходимо их теоретическое исследование, при котором в порядке возрастающей точности и трудности встают следующие три вопроса:

- а) установление осуществимости и сходимости алгоритма;
- б) исследование быстроты сходимости;
- в) эффективная оценка погрешности.

Решение этих вопросов проводилось для каждого класса уравнений и каждого из методов своим путем и часто представляло значительную трудность, в ряде случаев непреодоленную до настоящего времени.

Важной является задача объединения этих исследований и построения единой теории приближенных методов. Естественный подход к решению этого вопроса дает использование идей функционального анализа.

В этой главе мы рассмотрим построение теории приближенных методов для некоторого класса линейных уравнений. В этой теории мы будем рассматривать точное и приближенное уравнение в различных, разумеется связанных определенным образом, пространствах, как это фактически имеет место во многих конкретных методах, например при приближенной замене интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений. Впрочем, как будет показано, всегда можно свести дело к тому случаю, когда аппроксимирующее пространство является подпространством того пространства, в котором задано точное уравнение.

В дальнейшем будут доказаны теоремы двоякого рода: теоремы, позволяющие на основании данных о точном уравнении установить разрешимость «приближенного» уравнения и сходимость приближенного

решения к точному, и, наоборот, теоремы, дающие на основании результатов приближенного решения сведения о разрешимости точного уравнения и близости обоих решений.

Результаты этой главы при несколько иных предположениях принадлежат Л. В. Канторовичу (см. Канторович). Некоторые теоремы § 1 уточнены по сравнению с указанным изложением Г. П. Акиловым. Другие построения теории приближенных методов, использующие аппарат функционального анализа, имеются в работах С. Г. Михлина, М. А. Красносельского, Н. И. Польского и др. См. [796], [626], [91].

§ 1. Общая теория для уравнений второго рода

1.1. Пусть X — нормированное пространство, а $\tilde{X}$ — его полное подпространство. *) Предположим, что существует линейная операция P , проектирующая пространство X на $\tilde{X}$, т. е. такая, что

$$P(X) = \tilde{X}; \quad P^2 = P.$$

Ясно, что операция P не меняет элементов из $\tilde{X}$.

Пусть, например, $X = C$, а $\tilde{X}$ — совокупность полиномов, степени не выше $(n-1)$ -ой. Операция P сопоставляет непрерывной функции $x \in C$ ее интерполяционный полином, построенный по заранее заданной системе узлов $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Рассмотрим, далее, два уравнения; первое в пространстве X

$$Kx \equiv x - \lambda Hx = y \quad (1)$$

и второе в пространстве $\tilde{X}$

$$\tilde{K}\tilde{x} \equiv \tilde{x} - \lambda \tilde{H}\tilde{x} = P y. \quad (2)$$

Здесь H есть линейная операция в X , а $\tilde{H}$ — линейная операция в $\tilde{X}$. Уравнение (1) будем называть *точным*, а уравнение (2) — *приближенным* (соответствующим точному уравнению (1)).

Пространства X и $\tilde{X}$ и операции H и $\tilde{H}$ в дальнейшем будем связывать следующими условиями.

I. (Условие близости операций H и $\tilde{H}$). Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$$\|PH\tilde{x} - \tilde{H}\tilde{x}\| \leq \eta \|\tilde{x}\|.$$

Последнее соотношение равносильно такому

$$\|PK\tilde{x} - \tilde{K}\tilde{x}\| \leq |\lambda| \eta \|\tilde{x}\| \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}).$$

II. (Условие хорошей аппроксимации элементов вида Hx элементами из $\tilde{X}$). Для всякого $x \in X$ найдется $\tilde{x} \in \tilde{X}$, так, что

$$\|Hx - \tilde{x}\| \leq \eta_1 \|x\|.$$

*) Само пространство X не предполагается полным.

III. (Условие хорошей аппроксимации свободного члена точного уравнения). Существует элемент $\tilde{y} \in \tilde{X}$ такой, что

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \eta_2 \|y\|.$$

В отличие от предыдущих условий η_2 здесь, вообще говоря, зависит от y .

1.2. Для уравнений, удовлетворяющих перечисленным условиям (или некоторым из них), мы докажем ряд теорем, связывающих точное и приближенное уравнения. Первой из этих теорем, в которой идет речь о разрешимости приближенного уравнения, предположим следующую лемму.

Лемма. Пусть V — линейная операция из B -пространства X в B -пространство Y и пусть для каждого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что

$$\|V(x) - y\| \leq q \|y\|; \quad \|x\| \leq N \|y\|,$$

где $q < 1$ и N — постоянные. Тогда уравнение

$$V(x) = y \tag{3}$$

при любом $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x\| \leq \frac{N}{1-q} \|y\|.$$

Таким образом, из приближенной разрешимости уравнения (3) следует его точная разрешимость.

Доказательство. Точное решение уравнения (3) мы построим своеобразным методом исчерпывания.

Положим $y_1 = y$. По условию найдется такое $x_1 \in X$, что

$$\|V(x_1) - y_1\| \leq q \|y_1\|; \quad \|x_1\| \leq N \|y_1\|.$$

Обозначим

$$y_2 = y_1 - V(x_1).$$

По y_2 , опять используя условие, найдем x_2 так, что

$$\|V(x_2) - y_2\| \leq q \|y_2\| \leq q^2 \|y_1\|; \quad \|x_2\| \leq N \|y_2\| \leq Nq \|y_1\|.$$

Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$ такие, что

$$y_{k+1} = y_k - V(x_k), \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{4}$$

$$\|y_k\| \leq q^{k-1} \|y_1\|, \quad \|x_k\| \leq Nq^{k-1} \|y_1\|.$$

Суммируя равенства (4), получим

$$y_{n+1} = y_1 - V(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Ряд $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$, очевидно, сходится. Обозначая его сумму через x , имеем

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq N \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{N}{1-q} \|y\|.$$

С другой стороны, поскольку $\lim y_n = 0$, переход к пределу в (5) дает

$$0 = y - V(x),$$

т. е. x —решение уравнения (3), удовлетворяющее требуемому условию.

Замечание. Отметим, что теорема Банаха о разрешимости уравнения $x - Hx = y$ ($\|H\| < 1$) (см. V.2.5) есть простое следствие леммы, условия которой в этом случае выполнены для $X = Y$ с $q = \|H\|$ и $N = 1$.

Теорема 1(1. XIV) (о разрешимости приближенного уравнения). Пусть выполнены условия I и II, и операция K имеет линейную обратную (двустороннюю). Тогда, если

$$q = |\lambda| [\eta_1 (1 + |\lambda| \eta_1) + \eta_1 \|PK\| \|K^{-1}\|] < 1, \quad (6)$$

то уравнение

$$\tilde{K} \tilde{x} = \tilde{y} \quad (7)$$

имеет решение $\tilde{x}^*$ при любой правой части $\tilde{y} \in \tilde{X}$. При этом

$$\|\tilde{x}^*\| \leq \frac{N}{1-q} \|\tilde{y}\|, \quad (8)$$

где

$$N = (1 + |\lambda| \eta_1) \|K^{-1}\|. \quad (9)$$

Доказательство. Проверим, что для уравнения (7) выполнены условия леммы с указанными значениями q и N .

Рассмотрим уравнение

$$Kx = \tilde{y}.$$

Пусть его решение есть $x_0 = K^{-1} \tilde{y}$. Положим $x_0 = z + \tilde{y}$. Так как $Kx_0 = \tilde{y}$, то

$$z = \lambda Hx_0.$$

По условию II найдется такой элемент $\tilde{z} \in \tilde{X}$, что

$$\left\| Hx_0 - \frac{\tilde{z}}{\lambda} \right\| \leq \eta_1 \|x_0\|,$$

т. е.

$$\|z - \tilde{z}\| \leq |\lambda| \eta_1 \|x_0\|.$$

Положим $\tilde{x} = \tilde{z} + \tilde{y}$ и покажем, что этот элемент удовлетворяет условиям леммы. Действительно, используя условие I, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}\tilde{x} - \tilde{y}\| &= \|\tilde{K}\tilde{x} - P\tilde{y}\| = \|\tilde{K}\tilde{x} - PKx_0\| \leq \|\tilde{K}\tilde{x} - PK\tilde{x}\| + \\ &+ \|PK\tilde{x} - PKx_0\| \leq |\lambda| \eta \|\tilde{x}\| + \|PK\| \|\tilde{x} - x_0\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Но

$$\|\tilde{x} - x_0\| = \|\tilde{z} - z\| \leq |\lambda| \eta_1 \|x_0\| \leq |\lambda| \eta_1 \|K^{-1}\| \|\tilde{y}\|,$$

а

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}\| &\leq \|x_0\| + \|\tilde{x} - x_0\| \leq (1 + |\lambda| \eta_1) \|x_0\| \leq \\ &\leq (1 + |\lambda| \eta_1) \|K^{-1}\| \|\tilde{y}\| = N \|\tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Подставляя это в (10), получим

$$\|\tilde{K}\tilde{x} - \tilde{y}\| \leq |\lambda| \eta (1 + |\lambda| \eta_1) \|K^{-1}\| \|\tilde{y}\| + |\lambda| \eta_1 \|PK\| \|K^{-1}\| \|\tilde{y}\|.$$

Теорема, таким образом, доказана.

Следствие. Пусть операция $\tilde{H}$ удовлетворяет условию:

(А) Из существования решения уравнения (7) при любом $\tilde{y} \in \tilde{X}$ следует единственность решения;

тогда в условиях теоремы 1 можно утверждать, что операция $\tilde{K}$ имеет линейную обратную, причем

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \frac{N}{1-q}. \quad (11)$$

Отметим, что условие (А) наверное выполнено, если операция $\tilde{H}$ вполне непрерывна [теорема 4 (1. XIII)].

Замечание. Условия теоремы 1 можно несколько ослабить, если условие I заменить условием

I'. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$$\|H\tilde{x} - \tilde{H}\tilde{x}\| \leq \eta' \|\tilde{x}\|.$$

Изменяя очевидным образом оценку (10), можно при этом получить для q значение

$$q = |\lambda| [\eta' (1 + |\lambda| \eta_1) + \|K\| \eta_1 \|K^{-1}\|],$$

не зависящее от P .

Константы η и η' , как нетрудно показать, связаны между собой неравенствами

$$\frac{\eta}{\|P\|} \leq \eta' \leq \eta + \|I - P\| \eta'_1,$$

где η'_1 — постоянная, получающаяся, если в условии II считать $x \in \tilde{X}$.

1.3. Решение приближенного уравнения (2) естественно рассматривать как приближенное решение точного уравнения (1). Оценка погрешности этого приближенного решения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2 (I. XIV) (об оценке погрешности приближенного решения). *Если выполнены условия I, II и III, существует линейная операция $\tilde{K}^{-1}$ (в частности, если выполнены условия теоремы 1 и следствия из нее) и уравнение (1) имеет решение x^* , то справедлива оценка*

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|x^*\|, \quad (12)$$

где $\tilde{x}^*$ — решения уравнения (2), а

$$p = 2|\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + (\eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|)(1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|). \quad (13)$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что условия теоремы позволяют аппроксимировать элемент x^* элементом из $\tilde{X}$ с точностью порядка $\eta_1 + \eta_2$. Точнее говоря, докажем, что существует элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ такой, что

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leq \varepsilon \|x^*\|, \quad (14)$$

где

$$\varepsilon = \min[1, \eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|]. \quad (15)$$

Действительно, беря $\tilde{y} \in \tilde{X}$ и $\tilde{z} \in \tilde{X}$ на основании II и III так, чтобы

$$\|Hx^* - \tilde{z}\| \leq \eta_1 \|x^*\|, \quad \|y - \tilde{y}\| \leq \eta_2 \|y\| \leq \eta_2 \|K\| \|x^*\|,$$

и полагая $\tilde{x} = \lambda \tilde{z} + \tilde{y}$, будем иметь

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \|\lambda Hx^* + y - (\lambda \tilde{z} + \tilde{y})\| \leq (\eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|) \|x^*\|.$$

С другой стороны, (14) выполнено при $\varepsilon = 1$, если положить $\tilde{x} = 0$. Отсюда и следует, что в качестве ε можно взять (15).

Перейдем теперь к доказательству неравенства (12).

Обозначив $\tilde{x}_0 = \tilde{K}^{-1}PK\tilde{x}$, будем иметь

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \|x^* - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| + \|\tilde{x}_0 - \tilde{x}^*\|. \quad (16)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Оценка первого слагаемого уже имеется — (14).

Второе слагаемое оценивается так: на основании условия I

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| &= \|\tilde{K}^{-1}\tilde{K}\tilde{x} - \tilde{K}^{-1}PK\tilde{x}\| \leq \|\tilde{K}^{-1}\| \|\tilde{K}\tilde{x} - PK\tilde{x}\| \leq \\ &\leq |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| \|\tilde{x}\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Но по (14)

$$\|\tilde{x}\| \leq \|x^*\| + \|x^* - \tilde{x}\| \leq (1 + \varepsilon) \|x^*\|.$$

Подставляя это в (17), получим окончательно

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| \leq |\lambda| \eta (1 + \varepsilon) \|\tilde{K}^{-1}\| \|x^*\|. \quad (18)$$

Учитывая, что $\tilde{x}^*$ — решение уравнения (2), и, следовательно,

$$\tilde{x}^* = \tilde{K}^{-1}PKx^*,$$

оценим последнее слагаемое в (16). Имеем в силу (14)

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_0 - \tilde{x}^*\| &= \|\tilde{K}^{-1}PK\tilde{x} - \tilde{K}^{-1}PKx^*\| \leq \|\tilde{K}^{-1}PK\| \|\tilde{x} - x^*\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|\tilde{K}^{-1}PK\| \|x^*\|. \end{aligned}$$

Сопоставляя это с (14) и (18), приходим к оценке

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq [|\lambda| \eta(1 + \varepsilon) \|\tilde{K}^{-1}\| + \varepsilon(1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|)] \|x^*\|. \quad (19)$$

Остается заметить, что $1 + \varepsilon \leq 2$ и $\varepsilon \leq \eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Может оказаться, что возможность аппроксимации элемента x^* элементом из $\tilde{X}$ удастся установить непосредственно, а не на основании II и III. В этом случае по-прежнему можно использовать неравенство (19). При этом, естественно, нет надобности предполагать, что выполнены условия II и III.

Полезно еще отметить, что в этом случае речь идет о приближении конкретного элемента x^* , и ε может зависеть от него, тогда как в условии II η_1 предполагается не зависящим от x .

Замечание 2. На основании теоремы 2 легко получить оценку близости приближенного решения к точному, не использующую данных, относящихся к точному решению. Именно, в условиях теоремы 2, если при этом $p < 1$, справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \frac{p}{1-p} \|\tilde{x}^*\|. \quad (20)$$

Действительно,

$$\|x^*\| \leq \|\tilde{x}^*\| + \|x^* - \tilde{x}^*\|.$$

Учитывая это в неравенстве (12), получаем

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|\tilde{x}^*\| + p \|x^* - \tilde{x}^*\|,$$

а решая последнее неравенство относительно $\|x^* - \tilde{x}^*\|$, приходим к (20).

1.4. Пусть теперь имеется последовательность приближенных уравнений и полученных с их помощью приближенных решений. В этом случае пространство $\tilde{X}$, а также операции $\tilde{H}$ ($\tilde{K}$), P и постоянные η , η_1 , η_2 , q , p , ε , ... зависят от индекса n , который, однако, мы для простоты обозначений опускаем.

В следующей ниже теореме даются условия сходимости последовательности $\{\tilde{x}_n^*\}$ приближенных решений к точному решению.

Теорема 3 (I. XIV). Если выполнены условия:

1) операция K имеет линейную обратную;

2) операция $\tilde{K}$ удовлетворяет условию (A) (при каждом $n = 1, 2, \dots$);

3) при каждом $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия I, II, III, причем

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|P\| &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|P\| &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

то при достаточно больших n приближенные уравнения разрешимы и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = 0.$$

Точнее

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq Q_0 \eta + Q_1 \eta_1 \|P\| + Q_2 \eta_2 \|P\|, \quad (22)$$

где Q_0, Q_1, Q_2 — некоторые постоянные.

Доказательство. Так как $\|P\| \geq 1$, то из (21) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 = 0$, и поэтому для достаточно больших n в теореме 1

будет $q < \frac{1}{2}$. Таким образом, для указанных n уравнения (2) разрешимы, а на основании следствия из теоремы 1 существует линейная операция $\tilde{K}^{-1}$, причем

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq \frac{N}{1-q} < 2N.$$

Отсюда видно, что $\|\tilde{K}^{-1}\|$ ограничена независимо от n . Учитывая это, на основании оценки (12) в теореме 2 придем к (22).

Замечание. Если вместо (12) использовать в доказательстве оценку (19), то получим, что

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq Q' \eta + Q'' \varepsilon \|P\|, \quad (23)$$

и условия сходимости (21) заменяются условиями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \|P\| = 0. \quad (24)$$

При этом условие III оказывается излишним (что касается условия II, оно необходимо, так как используется в теореме 1, при этом предполагается, что при всех $n = 1, 2, \dots$ $q \leq q_0 < 1$).

1.5. Теорема 1 дает возможность на основании разрешимости точного уравнения судить о разрешимости приближенного. Следующая ниже теорема позволяет делать обратное заключение.

Теорема 4 (1. XIV). Если операция $\tilde{K}$ имеет линейную обратную, выполнены условия I и II и

$$r = |\lambda| \eta (1 + |\lambda| \eta_1) \|\tilde{K}^{-1}\| + |\lambda| \eta_1 (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|) < 1, \quad (25)$$

то операция K имеет левую линейную обратную, норма которой оценивается с помощью неравенства:

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|}{1 - r}. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть x^* — произвольный отличный от нулевого элемент пространства X . Он, очевидно, является решением уравнения

$$Kx = Kx^*.$$

По условию II найдем элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ так, что

$$\|Hx^* - \tilde{x}\| \leq \eta_1 \|x^*\|.$$

Так как $x^* = \lambda Hx^* + Kx^*$, то

$$\|x^* - \lambda \tilde{x}\| \leq |\lambda| \eta_1 \|x^*\| + \|Kx^*\| = \left(|\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|} \right) \|x^*\|.$$

Это неравенство позволяет применить теорему 2 (в форме замечания 1 к ней) со значением

$$\varepsilon = |\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|}. \quad (27)$$

Так как приближенное уравнение для рассматриваемого точного есть

$$\tilde{K}\tilde{x} = PKx^*,$$

решение которого $\tilde{x}^* = \tilde{K}^{-1}PKx^*$, то, заменяя в (19) ε его значением (27), получаем

$$\begin{aligned} \|x^* - \tilde{K}^{-1}PKx^*\| &\leq \left[|\lambda| \eta \left(1 + |\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|} \right) \|\tilde{K}^{-1}\| + \right. \\ &\quad \left. + \left(|\lambda| \eta_1 + \frac{\|Kx^*\|}{\|x^*\|} \right) (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|) \right] \|x^*\| = \\ &= [|\lambda| \eta (1 + |\lambda| \eta_1) \|\tilde{K}^{-1}\| + |\lambda| \eta_1 (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|)] \|x^*\| + \\ &\quad + [|\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + 1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|] \|Kx^*\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|x^*\| \leq \|x^* - \tilde{K}^{-1}PKx^*\| + \|\tilde{K}^{-1}P\| \|Kx^*\| \leq r \|x^*\| + [1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|] \|Kx^*\|$$

или

$$\|Kx^*\| \geq \frac{1 - r}{1 + \|\tilde{K}^{-1}P\| + |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| + \|\tilde{K}^{-1}PK\|} \|x^*\| = Q \|x^*\|.$$

Поскольку $r < 1$, то $Q > 0$, и на основании сказанного в V. 2. 4 теорема доказана.

Следствие. Если операция K удовлетворяет условию:

(А) Из единственности решения уравнения (1) следует его разрешимость при любой правой части;
то в условиях теоремы существует двусторонняя линейная обратная операция K^{-1} .

1.6. Если условие III выполнено лишь с большой константой η_2 , т. е. если правая часть уравнения (1) не допускает хорошей аппроксимации элементами из $\tilde{X}$, то оценка (12) погрешности приближенного решения теряет эффективный характер. В этом случае оказывается целесообразной «регуляризация» свободного члена. В уравнении (1) сделаем замену неизвестной $x = y + z$. Новое уравнение (относительно z) будет

$$Kz = y' \quad (y' = \lambda Hy). \quad (28)$$

Правая часть этого уравнения уже «регулярна» в силу условия II. Приближенным по отношению к уравнению (28) будет уравнение

$$\tilde{K}\tilde{z} = \lambda PHy. \quad (29)$$

Обозначая через $\tilde{z}^*$ решение этого уравнения, естественно в качестве приближенного решения уравнения (1) рассмотреть элемент

$$x' = y + \tilde{z}^*. \quad (30)$$

Так как

$$\|x^* - x'\| = \|z^* - \tilde{z}^*\|,$$

где z^* означает решение уравнения (28), то оценка погрешности приближенного решения (30) может быть найдена на основании теоремы 2 — в качестве η_2 следует при этом взять $|\lambda| \eta_1$.*) Однако непосредственное рассмотрение данного случая позволяет получить более точную оценку.

Теорема 5 (I. XIV). Если выполнены условия I и II и существуют линейная обратная операция $\tilde{K}^{-1}$ и решение x^* уравнения (1), то справедлива оценка

$$\|x^* - x'\| \leq p' \|x^*\|, \quad (31)$$

где

$$p' = |\lambda| [\eta_1 (1 + \|\tilde{K}^{-1}PK\|) + |\lambda| \eta_1 \|\tilde{K}^{-1}\| (\|H\| + \eta_1)], \quad (32)$$

Доказательство. Поскольку

$$z^* = \lambda H z^* + \lambda Hy = \lambda H x^*, \quad (33)$$

по условию II можно найти такой элемент $\tilde{z} \in \tilde{X}$, что

$$\|z^* - \tilde{z}\| \leq |\lambda| \eta_1 \|x^*\|. \quad (34)$$

Обозначим

$$\tilde{z}_0 = \tilde{K}^{-1}PK\tilde{z}.$$

*) Или даже меньшую величину $|\lambda| \eta_1^*$, лишь бы для некоторого $\tilde{y} \in \tilde{X}$ было

$$\|Hy - \tilde{y}\| \leq \eta_1^* \|y\|.$$

Таким образом, если выполнено второе из условий (21), то выполнения третьего всегда можно добиться.

Тогда, так как

$$\tilde{K}\tilde{z}^* = PK\tilde{z}^*,$$

то

$$\tilde{z}^* = \tilde{K}^{-1}PK\tilde{z}^*,$$

откуда

$$\|\tilde{z}^* - \tilde{z}_0\| \leq \|\tilde{K}^{-1}PK\| \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\| \leq |\lambda| \eta_1 \|\tilde{K}^{-1}PK\| \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\|. \quad (35)$$

Далее, в силу условия 1, (34) и (33)

$$\begin{aligned} \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\| &\leq \|\tilde{K}^{-1}\| \|\tilde{K}\tilde{z} - PK\tilde{z}\| \leq |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| \|\tilde{z}\| \leq \\ &\leq |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| [\|\tilde{z}^*\| + \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\|] \leq |\lambda| \eta \|\tilde{K}^{-1}\| (|\lambda| \|H\| + |\lambda| \eta_1) \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\|. \end{aligned}$$

Но вследствие (34) и (35) получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}^* - \tilde{z}'\| &\leq \|\tilde{z}^* - \tilde{z}\| + \|\tilde{z} - \tilde{z}_0\| + \|\tilde{z}_0 - \tilde{z}'\| \leq \\ &\leq [|\lambda| \eta_1 + |\lambda|^2 \eta \|\tilde{K}^{-1}\| (\|H\| + \eta_1) + |\lambda| \eta_1 \|\tilde{K}^{-1}PK\|] \|\tilde{z}^*\| = p' \|\tilde{z}^*\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом в данном случае может быть уточнен результат теоремы 4.

1.7. Рассмотрим вопрос о сходимости характеристических значений операции $\tilde{H}$ к характеристическим значениям операции H , ограничиваясь при этом случаем, когда обе эти операции вполне непрерывны, и, следовательно, когда характеристическое множество дискретно.

Прежде всего в предположениях теоремы 3 можно утверждать, что характеристические значения операции $\tilde{H}$ могут сходиться лишь к характеристическим значениям операции H . Действительно, возьмем в плоскости λ круг C_0 радиуса R с центром в начале координат и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — те характеристические значения операции H , которые попадают в него. Обозначим через D замкнутую область, получающуюся из C_0 удалением δ -окрестностей точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. В этой области операция K_λ^{-1} ($K_\lambda = I - \lambda H$) существует, и $\|K_\lambda^{-1}\|$ ограничена как функция от λ . В таком случае, по теореме 3 при достаточно больших n и $\|\tilde{K}_\lambda^{-1}\|$ ($\tilde{K}_\lambda = \tilde{I} - \lambda \tilde{H}$) ограничена независимо от n . Следовательно, при указанных условиях характеристические значения операции $\tilde{H}$ могут находиться лишь в выделенных δ -окрестностях или вне C_0 , откуда ясно, что, если при $n \rightarrow \infty$ они имеют конечный предел, то он совпадает с одним из характеристических значений операции H .

В то же время каждое из характеристических значений операции H является пределом характеристических значений операции $\tilde{H}$. Действительно, если бы некоторое λ_k не было таким пределом, то в какой-то окрестности точки λ_k , ограниченной окружностью C_k , не было бы характеристических значений операции $\tilde{H}$ (при достаточно больших n). На окружности C_k функция $\|K_\lambda^{-1}\|$ ограничена, тогда в силу (11) на ней и $\|\tilde{K}_\lambda^{-1}\|$ ограничена. В таком случае и внутри нее $\|\tilde{K}_\lambda^{-1}\|$ была бы ограничена тем же числом. Последнее устанавливается применением принципа максимума модуля к аналитической функции $\psi(\lambda) = f(\tilde{K}_\lambda^{-1}\tilde{x})$ (f — произвольный функционал в пространстве $\tilde{X}$, а $\tilde{x}$ — произвольный элемент этого пространства). Применяя теорему 4, мы получили бы, что K_λ^{-1} существует во всей окрестности, что приводит к противоречию.

Вопрос о сходимости собственных значений и элементов для конкретных приближенных методов подробно изучен в [91] (см. также Михлин). В общем виде, в плане общей теории приближенных методов, вопрос рассматривался в [106] (частный случай в [456]). Некоторые обобщения указаны в [77].

1.8. Отметим важный случай, когда можно упростить формулировки доказанных ранее теорем.

Часто приближенное уравнение (2) строится специальным образом. Именно, в качестве операции $\tilde{H}$ рассматривается операция PH ; *) таким образом, в данном случае приближенное уравнение выглядит так:

$$\tilde{x} - \lambda PH\tilde{x} = Py \quad (\tilde{K} = PK). \quad (36)$$

Условие I при таком выборе, очевидно, выполняется с $\eta = 0$. Это вносит упрощения в формулировки теорем. Так, в теореме 1 следует принять

$$q = |\lambda| \eta_1 \|PK\| \|K^{-1}\|; \quad N = (1 + |\lambda| \eta_1) \|K^{-1}\|. \quad (37)$$

В теореме 2

$$p = (\eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|) (1 + \|\tilde{K}^{-1} PK\|). \quad (38)$$

Условия (21) теоремы 3 заменяются условиями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|P\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|P\| = 0. \quad (39)$$

В теореме 4

$$r = |\lambda| \eta_1 (1 + \|\tilde{K}^{-1} PK\|); \quad \|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}^{-1} P\| + \|\tilde{K}^{-1} PK\|}{1 - r}. \quad (40)$$

Укажем условия, при которых в данном случае можно гарантировать выполнение соотношений (39) и, следовательно, сходимость последовательности приближенных решений к точному. Пусть имеется последовательность операций P_n , проектирующих X на подпространства $\tilde{X}_n$. Каждой P_n соответствует свое приближенное уравнение (36).

Теорема 6 (1. XIV). Если выполнены условия:

- 1) X — полное пространство;
- 2) $P_n \rightarrow I$ на X , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$ ($x \in X$);

3) операция H вполне непрерывна;

то постоянные $\eta_1^{(n)}$ и $\eta_2^{(n)}$, фигурирующие в условиях II и III, можно выбрать так, что $\eta_1^{(n)} \rightarrow 0$ и $\eta_2^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

*) Операцию H здесь следует считать операцией из $\tilde{X}$ в X .

Доказательство. Пусть E —единичная сфера пространства X . Множество $H(E)$ компактно и потому по теореме Гельфанда (IX. 1.4) на этом множестве $P_n \rightarrow I$ равномерно. Обозначая

$$\eta_1^{(n)} = \sup_{z \in H(E)} \|P_n z - z\| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

будем иметь

$$\eta_1^{(n)} \rightarrow 0.$$

С другой стороны, для любого $x \in X$

$$\|P_n Hx - Hx\| \leq \eta_1^{(n)} \|x\|.$$

Поскольку $P_n Hx \in \tilde{X}_n$, то из этого неравенства следует, что $\eta_1^{(n)}$ удовлетворяет условию II.

В качестве $\eta_2^{(n)}$ можно взять величину

$$\eta_2^{(n)} = \frac{\|P_n y - y\|}{\|y\|},$$

которая, очевидно, стремится к нулю.

Следствие 1. В условиях теоремы, если λ не является характеристическим значением операции H , то выполнены условия теоремы 3, и, следовательно, имеет место сходимость последовательности $\{\tilde{x}_n^*\}$ приближенных решений к точному.

Действительно, (39) выполнено, так как согласно условию 2) теоремы $\sup_n \|P_n\| < \infty$ (VII.1.2.). Операция $\tilde{H}_n = P_n H$, очевидно, вполне непрерывна, и поэтому она удовлетворяет условию (A).

Следствие 2. Характеристические значения операции H суть пределы последовательностей характеристических значений операций $\tilde{H}_n$.

Рассмотрим более подробно случай, когда $\tilde{X}$ —конечномерное (размерности n) пространство. Каждый $\tilde{x} \in \tilde{X}$ единственным образом представим в форме

$$\tilde{x} = c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \dots + c_n \omega_n, \quad (41)$$

где элементы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ образуют базис в $\tilde{X}$.

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ —полная в $\tilde{X}$ система линейных функционалов в $\tilde{X}$, т. е. такая, что из равенств

$$f_j(\tilde{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

следует $\tilde{x} = 0$.

Приближенное уравнение (36) равносильно системе равенств

$$f_j(PK\tilde{x}) = f_j(Py) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Разыскивая решение уравнения (36) в форме (41), получим для коэффициентов c_k систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} c_k - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (42)$$

где

$$a_{jk} = f_j(\omega_k), \quad a_{jk} = f_j(PH\omega_k), \quad b_j = f_j(Py) \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

Если система функционалов $f_1, f_2, \dots, f_n$ биортогональна базису $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то система (42) упрощается, приобретая вид

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} c_k = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (43)$$

В частности, если X — гильбертово пространство, а P — проектор, т. е. операция ортогонального проектирования, то, предполагая систему $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ортонормальной, получим

$$a_{jk} = f_j(PH\omega_k) = (PH\omega_k, \omega_j) = (H\omega_k, P\omega_j) = (H\omega_k, \omega_j) \quad (j, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$b_j = f_j(Py) = (Py, \omega_j) = (y, P\omega_j) = (y, \omega_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

и система (42) запишется в такой форме

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^n c_k (H\omega_k, \omega_j) = (y, \omega_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (44)$$

Систему (42) будем называть системой *метода Галеркина* в абстрактной форме.*)

Отметим другой частный случай общей теории, когда возможны еще большие упрощения.

Если пространство X совпадает с $\tilde{X}$, то условия II и III выполнены очевидным образом с $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Условие I превращается при этом в условие близости операций H и $\tilde{H}$ (которые действуют в этом случае в одном и том же пространстве)

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \eta.$$

Следует заметить, однако, что этот случай не представляет значительного интереса с точки зрения общей теории, так как все теоремы для него могут быть доказаны элементарными средствами (ср. V.2.6).

1.9. Нередки случаи, когда приближенное уравнение того или иного метода рассматривается не в подпространстве пространства X , а в другом пространстве $\tilde{X}$, которое, как обычно в таких случаях, изоморфно некоторому подпространству основного пространства X .

*) Для нелинейных уравнений метод Галеркина изучен в [626],

Будем считать, что в полном подпространстве $\tilde{X} \subset X$ определена линейная операция φ_0 , отображающая $\tilde{X}$ взаимно однозначно на полное пространство $\tilde{X}$. Эти условия обеспечивают линейность обратной операции φ_0^{-1} . Будем предполагать, что существует линейная операция φ — распространение операции φ_0 на все X , таким образом, φ означает линейную операцию, отображающую X на $\tilde{X}$ и совпадающую с φ_0 на $\tilde{X}$.

Если под P подразумевать операцию проектирования X на $\tilde{X}$, введенную в 1.1, то в качестве φ можно взять

$$\varphi = \varphi_0 P. \quad (45)$$

Умножая обе части этого равенства на φ_0^{-1} , получим

$$P = \varphi_0^{-1} \varphi. \quad (46)$$

Ввиду наличия взаимно однозначного соответствия между элементами пространств $\tilde{X}$ и $\bar{X}$, приближенное уравнение (2) можно преобразовать в эквивалентное уравнение, но уже в пространстве $\bar{X}$. Для этого в уравнении (2) заменим $\tilde{x} = \varphi_0^{-1} x$, после чего применим к обеим частям уравнения операцию φ_0 . Преобразованное таким образом уравнение примет вид

$$\bar{x} - \varphi_0 \tilde{H} \varphi_0^{-1} \bar{x} = \varphi_0 P y.$$

Обозначая через $\bar{H}$ операцию, отображающую пространство $\bar{X}$ в себя,

$$\bar{H} = \varphi_0 \tilde{H} \varphi_0^{-1}, \quad (47)$$

и принимая во внимание (45) перепишем приближенное уравнение в такой форме

$$\bar{K} x \equiv \bar{x} - \lambda \bar{H} x = \varphi y \quad (\bar{K} = \varphi_0 \tilde{K} \varphi_0^{-1}). \quad (48)$$

Поскольку в приложениях часто встречаются случаи, когда приближенное уравнение дано в форме (48), мы укажем формулировки основных теорем общей теории в терминах операций $\bar{H}$, φ (и $\bar{K}$). Для этого надо всюду заменить P его выражением (46), а для операции $\tilde{H}$ ($\tilde{K}$) из (47) находим

$$\tilde{H} = \varphi_0^{-1} \bar{H} \varphi_0 \quad (\tilde{K} = \varphi_0^{-1} \bar{K} \varphi_0). \quad (49)$$

Остановимся на условии I. В новых терминах оно выглядит так:

$$\|\varphi_0^{-1} \bar{H} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi_0^{-1} \varphi \bar{H} \tilde{x}\| \leq \eta \|\tilde{x}\| \quad (\tilde{x} \in \tilde{X}).$$

Это неравенство будет выполнено, если соблюдено условие

1а. Для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место неравенство

$$\|\bar{H} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi \bar{H} \tilde{x}\| \leq \bar{\eta} \|\tilde{x}\|.$$

При этом в качестве η в условии I следует взять величину

$$\eta = \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\|. \quad (50)$$

Условия II и III не затрагивают операций $\tilde{H}$ и P , поэтому в новой ситуации они не изменятся.

Дадим теперь новую формулировку теоремы 1.

Теорема 1а (I. XIV). Пусть выполнены условия Ia, II, и операция K имеет линейную обратную. Тогда, если

$$\bar{q} = |\lambda| [\bar{\eta} (1 + |\lambda| \eta_1) \|\varphi_0^{-1}\| + \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \varphi K\|] \|K^{-1}\| < 1,$$

то уравнение

$$\overleftarrow{K} \overleftarrow{x} = \overleftarrow{y} \quad (51)$$

имеет решение $\overleftarrow{x}^*$ при любой правой части $\overleftarrow{y} \in \overleftarrow{X}$, причем

$$\|\overleftarrow{x}^*\| \leq \frac{\bar{N}}{1 - \bar{q}} \|\overleftarrow{y}\|, \quad (52)$$

где

$$\bar{N} = (1 + |\lambda| \eta_1) \|\varphi_0\| \|\varphi_0^{-1}\| \|K^{-1}\|. \quad (53)$$

Действительно, уравнение (51) равносильно уравнению

$$\tilde{K} \tilde{x} = \varphi_0^{-1} \overleftarrow{y} \quad (\tilde{x} = \varphi_0^{-1} \overleftarrow{x}),$$

для решения которого $\tilde{x}^*$ справедливо (8). Поскольку $\overleftarrow{x}^* = \varphi_0 \tilde{x}^*$, мы и приходим к (52).

Следствие к теореме 1 остается, очевидно, справедливым (при соответствующей замене q на $\bar{q}$, N на $\bar{N}$ и $\tilde{K}^{-1}$ на $\overleftarrow{K}^{-1}$).

Если обозначить через $\tilde{x}^*$ решение уравнения (48), то приближенное решение $\overleftarrow{x}^*$ уравнения (1) будет $\overleftarrow{x}^* = \varphi_0^{-1} \tilde{x}^*$. Оценка погрешности приближенного решения может быть получена с помощью теоремы 2, если в ее формулировке сделать необходимые замены.

Теорема 2а (I. XIV). Если выполнены условия Ia, II и III, существует линейная операция $\overleftarrow{K}^{-1}$ и уравнение (1) имеет решение x^* , то справедлива оценка

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} \overleftarrow{x}^*\| \leq \bar{p} \|x^*\|, \quad (54)$$

где

$$\bar{p} = (1 + \varepsilon) |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1} \overleftarrow{K}^{-1}\| + \varepsilon (1 + \|\varphi_0^{-1} \overleftarrow{K}^{-1} \varphi K\|), \quad (55)$$

а

$$\varepsilon \leq \eta_1 |\lambda| + \eta_2 \|K\|.$$

В качестве $\bar{p}$ можно также взять

$$\bar{p} = 2 |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| \|\varphi_0^{-1} \overleftarrow{K}^{-1} \varphi_0\| + \varepsilon (1 + \|\varphi_0^{-1} \overleftarrow{K}^{-1} \varphi K\|). \quad (56)$$

Возможность для $\bar{p}$ значения (56) сразу же следует из (13). Равенство (55) требует небольшого дополнительного обоснования. Сохраняя обозначения доказательства теоремы 2, имеем согласно условию Ia

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{x}_0\| &= \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \bar{K} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0 \varphi_0^{-1} \varphi K \tilde{x}\| \leq \\ &\leq \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| \|\bar{K} \varphi_0 \tilde{x} - \varphi K \tilde{x}\| \leq |\lambda| |\bar{\eta}| \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Используя эту оценку вместо (17), мы и приходим к (55).

Отметим, что факты, о которых шла речь в замечаниях к теореме 2, остаются справедливыми при соответствующих изменениях в формулировках.

Сформулируем, наконец, теорему о сходимости последовательности приближенных решений.

Теорема 3а (1. XIV). Если выполнены условия:

- 1) операция K имеет линейную обратную;
- 2) операции $\bar{K}$ удовлетворяют условию (A);
- 3) при каждом $n=1, 2, \dots$ выполнены условия Ia, II, III, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_2 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| = 0, \quad (57)$$

то при достаточно больших n приближенное уравнение (48) разрешимо и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному решению. При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq \bar{Q} \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| + \bar{Q}_1 \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \varphi\| + \bar{Q}_2 \eta_2 \|\varphi_0^{-1} \varphi\|, \quad (58)$$

где $\tilde{x}_n^* = \varphi_0^{-1} \bar{x}_n^*$, а $\bar{Q}$, $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ постоянные.

В самом деле, если $\bar{K}$ удовлетворяет условию (A), то этому условию удовлетворяет также и $\tilde{K} = \varphi_0^{-1} \bar{K} \varphi_0$. Принимая во внимание (50) и (46), заключаем, что выполнены все условия теоремы 3, откуда и следует сформулированный результат.

Не приводя полной формулировки теоремы 4, укажем, что условие (25) в новых терминах примет вид

$$\bar{r} = |\lambda| [(1 + |\lambda| |\eta_1|) \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| + \eta_1 \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|] < 1, \quad (59)$$

а (26) перепишется так:

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi\| + |\lambda| |\bar{\eta}| \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1}\| + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|}{1 - \bar{r}}. \quad (60)$$

Для доказательства надо провести те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 4, воспользовавшись оценкой (54) теоремы 2а с $\bar{p}$ из (55).

Непосредственная замена в (25) и (26) дает для $\bar{r}$ значение
$$\bar{r} = |\lambda| [(1 + |\lambda| \eta_1) \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0\| + \eta_1 (1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|)], \quad (61)$$
 а вместо (60) приводит к оценке

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi\| + |\lambda| \bar{\eta} \|\varphi_0^{-1}\| \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi_0\| + \|\varphi_0^{-1} \bar{K}^{-1} \varphi K\|}{1 - \bar{r}}, \quad (62)$$

где $\bar{r}$ из (61).

§ 2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода

2.1. Рассмотрим уравнения, в которых, хотя в левой части и не выделена тождественная операция, и, более того, левая часть представляет линейную операцию, переводящую данное пространство не в себя, а в другое нормированное пространство, но которые благодаря наличию в этой операции главной части простого вида, могут быть приведены к уравнениям второго рода, рассмотренным в § 1.

Итак, предположим, что у нас имеются два нормированных пространства X и Y и в каждом из них выделено полное подпространство $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{Y} \subset Y$. Будем предполагать, что имеется линейная операция Φ , проектирующая Y на $\tilde{Y}$.

Рассматривается два уравнения — точное —

$$K_1 x \equiv Gx - \lambda T x = y_1 \quad (1)$$

и соответствующее ему приближенное

$$\tilde{K}_1 \tilde{x} \equiv G\tilde{x} - \lambda \tilde{T} \tilde{x} = \Phi y_1. \quad (2)$$

Здесь операции G и T (и K_1) — линейные операции, отображающие X в Y , а операция $\tilde{T}$ (и $\tilde{K}_1$) — линейная операция из $\tilde{X}$ в $\tilde{Y}$. Кроме того, относительно указанных операций будем еще предполагать:

1) операция G имеет линейную обратную;

2) операция G устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, то есть $G(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ и, следовательно, $G^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$.

Введем условия, подобные условиям I—III § 1.

Иб. Для всякого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место неравенство

$$\|\Phi T \tilde{x} - \tilde{T} \tilde{x}\| \leq \mu \|\tilde{x}\|.$$

Иб. Для каждого $x \in X$ найдется такое $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \mu_1 \|x\|.$$

IIIб. Существует элемент $\tilde{y}_1 \in \tilde{Y}$ такой, что

$$\|y_1 - \tilde{y}_1\| \leq \mu_2 \|y_1\|.$$

Покажем, что при сделанных предположениях изучение уравнений (1) и (2) сводится к исследованию уравнений второго рода. Действительно, применим к обеим частям уравнений (1) и (2) операцию G^{-1} . Это даст

$$Kx \equiv G^{-1}K_1x \equiv x - \lambda G^{-1}Tx = G^{-1}y_1. \quad (3)$$

$$\tilde{K}\tilde{x} \equiv G^{-1}\tilde{K}_1\tilde{x} \equiv \tilde{x} - \lambda G^{-1}\tilde{T}\tilde{x} = G^{-1}\Phi y_1. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) имеют вид уравнений (1) и (2) § 1, при этом роль операций $H, \tilde{H}, P$ ($K, \tilde{K}$) играют операции $G^{-1}T, G^{-1}\tilde{T}, G^{-1}\Phi G$ ($G^{-1}K_1, G_1\tilde{K}_1$), а роль y — элемент $G^{-1}y_1$.

Проверим выполнение условий I, II, III.

I. В силу Iб имеем

$$\|PH\tilde{x} - \tilde{H}\tilde{x}\| = \|G^{-1}\Phi GG^{-1}\tilde{T}\tilde{x} - G^{-1}\tilde{T}\tilde{x}\| \leq \|G^{-1}\|_{\mu} \|\tilde{x}\|.$$

II. По $x \in X$ в соответствии с IIб найдем $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Тогда, полагая $\tilde{x} = G^{-1}\tilde{y}$, имеем

$$\|Hx - \tilde{x}\| = \|G^{-1}Tx - G^{-1}\tilde{y}\| \leq \|G^{-1}\|_{\mu_1} \|x\|.$$

III. Пусть $\tilde{y}_1$ определено согласно IIIб. Обозначим $\tilde{y} = G^{-1}\tilde{y}_1$. При этом

$$\|y - \tilde{y}\| = \|G^{-1}y_1 - G^{-1}\tilde{y}_1\| \leq \|G^{-1}\|_{\mu_2} \|y_1\| \leq \|G^{-1}\| \|G\|_{\mu_2} \|y\|.$$

Таким образом, условия I, II, III из § 1 выполнены, причем постоянные η, η_1, η_2 выражаются через μ, μ_1, μ_2 следующим образом:

$$\eta = \mu \|G^{-1}\|, \quad \eta_1 = \mu_1 \|G^{-1}\|, \quad \eta_2 = \mu_2 \|G^{-1}\| \|G\|. \quad (5)$$

Замечание. Вместо IIб и IIIб можно было бы потребовать наличия таких $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и $\tilde{y} \in \tilde{X}$, что выполнены неравенства

$$\|G^{-1}Tx - \tilde{x}\| \leq \mu'_1 \|x\|, \quad \|G^{-1}y_1 - \tilde{y}\| \leq \mu'_2 \|G^{-1}y_1\|. \quad (6)$$

Тогда условия II и III выполняются с $\eta_1 = \mu'_1$ и $\eta_2 = \mu'_2$.

Поскольку для уравнений (3) и (4) выполнены условия I, II и III, мы можем из теорем предыдущего параграфа получить соответствующие им теоремы для уравнений (3) и (4) или для равносильных им уравнений (1) и (2). Развернутые формулировки соответствующих теорем мы приведем, сделав, однако, еще одно дальнейшее упрощающее предположение.

Именно, предположим, что нормы в пространствах X и Y согласованы в соответствии с отображением G .

$$\|x\|_X = \|Gx\|_Y; \quad \|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_X \quad (x \in X, y \in Y). \quad (7)$$

При этом условии отображение G , очевидно, изометричное; $\|G\| = \|G^{-1}\| = 1$. Благодаря этому

$$\begin{aligned}\|P\| &= \|\Phi\|, \quad \|K\| = \|K_1\|, \quad \|\tilde{K}\| = \|\tilde{K}_1\|, \quad \|H\| = \|T\|, \\ \|\tilde{H}\| &= \|\tilde{T}\|.\end{aligned}\quad (8)$$

2.2. Сформулируем теперь основные теоремы § 1 для уравнений (1) и (2).

Теорема 1б (2. XIV). Если выполнены условия Iб и IIб, существует линейная операция K_1^{-1} и

$$q = |\lambda|[(1 + |\lambda|\mu_1)\mu + \mu_1\|\Phi K_1\|]\|K_1^{-1}\| < 1, \quad (9)$$

то уравнение

$$\tilde{K}_1 \tilde{x} = \tilde{y} \quad (10)$$

имеет решение $\tilde{x}$ при любой правой части $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ и при этом

$$\|\tilde{x}\| \leq \frac{N}{1-q} \|\tilde{y}\|, \quad (11)$$

где

$$N = (1 + |\lambda|\mu_1)\|K_1^{-1}\|. \quad (12)$$

Следствие. Если для операции $\tilde{K}_1$ выполнено условие (А), в частности если $G^{-1}\tilde{T}$ — вполне непрерывная операция, то существует линейная операция $\tilde{K}_1^{-1}$ и

$$\|\tilde{K}_1^{-1}\| \leq \frac{N}{1-q}. \quad (13)$$

Теорема 2б (2. XIV). Если соблюдены условия Iб, IIб, IIIб, существует линейная операция $\tilde{K}_1^{-1}$ (в частности, если выполнены условия теоремы 1б и следствия к ней) и существует решение x^* уравнения (1), то имеет место оценка

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq p \|x^*\|, \quad (14)$$

где $\tilde{x}^*$ — решение уравнения (2), а

$$p = 2|\lambda|\mu\|\tilde{K}_1^{-1}\| + (\mu_1|\lambda| + \mu_2\|K_1\|)(1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|). \quad (15)$$

Замечание. Если имеется такой $\tilde{x} \in \tilde{X}$, что

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leq \varepsilon \|x^*\|, \quad (16)$$

то оценка (14) верна и без условий IIб и IIIб, причем под p следует понимать в этом случае величину

$$p = 2|\lambda|\mu\|\tilde{K}_1^{-1}\| + \varepsilon(1 + \|\tilde{K}_1^{-1}\Phi K_1\|). \quad (17)$$

Теорема 3б (2. XIV). Если при каждом $n=1, 2, \dots$ выполнены условия Iб, IIб, IIIб, операция $\tilde{K}_1$ удовлетворяет условию (A), операция K_1 имеет линейную обратную и имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 \|\Phi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \|\Phi\| = 0, \quad (18)$$

то последовательность приближенных решений (т. е. решений уравнения (2)) сходится к решению уравнения (1) x^* . При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leq Q\mu + Q_1\mu_1 \|\Phi\| + Q_2\mu_2 \|\Phi\|. \quad (19)$$

Теорема 4б (2. XIV). Если существует линейная операция $\tilde{K}_1^{-1}$, выполнены условия Iб и IIб и

$$r = |\lambda| \mu (1 + |\lambda| \mu_1) \|\tilde{K}_1^{-1}\| + |\lambda| \mu_1 (1 + \|\tilde{K}_1^{-1} \Phi K_1\|) < 1, \quad (20)$$

то операция K_1 имеет линейную левую обратную, при этом

$$\|K_1^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\tilde{K}_1^{-1} \Phi\| + |\lambda| \mu \|\tilde{K}_1^{-1}\| + \|\tilde{K}_1^{-1} \Phi K_1\|}{1 - r}. \quad (21)$$

2.3. Отметим, наконец, частный случай, когда формулировки теорем упрощаются. Именно, пусть приближенное уравнение (2) построено специальным образом — проектированием точного уравнения. Иначе говоря, приближенное уравнение получается, если к обеим частям уравнения (1) применить операцию Φ :

$$\tilde{K}_1 \tilde{x} \equiv \Phi K_1 \tilde{x} \equiv G \tilde{x} - \lambda \Phi T \tilde{x} = \Phi y_1, \quad (22)$$

т. е. в этом случае $\tilde{T} = \Phi T$.

Легко видеть, что при этом условии Iб выполнено при $\mu = 0$. Действительно,

$$\|\tilde{T} \tilde{x} - \Phi T \tilde{x}\| = \|\Phi T \tilde{x} - \Phi T \tilde{x}\| = 0.$$

Таким образом, всюду в формулировках теорем можно принять $\mu = 0$.

Добавим еще теорему, получающуюся из теоремы 6 (1. XIV) и относящуюся специально к уравнениям рассматриваемого типа.

Теорема 6б (2. XIV). Если имеется последовательность приближенных уравнений вида (22) и соответственно отображений Φ_n , причем

- 1) пространство Y — полное;
- 2) $\Phi_n \rightarrow I$ на Y ;
- 3) операция $G^{-1}T$ вполне непрерывна;

и если существует K_1^{-1} , то приближенные уравнения для достаточно больших n разрешимы и имеют место сходимость приближенных решений к точному.

§ 3. Применение к бесконечным системам уравнений *)

3.1. Пусть дана бесконечная система уравнений

$$\xi_j - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k = b_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

в предположении, что

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2 < \infty. \quad (2)$$

Требуется разыскать решение этой системы, удовлетворяющее условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty. \quad (3)$$

Одним из распространенных методов решения системы (1) является так называемый *метод редукции*, который состоит в замене бесконечной системы (1) системой из n уравнений с n неизвестными

$$\xi_j - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Решение этой системы рассматривается как приближенное решение исходной системы (1).

Нас будет интересовать вопрос об оценке погрешности приближенного решения и о сходимости при $n \rightarrow \infty$ приближенных решений к точному.

Для применения общей теории примем $\mathbf{X} = \mathbb{I}^2$. Система (1) при этом запишется в виде одного уравнения в $\mathbf{X}$:

$$Kx \equiv x - \lambda Hx = y \quad (x = \{\xi_n\}, \quad y = \{b_n\}). \quad (5)$$

Здесь под H понимается линейная (и вполне непрерывная — см. X. 1.2) операция в $\mathbb{I}^2$, определяемая матрицей системы:

$$z = Hx, \quad \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots; \quad x = \{\xi_n\}, \quad z = \{\zeta_n\}).$$

В качестве пространства $\bar{\mathbf{X}}$ возьмем конечномерное евклидово пространство $\mathbb{I}_n^2$. За $\tilde{\mathbf{X}}$ естественно при этом взять совокупность элементов из $\mathbb{I}^2$, все координаты которых, начиная с $(n+1)$ -й, равны нулю. Смысл операций φ_0 и φ_0^{-1} ясен без пояснений, операция φ сопоставляет элементу $x = \{\xi_m\} \in \mathbb{I}^2$ элемент

$$\bar{x} = \varphi x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{I}_n^2.$$

Очевидно,

$$\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = \|\varphi_0^{-1}\| = 1.$$

*) По поводу бесконечных систем см. Рисс-И, Хеллинггер и Тёплиц, а также Канторович и Крылов.

Систему (4) можно записать теперь в виде одного уравнения в пространстве $\bar{X}$. Именно

$$\bar{K}\bar{x} \equiv \bar{x} - \lambda \bar{H}\bar{x} = \varphi y, \quad (6)$$

где операция $\bar{H}$ определяется «усеченной» матрицей

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условий Ia, II, III. Имеем для произвольного $\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) \in \tilde{X}$

$$\bar{z} = \varphi H \tilde{x} - \bar{H} \varphi_0 \tilde{x} \quad (\bar{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)),$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k - \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, условие Ia выполнено с $\bar{\eta} = 0$.

Для проверки условия II возьмем произвольное $x = \{\xi_m\} \in l^2$ и положим $\tilde{x} = [Hx]_n = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, 0, \dots)$. *) Тогда

$$\begin{aligned} \|Hx - \tilde{x}\| &= \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk} \xi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \eta_1 \|x\|, \end{aligned}$$

где

$$\eta_1 = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ясно по (2), что $\eta_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Наконец, полагая $\tilde{y} = [y]_n$, имеем

$$\|y - \tilde{y}\| = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \|y\|,$$

*) Знаком $[x]_n$ мы обозначаем «усеченный» элемент, т. е. элемент, получающийся из $x \in l^2$ заменой всех его координат, начиная с $(n+1)$ -й, нулями. Очевидно, $[x]_n = \varphi_0^{-1} \varphi x = Px$.

так что в условии III можно принять

$$\eta_2 = \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

и здесь $\eta_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

К данному случаю, таким образом, применима изложенная в XIV. 1.9 теория. В частности, теорема 3а позволяет заключить, что если λ не является характеристическим значением системы (1) (т. е. не является характеристическим значением операции H), то при n , достаточно больших, система (4) разрешима и имеет место сходимость приближенных решений к точному. Быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}_n^*\| \leq Q_1 \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + Q_2 \left[\frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} |b_j|^2}{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*, \dots)$ означает решение системы (1), а $\bar{x}_n^* = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$ — решение системы (4).

Отсюда ясно, что ξ_k^* мало отличается от $\xi_k^{(n)}$ для $k = 1, 2, \dots, n$, а при $k > n$ координата ξ_k^* мала. Также ясна отсюда сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^* \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Используя теорему 4(1. XIV) (с условием (59) § 1), приходим к следующей теореме.

Теорема 1 (3. XIV). Если система (4) имеет единственное решение и

$$\bar{r} = |\lambda| \eta_1 \|\bar{K}^{-1}\| \|\varphi K\| < 1, \quad (7)$$

то λ — нехарактеристическое значение системы (1), причем

$$\|K^{-1}\| \leq \frac{1 + \|\bar{K}^{-1}\| (1 + \|\varphi K\|)}{1 - \bar{r}}.$$

Эта теорема заслуживает внимания в том отношении, что заключение о разрешимости бесконечной системы делается на основании данных о решении конечной системы, при этом все величины, входящие в неравенство (7) могут быть без труда найдены, так что критерий разрешимости, данный в теореме, является вполне эффективным.

Значение величины η_1 указано выше. Для $\|\varphi K\|$ применима оценка

$$\|\varphi K\| \leq 1 + \|\varphi H\| \leq 1 + \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, $\|\bar{K}^{-1}\|$, если матрица A_n симметричная, определяется из равенства

$$\|\bar{K}^{-1}\| = \max_{j=1, 2, \dots, n} \frac{1}{|1 - \lambda \lambda_j^{(n)}|},$$

где $\lambda_j^{(n)}$ — собственные значения матрицы A_n . В общем случае $\|\bar{K}^{-1}\|$ определяется сложнее (см. III.2.8).

Замечание 1. Вместо систем, удовлетворяющих условию (2), можно было бы рассматривать более обширный класс систем, для которых операция H — вполне непрерывная из l^2 в l^2 . В этом случае η_1 определялось бы формулой

$$\eta_1 = \|H - \varphi_0^{-1} \varphi H \varphi_0^{-1} \varphi\|$$

и по-прежнему $\eta_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (X.1.2), так что и здесь все теоремы общей теории применимы.

Замечание 2. Общая теория может быть применена и к другим классам бесконечных систем, которые могут быть рассматриваемы как функциональные уравнения в других пространствах последовательностей. Таковы, например, системы типа Рисса, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{p-1} < \infty \quad (1 < p < \infty)$$

(H здесь следует рассматривать как операцию в l^p). Регулярные и вполне регулярные системы также подходят под эту схему (в пространстве m).

§ 4. Применение к интегральным уравнениям *)

4.1. Одним из наиболее эффективных методов численного решения интегральных уравнений является метод замены интегрального уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения квадратурной формулы.

Пусть дано уравнение

$$x(s) - \lambda \int_0^1 h(s, t) x(t) dt = y(s). \quad (1)$$

*) О приближенном решении интегральных уравнений и литературу по этому вопросу см. Канторович и Крылов.

Заменяя интеграл по некоторой формуле численного интегрирования, построенной по узлам $t_1, t_2, \dots, t_n$ и имеющей вид

$$\int_0^1 x(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k x(t_k), \quad (2)$$

и требуя удовлетворения равенства (1) только в узлах, приходим к системе

$$x(t_j) - \lambda \sum_{k=1}^n A_k h(t_j, t_k) x(t_k) = y(t_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

решение которой определяет приближенное значение искомого решения в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Рассмотрим применение общей теории к оценке погрешности этого метода. Для определенности будем предполагать в уравнении (1) правую часть непрерывной периодической функцией (периода 1), а ядро $h(s, t)$ непрерывной периодической (также периода 1) как по s , так и по t . При этих условиях решение тоже будет периодической непрерывной функцией. Уравнение (1) будем рассматривать как функциональное уравнение в пространстве $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{C}}$ непрерывных периодических функций. Алгебраическую систему (3) будем рассматривать как приближенное функциональное уравнение в пространстве $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{m}_n$,

$$\bar{K}\bar{x} \equiv \bar{x} - \lambda \bar{H}\bar{x} = \varphi y. \quad (4)$$

При этом узлы и коэффициенты квадратурной формулы (2) выберем следующим образом:

$$A_k = \frac{1}{n}, \quad t_k = \frac{2k-1}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. положим в основу формулу средних прямоугольников — одну из наиболее удобных в случае периодических функций. При таком выборе операция $\bar{H}$ в уравнении (4) определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) \dots \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \\ \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{3}{2n}\right) \dots \frac{1}{n} h\left(\frac{3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) & \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) \dots \frac{1}{n} h\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Операция φ определяется следующим образом:

$$\varphi x = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) \quad \|\varphi\| = 1 \quad (x \in \tilde{C}).$$

Что касается пространства $\tilde{X}$ и связанного с ним отображения φ_0^{-1} , то мы определим их двумя различными способами, что приведет к двум оценкам погрешности.

Примем сначала в качестве $\tilde{X}$ множество всех непрерывных периодических функций, линейных в каждом из промежутков вида $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, где $\tau_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Каждая такая функция определяется своими значениями в точках $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ и тем самым отображение φ_0^{-1} определено:

$$\begin{aligned} \tilde{x} = \varphi_0^{-1} \bar{x} \quad (\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in m_n; \quad \tilde{x}(\tau_k) = \xi_k; \\ k = 1, 2, \dots, n; \quad \tilde{x} \in \tilde{X}). \end{aligned}$$

При этом $\|\varphi_0^{-1}\| = 1$.

Обозначим через $\omega_s(\delta)$ модуль непрерывности функции $h(s, t)$ как функции от s :

$$\omega_s(\delta) = \sup |h(s + \sigma, t) - h(s, t)| \quad (0 \leq s, t \leq 1; |\sigma| \leq \delta);$$

аналогично определяется $\omega_t(\delta)$.

Для проверки условия Ia оценим погрешность квадратурной формулы (2) для функции вида $z(t)\tilde{x}(t)$, где z — периодическая функция, модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(\delta)$, а $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 z(t) \tilde{x}(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} z(t_k) \tilde{x}(t_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [z(t) - z(t_k)] \tilde{x}(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[n \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \tilde{x}(t) dt - \tilde{x}(t_k) \right] z(t_k) \right| \leq \omega\left(\frac{1}{2n}\right) \|\tilde{x}\|, \end{aligned}$$

поскольку в силу линейности функции $\tilde{x}(t)$ в каждом из промежутков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$n \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \tilde{x}(t) dt = \tilde{x}\left(\frac{\tau_k + \tau_{k+1}}{2}\right) = \tilde{x}(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

и, следовательно, второе слагаемое обращается в нуль.

Полагая в предыдущем неравенстве $z(t) = h(t_j, t)$, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi H\tilde{x} - \bar{H}\varphi_0\tilde{x}\| &= \max_{j=1, 2, \dots, n} \left| \int_0^1 h(t_j, t) \tilde{x}(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(t_j, t_k) \tilde{x}(t_k) \right| \leq \omega_t\left(\frac{1}{2n}\right) \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Итак, условие Ia выполнено с

$$\bar{\eta}_1 = \omega_t\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Перейдем к проверке условия II. Покажем предварительно, что если $z \in \tilde{C}$ — произвольная функция, модуль непрерывности которой не превосходит $\omega(\delta)$, то

$$\|z - \tilde{z}\| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\tilde{z} = \varphi_0^{-1}\varphi z$, т. е. $\tilde{z}$ — кусочно-линейная функция, значения которой в точках $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ совпадают с соответствующими значениями функции z . Действительно, если $\tau_j \leq s \leq \tau_{j+1}$, то

$$\begin{aligned} |z(s) - \tilde{z}(s)| &= |z(s) - [(\tau_{j+1} - s)z(\tau_j) + (s - \tau_j)z(\tau_{j+1})]| \leq \\ &\leq n [|(\tau_{j+1} - s)(z(s) - z(\tau_j))| + |(s - \tau_j)(z(s) - z(\tau_{j+1}))|] \leq \\ &\leq n\omega\left(\frac{1}{n}\right)(\tau_{j+1} - \tau_j) = \omega\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

откуда, вследствие произвольности s и следует доказываемое. Оценим теперь модуль непрерывности элемента $z = Hx$ ($x \in \tilde{C}$).

$$|z(s) - z(s')| \leq \int_0^1 |h(s, t) - h(s', t)| |x(t)| dt \leq \omega_s(\delta) \|x\| \quad (|s - s'| \leq \delta).$$

Таким образом, в качестве $\omega(\delta)$ можно взять

$$\omega(\delta) = \omega_s(\delta) \|x\|,$$

и по предыдущему, если обозначить $\tilde{z} = \varphi_0^{-1}\varphi Hx$, имеем

$$\|Hx - \tilde{z}\| \leq \omega_s\left(\frac{1}{n}\right) \|x\|.$$

Следовательно, условие II выполнено с

$$\eta_1 = \omega_s\left(\frac{1}{n}\right).$$

Наконец, применяя сказанное к элементу y , найдем $\tilde{y} \in \tilde{X}$ так, что

$$\|y - \tilde{y}\| \leq \bar{\omega}\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\bar{\omega}(\delta)$ — модуль непрерывности функции y . Отсюда видно, что условие III выполнено с

$$\eta_2 = \frac{1}{\|y\|} \bar{\omega}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Вследствие непрерывности ядра $h(s, t)$ и правой части $y(s)$ уравнения (1) величины η , η_1 , η_2 стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, а $\|\varphi\| = \|\varphi_0^{-1}\| = 1$, поэтому применимы теоремы общей теории. В частности, если λ — нехарактеристическое значение уравнения (1), то на основании теоремы 3а (1. XIV) можно заключить о разрешимости системы (3) (для достаточно больших n) и о стремлении приближенных решений $\varphi_0^{-1} \bar{x}_n^*$ (кусочно-линейных функций, построенных по значениям $\{\xi_k\}$, найденным из системы (3)) к точному.

Для дальнейшего важно отметить, что на основании теоремы 1а (1. XIV) норма обратной операции $\|\bar{K}^{-1}\|$ ограничена независимо от n .

В случае, если $h(s, t)$ и $y(s)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α , то на основании теоремы 3а (1. XIV) быстрота сходимости последовательности приближенных решений может быть оценена так:

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Действительно, в этом случае $\omega_s(\delta)$, $\omega_t(\delta)$, $\bar{\omega}(\delta)$ имеют вид $O(\delta^\alpha)$.

4.2. Рассмотрим другой способ оценки погрешности того же метода, к которому мы приходим при ином выборе подпространства $\tilde{X}$.

Для удобства будем считать n нечетным: $n = 2m + 1$. За $\tilde{X}$ примем множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше m , т. е. $\tilde{x} \in \tilde{X}$ означает

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos 2k\pi t + b_k \sin 2k\pi t).$$

Ясно, что операция φ_0^{-1} сопоставляет элементу $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathfrak{m}_n$ интерполяционный полином, построенный по узлам $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ со значениями в них соответственно $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. По лемме Бернштейна, *) если для тригонометрического полинома $\tilde{x}$ в узлах

*) См. Натансон-I, стр. 538.

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ имеет место оценка

$$|\tilde{x}(\tau_j)| \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

то

$$|\tilde{x}(t)| \leq A \ln m + B \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Отсюда получается оценка нормы операции φ_0^{-1} :

$$\|\varphi_0^{-1}\| \leq A \ln m + B. \quad (6)$$

Обозначим далее через E_m^t и E_m^s наилучшее приближение $h(s, t)$ как функции от t и s соответственно тригонометрическими полиномами m -го порядка по соответствующей переменной, иначе говоря, предполагаем существование функций вида

$$h_1(s, t) = \frac{a'_0(s)}{2} + \sum_{k=1}^m [a'_k(s) \cos 2k\pi t + b'_k(s) \sin 2k\pi t],$$

$$h_2(s, t) = \frac{a''_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^m [a''_k(t) \cos 2k\pi s + b''_k(t) \sin 2k\pi s],$$

таких, что

$$|h(s, t) - h_1(s, t)| \leq E_m^t \quad |h(s, t) - h_2(s, t)| \leq E_m^s \quad (0 \leq s, t \leq 1).$$

Для проверки условия Ia отметим, прежде всего, что квадратурная формула (2) точна, если подынтегральная функция — тригонометрический полином порядка не выше $n - 1 = 2m$. *)

Учитывая, что $h_1(s, t) \tilde{x}(t)$ именно такой полином от t , имеем

$$\int_0^1 h_1(s, t) \tilde{x}(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_1(s, t_k) \tilde{x}(t_k) \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\varphi H \tilde{x} - \bar{H} \varphi_0 \tilde{x}\| &= \max_{j=1, 2, \dots, n} \left| \int_0^1 h(t_j, t) \tilde{x}(t) dt - \right. \\ &- \left. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(t_j, t_k) \tilde{x}(t_k) \right| \leq \max_{j=1, 2, \dots, n} \left| \int_0^1 [h(t_j, t) - h_1(t_j, t)] \tilde{x}(t) dt \right| + \\ &+ \max_{j=1, 2, \dots, n} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [h(t_j, t_k) - h_1(t_j, t_k)] \tilde{x}(t_k) \right| \leq 2E_m^t \|\tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Следовательно, условие Ia выполнено с

$$\bar{\eta}_1 = 2E_m^t.$$

*) См. Натансон-I, стр. 611.

Для проверки условия II с целью аппроксимации элемента $z = Hx$ построим функцию *)

$$\tilde{x}(s) = \int_0^1 h_2(s, t) x(t) dt.$$

Как ясно из вида $h_2(s, t)$ функция $\tilde{x}(s)$ есть тригонометрический полином порядка m , т. е. $\tilde{x} \in \tilde{X}$. В то же время

$$\|Hx - \tilde{x}\| = \max_s \left| \int_0^1 [h(s, t) - h_2(s, t)] x(t) dt \right| \leq E_m^s \|x\|.$$

Условие II, таким образом, выполнено при

$$\eta_1 = E_m^s.$$

Наконец, условие III выполняется, если положить

$$\eta_2 = \frac{1}{\|y\|} E_m(y),$$

где $E_m(y)$ — наилучшее приближение функции y тригонометрическими полиномами порядка m .

На основании этих оценок имеем возможность, пользуясь теоремой 2а (1. XIV), получить оценку близости точного и приближенного решения:

$$\begin{aligned} \|x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}^*\| &\leq \bar{p} \|x^*\| \\ \bar{p} &= 4|\lambda| E_m^t \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| + \left(|\lambda| E_m^s + \frac{E_m(y) \|K\|}{\|y\|} \right) (1 + \|\varphi_0^{-1}\| \|\bar{K}^{-1}\| \|K\|). \end{aligned}$$

Отметим, что, как было установлено в 4.1, $\|\bar{K}^{-1}\|$ ограничена независимо от n .

Предположим, что ядро $h(s, t)$ имеет производные до ν -го порядка по s и по t , причем $\frac{\partial^\nu h}{\partial s^\nu}$ и $\frac{\partial^\nu h}{\partial t^\nu}$ удовлетворяют условию Липшица с показателем α ; эти же предположения сделаем относительно функции $y(s)$. Тогда в силу известной теоремы Джексона (см. Натансон-I, стр. 121).

$$\begin{aligned} E_m^t &= O\left(\frac{1}{m^{\nu+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\nu+\alpha}}\right), \quad E_m^s = O\left(\frac{1}{m^{\nu+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\nu+\alpha}}\right), \\ E_m(y) &= O\left(\frac{1}{m^{\nu+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\nu+\alpha}}\right), \end{aligned}$$

а так как на основании (6)

$$\|\varphi_0^{-1}\| = O(\ln m) = O(\ln n),$$

*) Нетрудно показать, что функция $h_2(s, t)$ может быть всегда выбрана измеримой по t , так что написанный интеграл не существует. Впрочем, эта оговорка не нужна, если интеграл понимать в смысле Банаха (см. IV.2.8), так как он определен для любой ограниченной функции.

то по теореме 3а (1. XIV) получаем оценку быстроты убывания погрешности приближенного решения

$$\|x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\nu+\alpha}}\right).$$

Используя теорему 4 (1. XIV), можно на основании результатов приближенного решения установить возможную область расположения характеристических значений уравнения (1).

Отметим, наконец, что аналогичные рассуждения можно было бы применить для оценки погрешности того же метода и в случае использования других квадратурных формул. В частности, для непериодического случая, используя формулу Гаусса, нужно было бы опираться на интерполирование алгебраическими полиномами и теоремы о порядке приближения функций алгебраическими полиномами.

4.3. Рассмотрим некоторые другие методы приближенного решения интегрального уравнения (1) и, прежде всего, *метод моментов*. Этот метод состоит в том, что приближенное решение уравнения (1) отыскивается в форме

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (7)$$

где ω_k ($k=1, 2, \dots$) — функции полной ортонормальной системы. Коэффициенты c_k при этом определяются из системы

$$\begin{aligned} c_j - \lambda \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 \int_0^1 h(s, t) \omega_j(s) \omega_k(t) ds dt = \\ = \int_0^1 y(s) \omega_j(s) ds \quad (j=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

которая заменяет требование обращения в нуль разности $Kx - y$ условием ортогональности ее первым n функциям данной ортонормальной системы.

Предполагая ядро $h(s, t)$ уравнения (1) удовлетворяющим условию

$$\int_0^1 \int_0^1 |h(s, t)|^2 ds dt < \infty,$$

примем за X пространство L^2 , а в качестве $\tilde{X}$ возьмем подпространство элементов вида (7). Операцию P определим как операцию ортогонального проектирования на $\tilde{X}$, т. е. $\tilde{x} = Px$ означает, что

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^n (x, \omega_k) \omega_k.$$

Система (8) может быть записана в виде одного уравнения в пространстве $\tilde{X}$

$$\tilde{x} - P\tilde{H}\tilde{x} = Py.$$

Отсюда ясно, что мы находимся в условиях, о которых шла речь в XIV.1.8. При этом, поскольку система $\{\omega_k\}$ полная, выполнены условия теоремы 6 (1. XIV), и, следовательно, имеет место сходимость приближенных решений к точному. Быстрота сходимости определяется свойствами ядра $h(s, t)$ и правой части $y(s)$; она зависит от быстроты сходимости ортогональных разложений этих функций по функциям системы. Остановимся на случае, когда ядро периодическое и удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha + \frac{1}{2}$ ($\alpha > 0$) по s . Аналогичные требования наложим на $y(s)$. За ортонормальную систему $\{\omega_k\}$ возьмем систему тригонометрических функций. С помощью теоремы Джексона нетрудно получить в этом случае оценки

$$\eta_1 = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad \eta_2 = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right),$$

и, следовательно,

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} = O(\eta_1 + \eta_2) = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad (9)$$

Докажем, что фактически в этом случае имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному.

Пусть $\tilde{x} = \sum_{k=1}^n c_j \omega_j$. Оценим $\|\tilde{x}\|_C$ через $\|\tilde{x}\|_{L^2}$. Так как $\|\omega_j\|_C \leq M$ ($j = 1, 2, \dots$), то, применяя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\|\tilde{x}\|_C \leq M \sum_{k=1}^n |c_j| \leq M \sqrt{n} \left[\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = M \sqrt{n} \|x\|_{L^2}.$$

Применим эту оценку к разности двух приближений $\tilde{x}_n^*$ и $\tilde{x}_{2k}^*$, где $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$. Получим

$$\|\tilde{x}_{2k}^* - \tilde{x}_n^*\|_C \leq M \cdot 2^{\frac{k}{2}} \|\tilde{x}_{2k}^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2}.$$

Далее, используя оценку (9), будем иметь

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_{2k}^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} &\leq \|\tilde{x}_{2k}^* - x^*\|_{L^2} + \|x^* - \tilde{x}_n^*\|_{L^2} \leq \frac{C}{2^{\frac{k}{2} + \alpha k}} + \\ &+ \frac{C}{n^{\frac{1}{2} + \alpha}} \leq \frac{C_2}{2^{\frac{k}{2} + \alpha k}}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_n^*\|_C \leq \frac{C_2}{2^{\alpha k}}. \quad (10)$$

В частности, последняя оценка верна и при $n = 2^{k-1}$, т. е.

$$\|\tilde{x}_{2^k}^* - \tilde{x}_{2^{k-1}}^*\|_C \leq \frac{C_2}{2^{\alpha k}}.$$

Отсюда можно заключить о равномерной сходимости ряда

$$\tilde{x}_1^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{x}_{2^k}^*(t) - \tilde{x}_{2^{k-1}}^*(t)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_{2^k}^*(t) = x^*(t).$$

Учитывая (10), найдем, что и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n^*(t) = x^*(t)$$

равномерно. При этом, очевидно,

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\|_C = O(n^{-\alpha}).$$

Теорема о сходимости метода моментов доказана в [456] и [61]. Новые оценки погрешности при определении характеристических значений интегрального уравнения даны в [22].

4.4. Рассмотрим теперь метод замены ядра на близкое (в частности, на вырожденное). Метод состоит, как ясно из его названия, в замене уравнения (1) уравнением

$$\tilde{x}(s) - \lambda \int_0^1 \tilde{h}(s, t) \tilde{x}(t) dt = y(s), \quad (11)$$

ядро которого $\tilde{h}(s, t)$ — близко к $h(s, t)$ и решение которого известно.

Записывая уравнение (11) как функциональное в том же пространстве, что и уравнение (1)

$$\tilde{K}\tilde{x} \equiv \tilde{x} - \lambda \tilde{H}\tilde{x} = y,$$

мы приходим к ситуации, которая была описана в конце пункта XIV. 1.8. Как там было указано, условие I сводится к неравенству

$$\|H - \tilde{H}\| \leq \eta, \quad (12)$$

а условия II и III выполнены с $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Беря в качестве пространства $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}$ пространство $\tilde{\mathbf{M}}$ ограниченных измеримых функций, перепишем (12) в форме

$$\int_0^1 |h(s, t) - \tilde{h}(s, t)| dt \leq \eta \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Норма операции $\tilde{K}^{-1}$ без труда оценивается, если известна резольвента $\tilde{\Gamma}(\lambda; s, t)$ приближенного уравнения (11). Так как обратная операция $\tilde{K}^{-1}$ имеет вид

$$z = \tilde{K}^{-1}y, \quad z(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \tilde{\Gamma}(\lambda; s, t) y(t) dt,$$

то

$$\|\tilde{K}^{-1}\| \leq 1 + |\lambda| B,$$

где B определяется из неравенства

$$\int_0^1 |\tilde{\Gamma}(\lambda; s, t)| dt \leq B \quad (0 \leq s \leq 1).$$

Используя оценку (19) § 1, получаем оценку близости приближенного решения к точному

$$\|x^*(t) - \tilde{x}^*(t)\| \leq |\lambda| \eta (1 + |\lambda| B) \|x^*\|. \quad (13)$$

Аналогичная оценка верна, если обменять ролями оба уравнения.

Из (13) вытекает равномерная сходимость приближенных решений к точному при соответствующей сходимости ядер.

Общая теория может быть применена и к методу решения, при котором решение ищется в форме (7), причем требуется, чтобы равенство левой и правой части соблюдалось лишь в заданных точках. Изложение этого метода и его исследование (см. Канторович) мы здесь приводить не будем, так как сходный метод рассмотрен для дифференциальных уравнений в следующем параграфе.

§ 5. Применение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

5.1. Рассмотрим сначала так называемый *интерполяционный метод*, иначе называемый *методом совпадения* (коллокации) *) в случае граничной задачи для уравнения

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - \lambda \left[p_1 \frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}} + \dots + p_{2m}x \right] = y \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} x(a) &= x'(a) = \dots = x^{(m-1)}(a) = 0, \\ x(b) &= x'(b) = \dots = x^{(m-1)}(b) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

*) Впервые интерполяционный метод изложен, по-видимому, в [45а], специально для дифференциальных уравнений без доказательства сходимости в [110], а также в [111]. Доказательство сходимости на основании теорем § 1—2 получено в [47].

Приближенное решение будем искать в форме

$$\tilde{x}(t) = (t - a)^m (b - t)^m \sum_{k=1}^n c_k t^{k-1}, \quad (3)$$

так что граничные условия для $\tilde{x}$ удовлетворены; коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$ находятся из условия удовлетворения уравнения (1) в некоторой заданной системе точек (узлов) $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\left\{ \frac{d^{2m} \tilde{x}}{dt^{2m}} - \lambda \left[p_1 \frac{d^{2m-1} \tilde{x}}{dt^{2m-1}} + \dots + p_{2m} \tilde{x} \right] \right\}_{t=t_j} = y(t_j) \quad (4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Для применения общей теории, изложенной в § 2, будем рассматривать дифференциальное уравнение (1) как функциональное в пространстве $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{(2m)}$ $2m$ -непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (2). Определение нормы в пространстве $\mathbf{X}$ будет дано ниже.

За $\tilde{\mathbf{X}}$ примем множество функций вида (3).

Далее, в качестве $\mathbf{Y}$ рассмотрим пространство $\mathbf{C}$ непрерывных в промежутке $[a, b]$ функций с обычным определением нормы.

Наконец, за $\tilde{\mathbf{Y}}$ примем множество полиномов $(n-1)$ -ой степени. Отображение Φ пространства $\mathbf{Y}$ на $\tilde{\mathbf{Y}}$ определим, принимая в качестве $\tilde{y} = \Phi(y)$ интерполяционный полином $(n-1)$ -й степени, имеющий в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$ те же значения, что и y . Как мы знаем, в случае чебышёвских узлов

$$\|\Phi\| \leq A \ln n + B. \quad (5)$$

Известно также, что в случае гауссовских узлов

$$\|\Phi\| \leq A \sqrt{n}, \quad (6)$$

а если узлы являются корнями n -го ортогонального полинома с ограниченным весом $w(t) \geq c > 0$, то

$$\|\Phi\| \leq An. *) \quad (7)$$

Рассмотренная граничная задача равносильна функциональному уравнению

$$K_1 x \equiv Gx - \lambda Tx = y, \quad (8)$$

где

$$Gx = \frac{d^{2m} x}{dt^{2m}}; \quad z = Tx; \quad z(t) = \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t). \quad (9)$$

*) По поводу (5) и (7) см. Натансон-1, стр. 539 и 544. Оценка (6) имеется в книге Сёге (Szegő G.) Orthogonal polynomials. 1939. Amer. Math. Soc. Colloq. Publik. XXIII.

Операция, обратная G , есть интегральная операция, ядро которой есть функция Грина дифференциальной операции $\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}$ при условиях (2).

Существование функции Грина следует из того, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} = 0 \quad (10)$$

при условиях (2) имеет единственное, нулевое, решение, так как общим решением уравнения (10) является произвольный полином степени $2m-1$, а полином, отличный от нулевого и удовлетворяющий условиям (2), должен иметь множитель $(t-a)^m(b-t)^m$, степень которого $2m$.

Таким образом,

$$x = G^{-1}y, \quad x(s) = \int_a^b g(s, t) y(t) dt \quad (x \in X, y \in Y).$$

Функция $g(s, t)$ имеет непрерывные производные до порядка $2m-1$, а $2m$ -я производная ее имеет скачок при $s=t$. Отсюда

$$x^{(k)}(s) = \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial s^k} g(s, t) y(t) dt \quad (k=0, 1, \dots, 2m-1).$$

а потому

$$\max_s |x^{(k)}(s)| \leq A_k \|y\|_C \quad (k=0, 1, \dots, 2m-1). \quad (11)$$

Если принять $A_{2m}=1$, то (11) будет верно и при $k=2m$.

Желая согласовать норму в X с нормой в Y так, чтобы операция G осуществляла изометрию между этими пространствами, мы должны положить

$$\|x\|_X = \|Gx\|_Y = \max_t |x^{(2m)}(t)|.$$

При этом (11) дает возможность оценить любую производную функции x через норму элемента x в пространстве X :

$$\max_t |x^{(k)}(t)| \leq A_k \|x\| \quad (k=0, 1, \dots, 2m). \quad (12)$$

Отметим, что операция G переводит элементы пространства $\tilde{X}$ в элементы пространства $\tilde{Y}$ — полиномы степени не выше $n-1$.

Оценим норму T как операции из пространства $C^{(2m)}$ в C . С помощью (12) имеем

$$\|Tx\| = \max_t \left| \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t) \right| \leq \left[\sum_{s=1}^{2m} B_s A_{2m-s} \right] \|x\|,$$

где

$$B_s = \max_t |p_s(t)| \quad (s=1, 2, \dots, 2m).$$

Таким образом,

$$\|T\| \leq \sum_{s=1}^{2m} B_s A_{2m-s}. \quad (13)$$

Аналогичным образом, если известна функция Грина уравнения (1) при условиях (2), можно оценить норму операции K_1^{-1} .

Приближенное уравнение — систему (4) — можно, очевидно, записать в виде

$$\tilde{K}_1 \tilde{x} \equiv G \tilde{x} - \lambda \Phi T \tilde{x} = \Phi y, \quad (14)$$

так как система (4) получается подстановкой в уравнение (1) выражения $\tilde{x}$ вида (3) и уравниванием обеих частей в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$, что равносильно уравниванию интерполяционных полиномов, построенных по значениям в этих узлах.

Сравнивая уравнение (14) с уравнением (22) в XIV. 2.3, обнаруживаем, что оно построено специальным образом, так что условие 1б выполнено с $\mu = 0$.

Для проверки условия 1б, т. е. установления возможной степени аппроксимации элементов вида Tx элементами из $\tilde{Y}$, оценим $\frac{d}{dt} Tx$. Имеем, учитывая (12),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_C &= \max_t \left| \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{2m} p_s(t) x^{(2m-s)}(t) \right| = \\ &= \max_t \left| \sum_{s=0}^{2m} (p'_s(t) + p_{s+1}(t)) x^{(2m-s)}(t) \right| \leq M \|x\| \quad (p_0(t) = p_{2m+1}(t) = 0). \end{aligned}$$

На основании теоремы Джексона существует полином $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ такой, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{AM \|x\|}{n}.$$

Следовательно, условие 1б выполнено с $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Что касается условия 1б, то, если правая часть уравнения (1) — функция y — имеет непрерывную производную, то, снова применяя теорему Джексона, получим для μ_2 значение $\mu_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Отметим еще, что если в уравнении (1) $p_1 = 0$ (этого всегда можно добиться подходящей заменой переменных) и коэффициенты p_s дважды непрерывно дифференцируемы, то, проводя предыдущие рассуждения по отношению к $\frac{d^2}{dt^2} Tx$, мы получили бы для μ_1 величину $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Если же и y — дважды дифференцируемая функция, то и $\mu_2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Используя результаты § 2, учитывая при этом найденные оценки для μ_1 и μ_2 и оценку для $\|\Phi\|$, по теореме 16 (2. XIV), заключаем, что при достаточно больших n система (4) разрешима.

Используя же теорему 36 (2. XIV), заключаем о сходимости приближенных решений к точному в случае узлов Чебышёва или Гаусса. При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

соответственно для узлов Чебышёва и Гаусса.

В упомянутом же случае, когда $p_1 = 0$, мы получаем разрешимость системы (4) и тогда, когда в качестве узлов рассматриваются корни n -го ортогонального полинома по весу $w(t) \geq c > 0$. Оценка погрешности приближенного решения в этом случае имеет вид

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

При условии большей гладкости коэффициентов может быть установлена большая быстрота сходимости. Предположим, что $p_1, p_2, \dots, p_{2m}$ и y дифференцируемы r раз и их r -е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α . Воспользуемся замечанием к теореме 3 (1. XIV), согласно которому быстрота сходимости определяется равенством

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O(\varepsilon \|P\|) \quad (P = G^{-1}\Phi G; \|P\| = \|\Phi\|), \quad (15)$$

где ε характеризует возможность аппроксимации решения x^* элементом $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Так как

$$\|x^* - \tilde{x}\|_X = \|G(x^* - \tilde{x})\|_Y = \left\| \frac{d^{2m} x^*}{dt^{2m}} - \tilde{y} \right\|_Y \quad (\tilde{y} = Gx \in \tilde{Y}),$$

то ε определяется степенью аппроксимации $2m$ -ой производной решения полиномом степени $n - 1$. Но, как легко устанавливается индукцией по r , функция $\frac{d^{2m} x^*}{dt^{2m}}$ имеет r -ю производную, удовлетворяющую условию Липшица с показателем α . Поэтому на основании теоремы Джексона существует полином $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ такой, что

$$\left\| \frac{d^{2m} x^*}{dt^{2m}} - \tilde{y} \right\| \leq \frac{D}{n^{r+\alpha}}.$$

Таким образом, ε имеет порядок $n^{-r-\alpha}$, а тогда согласно (15)

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right); \quad \|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-\frac{1}{2}}}\right);$$

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right)$$

соответственно для узлов Чебышёва, Гаусса и корней ортогонального полинома по ограниченному (снизу) весу.

З а м е ч а н и е 1. Не меняя существенно хода рассуждений, можно установить сходимость данного метода не только в случае граничной задачи, но и в случае задачи Коши. Характер рассуждений не изменится, если рассматривать не одно дифференциальное уравнение, а систему.

З а м е ч а н и е 2. Теорему о сходимости данного приближенного метода можно рассматривать как теорему о сходимости некоторого интерполяционного процесса — полином $\tilde{x}_n^*(t)$ можно рассматривать как интерполяционный полином для решения $x^*(t)$, который строится по граничным условиям и заданным значениям дифференциальной операции Kx^* в узлах $t_1, t_2, \dots, t_n$.

З а м е ч а н и е 3. Любопытно отметить, что для равноотстоящих узлов сходимость рассмотренного процесса не имеет места даже для простейшего уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} = y$, что без труда получается, если учесть факт, возможной расходимости обычного интерполяционного процесса при равноотстоящих узлах (см. Натансон-I, стр. 519).

5.2. Рассмотрим теперь применение общей теории к исследованию сходимости метода Галеркина и метода моментов.*)

Пусть имеется дифференциальное уравнение (1), и однородные граничные условия

$$M(x) = 0 \quad (16)$$

на концах промежутка. *Метод моментов* состоит в том, что, взяв систему функций $\{\omega_k\}$, удовлетворяющих граничным условиям (16), ищут приближенное решение в виде

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t), \quad (17)$$

причем c_k определяют из условия, чтобы результат подстановки $\tilde{x}$ в уравнение (1) (точнее, невязка, получающаяся при этом) был ортогонален первым n функциям некоторой системы $\{\zeta_j\}$:

$$\int_a^b L \left(\sum_{k=1}^n c_k \omega_k \right) \zeta_j(t) dt = \int_a^b y(t) \zeta_j(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где через $L(x)$ обозначено дифференциальное выражение

$$L(x) = \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - \lambda \sum_{s=1}^{2m} p_s \frac{d^{2m-s}x}{dt^{2m-s}}.$$

*) Сходимость метода Галеркина в общей форме впервые установлена в [51]. Частный случай метода Галеркина — метод Рунге — и метод моментов рассмотрен ранее в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (см. [67], [61] а также Михлин).

Если при этом $\zeta_j = \omega_j$, то получаем *метод Галеркина*.

5.3. Рассмотрим, в частности, уравнение

$$x''(t) - \lambda [p_1(t)x'(t) + p_2(t)x(t)] = y(t) \quad (|t| \leq 1) \quad (18)$$

при условиях

$$x(-1) = x(1) = 0. \quad (19)$$

При этом в качестве функций ω_k рассмотрим функции

$$\omega_k(t) = t^{k-1}(1-t^2) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$Gx - \lambda Tx = y, \quad (20)$$

где $Gx = x''$. В качестве X возьмем унитарное пространство (неполное) дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничному условию (19), в котором

$$\|x\|_X = \left[\int_{-1}^1 |x''(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (x_1, x_2)_X = \int_{-1}^1 x_1'(t) x_2'(t) dt.$$

В Y , которое в данном случае состоит из всех непрерывных функций, введем метрику, согласованную с метрикой пространства X при помощи операции G :

$$\|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_X = \left[\int_{-1}^1 |y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (y_1, y_2)_Y = \int_{-1}^1 y_1(t) y_2(t) dt.$$

В качестве $\tilde{X}$ берем подпространство функций вида (17), а пространство $\tilde{Y}$ определяем как $G(\tilde{X})$, что, как легко видеть, дает совокупность всех полиномов степени $n-1$. Наконец, операцию Φ определим как операцию ортогонального проектирования Y на $\tilde{Y}$. При этом, если $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — система линейно независимых элементов из $\tilde{Y}$, то равенство $\Phi y = 0$ равносильно системе равенств $(y, \zeta_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

При сделанных предположениях уравнение метода моментов равносильно функциональному уравнению

$$G\tilde{x} - \lambda \Phi T\tilde{x} = \Phi y, \quad (21)$$

т. е. приближенное уравнение построено специальным образом в соответствии с XIV. 2.3. Следовательно, условие Iб выполнено с $\mu = 0$.

Для проверки условия IIб нужно показать возможность аппроксимации элемента Tx элементами из $\tilde{Y}$. Отметим предварительно, что

для функции из X через ее норму могут быть оценены максимум ее самой и ее первой производной:

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 [x'(t) - x'(\tau)] d\tau \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \left[\int_{\tau}^t x''(u) du \right] d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\int_{\tau}^t |x''(u)|^2 du \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\tau}^t du \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \leq A \|x\|, \\ |x(t)| &\leq \int_{-1}^1 |x'(\tau)| d\tau \leq B \|x\|. \end{aligned}$$

В таком случае можно, предполагая непрерывную дифференцируемость коэффициентов уравнения (18), написать

$$\left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y = \|p_1 x'' + (p_1 + p_1') x' + p_2 x\|_Y \leq C \|x\|.$$

Отсюда легко получается, что функция Tx удовлетворяет условию Липшица с показателем $\frac{1}{2}$

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} Tx dt \right| \leq \left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}},$$

а потому может быть аппроксимирована полиномом $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ так, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{D \|x\|}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, можно считать $\mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Аналогичные рассуждения приводят к значению для $\mu_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (в предположении, что производная правой части суммируема с квадратом).

Если $p_1 = 0$, то таким же образом можно оценить $\frac{d^2}{dt^2} Tx$ и получить для μ_1 значение $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Применение теоремы 36 (2. XIV) дает порядок быстроты сходимости последовательности приближенных решений к точному

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Если же $p_1 = 0$, а y'' суммируема с квадратом, то

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Если p_1 , p_2 и y имеют производные более высоких порядков, то можно установить и более высокий порядок убывания погрешности приближенных решений, так как в этом случае x^* многократно дифференцируема и допускает в связи с этим более точную аппроксимацию полиномами.

Сходимость приближенных решений к точному во всех случаях имеет место в пространстве X , т. е. сами приближенные решения и их первые производные сходятся равномерно к точному решению и его первой производной соответственно. Вторые производные приближенных решений сходятся к второй производной решения в среднем.

5.4. Рассмотрим то же самое уравнение (18) при других определениях нормы в пространствах X и Y . Именно, примем

$$\|x\|_X = \max_{|t| \leq 1} |x''(t)|, \quad \|y\| = \max_{|t| \leq 1} |y(t)| \quad (x \in X, y \in Y).$$

Очевидно, при этом нормы согласованы, так что $\|G\| = \|G^{-1}\| = 1$. Определение операции Φ сохраним прежнее, это позволяет рассматривать приближенное уравнение как построенное специальным образом, следовательно $\mu=0$. Оценим норму Φ . Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ — ортогональные по весу $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ полиномы (полиномы Чебышёва). Проекцию Φ пространства Y на $\tilde{Y}$ можно записать при этом в форме

$$\Phi y = \sum_{k=1}^n (y, \zeta_k) \zeta_k.$$

Но согласно известной оценке отрезка разложения непрерывной функции в ряд по полиномам Чебышёва (Натансон-1, стр. 367)

$$\max_{|t| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n (y, \zeta_k) \zeta_k(t) \right| \leq (A \ln n + B) \|y\|_Y,$$

так что

$$\|\Phi\| \leq A \ln n + B. \quad (22)$$

Для аппроксимации элемента Tx полиномом, т. е. элементом из $\tilde{Y}$, воспользуемся тем, что

$$\left\| \frac{d}{dt} Tx \right\|_Y \leq C \|x\|.$$

Поэтому можно найти $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ так, что

$$\|Tx - \tilde{y}\| \leq \frac{D \|x\|}{n}.$$

Следовательно, $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (если $p_1 = 0$, то можно взять $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Наконец, $\mu_2 = \frac{E_n(y)}{\|y\|}$. По теореме 2б (2. XIV), учитывая (22), имеем

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = (\mu_1 + \mu_2) O(\ln n).$$

Если $E_n(y) \ln n \rightarrow 0$, то имеет место равномерная сходимость приближенных решений к точному. Если, кроме того, $p_1 = 0$ и y дважды дифференцируема, то

$$\|x^* - \tilde{x}_n^*\| = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

5.5. В качестве следующего применения рассмотрим решение уравнения

$$L(x) \equiv \frac{d}{dt} \left[p \frac{dx}{dt} \right] - \lambda \left\{ \frac{d}{dt} [qx] + rx \right\} = y \quad (23)$$

при условиях

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (24)$$

При этом будем предполагать функции p и q непрерывно дифференцируемыми и $p(t) > 0$. Кроме того, будем считать λ таким, что указанная граничная задача имеет единственное решение.

Решение по методу Галеркина разыскивается в форме

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \omega_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (25)$$

где ω_k ($k = 1, 2, \dots$) — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию (24)

$$\omega_k(0) = \omega_k(1) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и такие, что их производные вместе с функцией, равной тождественно единице, образуют полную систему. Будем считать эту систему $\{\omega'_k\}$ ортонормальной по весу p :

$$\int_0^1 p(t) \omega'_j(t) \omega'_k(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

К этой системе присоединим функцию $\omega'_0(t) = \frac{1}{p(t)} \left[\int_0^1 \frac{ds}{p(s)} \right]^{-\frac{1}{2}}$,

тогда соотношение (26) будет иметь место и при $j, k = 0$, а система $\{\omega'_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$) будет полной ортонормальной системой.

Уравнение (23) вместе с условиями (24) рассматриваем как одно функциональное уравнение

$$Gx - \lambda Tx = y \quad (27)$$

в пространстве X , состоящем из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничному условию (24). Норму в X определим, полагая

$$\|x\| = \left[\int_0^1 p(t) |x'(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (x_1, x_2) = \int_0^1 p(t) x'_1(t) x'_2(t) dt.$$

Пространство Y составим из непрерывных функций; метрику в Y введем из условия согласованности ее с метрикой пространства X :

$$\|y\|_Y = \|G^{-1}y\|_{X^*} \quad (y_1, y_2)_Y = (G^{-1}y_1, G^{-1}y_2)_X.$$

В качестве $\tilde{X}$ рассматривается множество элементов вида (25). За $\tilde{Y}$ принимается множество элементов вида

$$y = \sum_{k=1}^n c_k G \omega_k. \quad (28)$$

Наконец, операция Φ определяется как операция ортогонального проектирования Y на $\tilde{Y}$, так что $\|\Phi\| = 1$. Равенство $\Phi y = 0$ равносильно тому, что $(y, G \omega_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а это в силу определения скалярного произведения в Y эквивалентно соотношениям

$$(G^{-1}y, \omega_k)_X = \int_0^1 p(t) \frac{d}{dt} (G^{-1}y) \omega'_k(t) dt = - \int_0^1 y(t) \omega_k(t) dt = 0.$$

Уравнение метода Галеркина

$$\int_0^1 [L(x)(t) - y(t)] \omega_j(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

означает поэтому не что иное, как

$$\Phi[Gx - \lambda Tx] = \Phi y,$$

т. е. специальным образом (XIV.2.3) построенное приближенное уравнение.

Для применения результатов § 2 имеем $\mu = 0$. Оценим μ_1 , для чего воспользуемся замечанием в XIV. 2.1 (неравенство (6)), т. е. будем приближать элемент $z = G^{-1}Tx$ с $\|x\| \leq 1$ элементом из $\tilde{X}$ в метрике X . Имеем $Gz = Tx$ или

$$\frac{d}{dt} \left[p \frac{dz}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [qx] + rx.$$

Проинтегрировав это равенство от 0 до $u \leq 1$, найдем

$$\begin{aligned} p(u) z'(u) &= q(u) x(u) + \int_0^u r(t) x(t) dt + C = q(u) \int_0^u x'(t) dt + \\ &+ \int_0^u \left(\int_t^u r(\tau) d\tau \right) x'(t) dt + C = \int_0^1 h(u, t) x'(t) dt + C, \end{aligned}$$

*) Элемент $x = G^{-1}y$ есть решение уравнения $\frac{d}{dt} \left(p \frac{dx}{dt} \right) = y$, удовлетворяющее условиям (24).

где

$$h(u, t) = \begin{cases} q(u) + \int_t^u r(\tau) d\tau & (t \leq u) \\ 0 & (t > u). \end{cases}$$

Чтобы исключить C , проинтегрируем полученное равенство, разделив предварительно обе части на $p(u)$.

$$0 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{p(u)} h(t, u) du \right] x'(t) dt + C \int_0^1 \frac{du}{p(u)}.$$

Определяя отсюда C и подставляя в предыдущее равенство, получим

$$z'(u) = \int_0^1 K(u, t) x'(t) dt,$$

где

$$K(u, t) = \frac{1}{p(u)} h(u, t) - \frac{1}{p(u) \int_0^1 \frac{ds}{p(s)}} \int_0^1 \frac{1}{p(s)} h(s, t) ds.$$

Отметим, что, очевидно,

$$\int_0^1 K(u, t) du = 0 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Ядро $K(u, t)$ допускает аппроксимацию отрезком ряда Фурье по $\{\omega'_j(u)\}$ ($j = 1, 2, \dots$):

$$K_n(u, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \omega'_j(u) \quad \left(\alpha_j(t) = \int_0^1 p(u) K(u, t) \omega'_j(u) du \right),$$

так как к функции $\frac{1}{p(u)}$ ядро ортогонально, и система $\{\omega'_j\}$ ($j = 0, 1, \dots$) полная. Таким образом, монотонно убывая с возрастанием n ,

$$\int_0^1 p(u) [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (29)$$

Определяя $\tilde{x}$ из равенства

$$\tilde{x}'(u) = \int_0^1 K_n(u, t) x'(t) dt = \sum_{j=1}^n c_j \omega'_j(u) \quad \left(c_j = \int_0^1 \alpha_j(t) x'(t) dt \right),$$

мы получим нужное приближение. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \|z - \tilde{x}\|^2 &= \int_0^1 p(u) \left| z'(u) - \tilde{x}'(u) \right|^2 du = \int_0^1 p(u) \left| \int_0^1 [K(u, t) - \right. \\ &\quad \left. - K_n(u, t)] x'(t) dt \right|^2 du \leq \int_0^1 p(t) |x'(t)|^2 dt \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(u, t) - \right. \\ &\quad \left. - K_n(u, t)|^2 p(u) du \right] \frac{dt}{p(t)} = \eta_n^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

где

$$\eta_n^2 = \int_0^1 \frac{dt}{p(t)} \int_0^1 [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 p(u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Аналогичным образом устанавливается малость μ_2 . Нужно доказать аппроксимируемость элемента $z = G^{-1}y$ элементом из $\tilde{X}$. Имеем

$$\frac{d}{dt} \left(p \frac{dz}{dt} \right) = y; \quad p \frac{dz}{dt} = \int y dt = F,$$

при этом F выбирается так, чтобы $\int_0^1 \frac{F(t)}{p(t)} dt = 0$, а тогда $\frac{dz}{dt} = \frac{F}{p}$

может быть аппроксимирована с помощью суммы вида $\sum_{k=1}^n c_k \omega'_k$.

В случае, когда в качестве ω_k фигурируют тригонометрические функции, может быть оценен порядок приближения. Именно, пусть

$$\omega_k(t) = \sin k\pi t \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ядро $K(u, t)$ при этом нужно аппроксимировать суммами вида

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \cos k\pi u,$$

где

$$\alpha_k(t) = 2 \int_0^1 K(u, t) \cos k\pi u du,$$

являясь коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации, имеют порядок $\frac{1}{k}$, а отклонение

$$\int_0^1 [K(u, t) - K_n(u, t)]^2 du = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k(t)|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому $\mu_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Так же легко поверить, что и $\mu_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема 3б (2. XIV) приводит к оценке

$$\|x^* - \tilde{x}_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right),$$

т. е. имеет место сходимость приближенных решений к точному в метрике пространства X , что, в частности, обеспечивает и равномерную сходимость с той же быстротой.

Если дифференциальное выражение $L(x)$ самосопряженное, т. е. если $q=0$, то метод Галеркина совпадает с методом Ритца. Предполагая в этом случае, что функция $p(u)K(u, t)$ имеет первую производную по u , являющуюся функцией ограниченной вариации (это выполняется, если аналогичным свойством обладают функции p и r), получим для коэффициентов Фурье порядок $\frac{1}{k^2}$, что приводит к оценке

$$\mu_1 = O\left(\frac{1}{n \sqrt[n]{n}}\right)$$

и соответствующей оценке быстроты сходимости приближенных решений к точному.

Использование замечания 1 к теореме 3 (1. XIV) в случае, когда возможна хорошая аппроксимируемость решения функциями системы, позволяет получить еще более высокую быстроту сходимости приближенных решений.

§ 6. Применение к граничным задачам для уравнений эллиптического типа

6.1. Мы рассмотрим здесь применение общей теории приближенных методов при приближенном решении граничных задач для некоторых уравнений эллиптического типа. В частности, рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = v \quad (1)$$

в области D , ограниченной кривой Γ , с граничным условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

для случая $m (= 2, 3)$ измерений. При этом рассмотрении наряду с предложениями общей теории нам придется использовать и некоторые факты из математической физики и теории аппроксимации, которые мы приводим без доказательства.

Теорема Гюнтера — Корна. Если u есть решение уравнения

$$\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где Γ — гладкий контур и функция f удовлетворяет условию Липшица с показателем β и постоянной M ($f \in \text{Lip}_M \beta$), то $u(x, y)$

имеет вторые частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с любым показателем $\beta' < \beta$, при этом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in \text{Lip}_{M'\beta'} \quad (M' \leq CM; C = C(\beta, \beta')). \quad *)$$

Как известно, для случая функций одной переменной наличие тех или иных дифференциальных свойств функции обеспечивает возможность ее аппроксимации одновременно с производными алгебраическими или тригонометрическими полиномами. При этом, если функция обращается в нуль на концах промежутка $[a, b]$, то можно добиться того, чтобы аппроксимирующие функции также обращались на концах промежутка в нуль, в частности, в случае аппроксимации алгебраическими полиномами можно потребовать, чтобы они содержали множитель $(t-a)(b-t)$.

Аналогичного характера теоремы имеют место и по отношению к функциям многих переменных. Мы приведем формулировки двух таких теорем: одной, устанавливающей полноту соответствующей системы функций, и другой, дающей характеристику точности аппроксимации.

Теорема о полноте.)** Пусть имеется область D , ограниченная контуром Γ , который определяется уравнением

$$\omega(x, y) = 0,$$

где ω — кусочно непрерывно дифференцируемая функция, и при этом

$$\omega(x, y) > 0 \quad ((x, y) \in D), \quad \text{grad } \omega(x, y) \neq 0 \quad ((x, y) \in \bar{D}). \quad (4)$$

Тогда система функций вида

$$\tilde{u}(x, y) = \omega(x, y) P(x, y) \quad (P — полином)$$

полна в пространстве $\dot{W}_2^{(1)}$ (т. е. в пространстве функций из $W_2^{(1)}$, обращающихся в нуль на Γ).

Теорема Харрик.*)** Пусть функция ω удовлетворяет условиям теоремы о полноте, но при этом k раз непрерывно дифференцируема и ее k -е производные удовлетворяют условию Липшица. Тогда, если функция ω k раз дифференцируема и ее k -е производные удовлетворяют условию Липшица с показателем α , то существует последовательность полиномов P_n не выше n -ой степени таких, что функции ωP_n аппроксимируют ω вместе с ее производными, точнее говоря,

$$\|u - \omega P_n\|_{C(r)} = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha-r}}\right), \quad (5)$$

*) См. [366].

**) См. Канторович и Крылов, стр. 293.

**) См. [114а, 6].

где

$$\|u\|_{C(r)} = \sum_{i=0}^r \sum_{\nu_1+\nu_2=i} \max_D \left| \frac{\partial^i u}{\partial x^{\nu_1} \partial y^{\nu_2}} \right|. \quad (6)$$

6.2. Рассмотрим теперь поставленную в начале параграфа граничную задачу. Приближенное решение ее будем искать в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \omega(x, y) P(x, y), \quad (7)$$

где P — полином степени не выше n , а ω удовлетворяет условиям теоремы Харрик при $k=1$.

Коэффициенты полинома P (в числе N) определяются из системы уравнений

$$\int_D \int (\Delta \tilde{u} + \lambda a \tilde{u}) \zeta_k dx dy = \int_D \int v \zeta_k dx dy \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

(о выборе ζ_k будет сказано несколько ниже).

Введем пространство U функций u дважды непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль на Γ , с метрикой и скалярным произведением, определяемым по формулам

$$\|u\| = \left[\int_D \int |\Delta u|^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \quad (u_1, u_2) = \int_D \int \Delta u_1 \Delta u_2 dx dy.$$

За подпространство $\tilde{U}$ возьмем множество функций вида $\tilde{u}$.

В качестве пространства V примем пространство функций вида $v = \Delta u$ ($u \in U$), иначе говоря, таких v , для которых имеется решение уравнения $\Delta u = v$, принадлежащее U . В пространстве V примем метрику гильбертова пространства L^2_D . За $\tilde{V}$, наконец, возьмем совокупность функций вида $\tilde{v} = \Delta \tilde{u}$ ($\tilde{u} \in \tilde{U}$).

При таких определениях данную граничную задачу можно рассматривать как функциональное уравнение вида

$$Gu + \lambda Tu = v \quad (Gu = \Delta u; Tu = au). \quad (9)$$

При этом метрики в пространствах U и V согласованы так, что G осуществляет изометрическое отображение U на V .

В качестве $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ может быть взята любая линейно независимая система функций в $\tilde{V}$, например,

$$\zeta_{ij} = \Delta [\omega(x, y) x^i y^j] \quad (i+j \leq n).$$

Тогда, если под преобразованием Φ понимать ортогональную проекцию V на $\tilde{V}$, то равенство $\Phi v = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$(v, \zeta_k) = \int_D \int v \zeta_k dx dy = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Поэтому система (8) может быть в новых обозначениях записана в виде

$$\Phi G \tilde{u} - \Phi T \tilde{u} = \Phi v, \quad (10)$$

т. е. приближенное уравнение построено специальным образом, в соответствии с XIV. 2.3, и, таким образом, условие Ib удовлетворено при $\mu = 0$.

Для проверки условия Ib покажем, что для $u \in U$ будет $Tu = au \in \text{Lip } \beta$, где $\beta < 1$ в случае $m = 2$ и $\beta < \frac{1}{2}$, если $m = 3$.

Действительно, так как $u \in U$, то $u \in W_2^{(2)}$. В таком случае по замечанию к теореме вложения (X. 3.4) $u \in \text{Lip } \beta$, где

$$\beta < 1 \quad (m = 2) \quad \beta < \frac{1}{2} \quad (m = 3).$$

Отсюда следует по теореме Гюнтера — Корна, что $z = G^{-1}Tu = \Delta^{-1}au$ имеет вторые производные, принадлежащие $\text{Lip } \beta'$, где $\beta' < \beta$, т. е. опять $\beta' < 1$ для $m = 2$ и $\beta' < \frac{1}{2}$ для $m = 3$. При этом

$$\left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right\|_{\text{Lip } \beta'} \leq C \|u\|.$$

В таком случае по теореме Харрик функция z допускает аппроксимацию вместе со вторыми производными посредством функций вида $\tilde{u}$ порядка $\frac{1}{n^{\beta'}}$, а это обеспечивает оценку

$$\|G^{-1}Tu - \tilde{u}\| \leq \frac{C_1}{n^{\beta'}}.$$

Таким образом, условие Ib выполнено с $\mu_1 = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right)$.

Точно так же, если v принадлежит $\text{Lip } \beta$, в частности если $v \in W_2^{(2)}$, то то же самое рассуждение показывает, что $\mu_2 = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right)$.

Все сказанное позволяет заключить о сходимости в данном случае метода Галеркина с основными функциями указанных видов, причем сходимость имеет место в метрике U :

$$\|u^* - \tilde{u}_n^*\|_U = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right).$$

Отсюда легко заключить о равномерной сходимости функций. Действительно, используя представление u с помощью функции Грина,

имеем

$$\begin{aligned} |u^*(x, y) - \tilde{u}_n^*(x, y)| &= \left| \int_D \int g(x, y) \Delta(u^* - \tilde{u}_n^*) dx dy \right| \leq \\ &\leq \left[\int_D \int |g(x, y)|^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}} \|u^* - \tilde{u}_n^*\| = O\left(\frac{1}{n^{\beta'}}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что если известны большие данные о дифференциальных свойствах решения, то может быть установлена и большая быстрота сходимости.

6.3. Без указания точного порядка быстроты сходимости сам факт сходимости метода Галеркина может быть установлен в значительно более общих условиях.

Рассмотрим граничную задачу для уравнения

$$\Delta u + \lambda \left(au + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \quad (11)$$

при условии

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Будем предполагать коэффициенты a, b, c непрерывно дифференцируемыми функциями.

Разыскиваем решение в той же форме, что и выше, в 6.2. Коэффициенты, как и в 6.2, определяем из системы метода Галеркина

$$\begin{aligned} \int_D \int \left[\Delta \tilde{u} + \lambda \left(a \tilde{u} + b \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \right] \zeta_k dx dy &= \int_D \int v \zeta_k dx dy \\ (k &= 1, 2, \dots, N). \end{aligned}$$

Однако метрику в U в данном случае введем иным образом

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) &= - \int_D \int u_1 \Delta u_2 dx dy = \int_D \int \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] dx dy; \\ \|u\|^2 &= - \int_D \int u \Delta u dx dy = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

В V вводим метрику соответствующим образом, т. е.

$$(v_1, v_2)_V = (G^{-1}v_1, G^{-1}v_2)_U; \quad \|v\|_V = \|G^{-1}v\|_U,$$

т. е. если u_1 и u_2 — решения уравнений $\Delta u = v_1$ и $\Delta u = v_2$, принадлежащие U , то принимаем

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= - \int_D \int u_1 v_2 dx dy = - \int_D \int u_2 v_1 dx dy, \\ \|v_1\|^2 &= - \int_D \int u_1 v_1 dx dy. \end{aligned}$$

Рассматриваемая граничная задача по-прежнему может быть записана в форме одного функционального уравнения в пространстве $\mathbf{U}$:

$$Gu + \lambda Tu = v \quad \left(Gu = \Delta u, \quad Tu = au + b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

а приближенное уравнение принимает вид

$$G\tilde{u} + \lambda \Phi T\tilde{u} = \Phi v.$$

Имея в виду использовать теорему 6 (1. XIV), проверим полную непрерывность операции $G^{-1}T$.

Легко видеть, что пространство $\mathbf{U}$ линейно изометрично плотной части пространства $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в качестве одной из возможных метрик в $\mathbf{W}_2^{(1)}$ взять метрику, определяемую функционалом $\int_{\Gamma} u(x, y) d\Gamma$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{W}_2^{(1)}} &= \left| \int_{\Gamma} u(x, y) d\Gamma \right| + \left\{ \int_D \int_D |\text{grad } u|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_D \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\mathbf{U}}, \end{aligned}$$

поэтому операцию T можно рассматривать как линейную операцию, отображающую пространство $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ в $\mathbf{L}^2$. Но операция Δ^{-1} , рассматриваемая как операция из $\mathbf{L}^2$ в $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(2)}$, — линейна (XIII. 6.5.). *) Следовательно, $\Delta^{-1}T \in [\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)} \rightarrow \mathring{\mathbf{W}}_2^{(2)}]$. Операция вложения $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(2)}$ в $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ вполне непрерывна (X. 3.5), следовательно $\Delta^{-1}T$, рассматриваемая как операция из $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$ в $\mathring{\mathbf{W}}_2^{(1)}$, также вполне непрерывна.

По теореме о полноте последовательность проекций $P_n = G^{-1}\Phi G$ сходится к тождественной операции на $\mathbf{U}$. Таким образом, применима теорема 6 (1. XIV) на основании которой и можно заключить о сходимости метода Галеркина в пространстве $\mathbf{U}$. Отсюда может быть получена и равномерная сходимость приближенных решений к точному.

*) Хотя фактически в XIII.6.5. рассмотрен случай, когда область D — круг, все сказанное там справедливо и тогда, когда область D ограничена произвольной, кусочно-гладкой кривой Γ .

Отметим, что приведенные рассуждения без каких-либо дополнительных соображений могут быть использованы и для случая, когда число независимых переменных задачи более двух.

Как уже упоминалось (см. примечание на стр. 526), впервые сходимость метода Галеркина была установлена в [51]. Ряд теорем о сходимости метода Галеркина и других методов приближенного решения функциональных уравнений имеется в [796] (см. также Михлин). Дальнейшее развитие в [24]. Исследование метода Галеркина на основе общей теории приближенных методов проведено в [38].

Другие приложения теорем §§ 1—2 или аналогичного подхода к конкретным задачам имеются в работах [131], [134], [142] (сингулярные интегральные уравнения), [144] (анализ разностных методов), [130] (интегродифференциальные уравнения).

ГЛАВА XV

МЕТОД НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

В этой главе изучается один из вариационных методов решения функциональных уравнений — метод наискорейшего спуска. Как и во всяком вариационном методе, в методе наискорейшего спуска задача нахождения решения уравнения сводится к задаче разыскания минимума некоторого функционала (нелинейного). Для определения минимума используется процесс последовательных приближений такого рода, что переход от одного приближения к следующему осуществляется по направлению наискорейшего убывания данного функционала. Отсюда и происходит название метода.

Идея метода наискорейшего спуска восходит еще к Коши, который рассмотрел метод в случае конечномерного пространства. В общем случае метод наискорейшего спуска разработан Л. В. Канторовичем (см. [45в] и Канторович). При доказательстве общих теорем, приводимых ниже (§ 1 и 2), использованы работы [13а, 6]. Некоторые видоизменения метода наискорейшего спуска рассмотрены в работах [49], [59], [63], [117], [140], [145]. Применение метода наискорейшего спуска к решению эллиптических дифференциальных уравнений (§ 3) — [120].

§ 1. Решение линейных уравнений

1.1. Как уже упоминалось, метод наискорейшего спуска есть, строго говоря, метод нахождения минимума некоторого функционала. Пусть Φ — вещественный (нелинейный) функционал, заданный в нормированном пространстве X . Предположим, что значения функционала Φ ограничены снизу, и поставим задачу о разыскании элемента $x^* \in X$ (если такой существует), доставляющего наименьшее значение функционалу Φ :

$$\Phi(x) \geq \Phi(x^*) \quad (x \in X).$$

Распространенный метод решения этой задачи состоит в том, что находят последовательность $\{x_n\}$, «минимизирующую» функционал Φ в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \inf_{x \in X} \Phi(x).$$

Часто при этом удается доказать, что сама последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу x^* , который, если предполагать непрерывность функционала Φ , и является решением задачи.

Метод наискорейшего спуска для решения указанной задачи состоит в следующем. Пусть x_0 — фиксированный элемент из X . Рассмотрим луч, исходящий из точки x_0 , т. е. совокупность элементов вида $x_0 + \alpha z$, где α — вещественное неотрицательное число, а $z \neq 0$ — элемент из X , характеризующий направление луча. Рассмотрение функционала Φ на данном луче равносильно рассмотрению вещественной функции

$$\varphi(\alpha; x_0, z) = \Phi(x_0 + \alpha z) \quad (\alpha \geq 0).$$

Производной функционала Φ по направлению z (в точке x_0) естественно при этом назвать выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\|z\|} \left. \frac{\partial \varphi(\alpha; x_0, z)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{\|z\|} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\Phi(x_0 + hz) - \Phi(x_0)}{h}.$$

Считая, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ существует для каждого направления, предположим, кроме того, что имеется направление $\bar{z}$, по которому эта производная наименьшая. Указанное направление называется направлением *антиградиента* (в точке x_0) функционала Φ .

Предположим, что $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} < 0$ и что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ непрерывна вдоль луча, направленного из x_0 по $\bar{z}$. При этих условиях функция $\varphi(\alpha; x_0, \bar{z})$ убывает по крайней мере для достаточно малых α . Если обозначить через ε_1 наименьший (положительный) корень уравнения

$$\varphi'(\alpha; x_0, \bar{z}) = 0,$$

то в промежутке $[0, \varepsilon_1]$ можно гарантировать убывание функции φ . Тем самым по направлению $\bar{z}$ функционал Φ убывает по крайней мере до точки

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 \bar{z}.$$

Продельвая те же операции с элементом x_1 (вместо x_0), придем к элементу x_2 и т. д., в результате чего получим последовательность $\{x_n\}$, которая в ряде случаев оказывается минимизирующей. Описанная конструкция и составляет принципиальную схему метода наискорейшего спуска.

Аналогичная схема может быть использована и в случае, когда разыскивается наибольшее значение ограниченного сверху функционала. При этом вместо направления антиградиента надо рассматривать направление «градиента».

1.2. Связь задачи о минимуме функционала с задачей решения линейного функционального уравнения устанавливается следующим образом.

Пусть U — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Обозначая, как всегда, через m и M границы оператора U (см. IX. 4. 3), будем предполагать, что $m > 0$, и рассмотрим уравнение

$$Ux = y. \quad (1)$$

Так как $\lambda = 0$ не принадлежит спектру оператора U , то существует обратный оператор U^{-1} (теорема 3 (5. IX)), поэтому уравнение (1) имеет единственное решение $x^* = U^{-1}y$, каков бы ни был элемент $y \in H$.

Образую далее функционал

$$F(x) = (Ux, x) - [(x, y) + (y, x)] \quad (x \in H). \quad (2)$$

Теорема 1 (1. XV). *Решение x^* уравнения (1) доставляет минимум функционалу (2). Наоборот, если элемент $\tilde{x}$ обращает в минимум функционал (2), то $\tilde{x}$ есть решение уравнения (1), т. е. $\tilde{x} = x^*$.*

Доказательство. Так как $y = Ux^*$, то функционал F можно записать в форме

$$\begin{aligned} F(x) &= (Ux, x) - (x, Ux^*) - (Ux^*, x) = \\ &= (U(x - x^*), x - x^*) - (Ux^*, x^*). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда

$$F(x) \geq m(x - x^*, x - x^*) - (Ux^*, x^*) \geq -(Ux^*, x^*) = F(x^*),$$

т. е. x^* минимизирует функционал F .

Из этого же неравенства вытекает и вторая часть теоремы, так как

$$0 = F(\tilde{x}) - F(x^*) = (U(\tilde{x} - x^*), \tilde{x} - x^*) \geq m(\tilde{x} - x^*, \tilde{x} - x^*)$$

и, следовательно, $\tilde{x} = x^*$.

З а м е ч а н и е. Если существование решения x^* известно, то, как видно из доказательства теоремы, условие $m > 0$ можно заменить более слабым, предполагая лишь, что $(Ux, x) > 0$ для любого $x \neq 0$.

1.3. Применение метода наискорейшего спуска к функционалу (2) приводит к последовательности, сходящейся к x^* — решению уравнения (1), что позволяет рассматривать указанный метод как метод приближенного решения уравнения (1).

Выясним схему метода наискорейшего спуска применительно к функционалу (2).

Если $x, z \in H$, то

$$\begin{aligned} F(x+z) &= (U(x+z), x+z) - [(x+z, y) + (y, x+z)] = \\ &= (Ux, x) - [(x, y) + (y, x)] + [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] + \\ &+ (Uz, z) = F(x) + [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] + (Uz, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\|z\|} [(Ux - y, z) + (z, Ux - y)] = \frac{2\operatorname{Re}(Ux - y, z)}{\|z\|}.$$

Таким образом, направление антиградиента в точке x_0 дается элементом $(-z_1)$, где

$$z_1 = Ux_0 - y.$$

Для нахождения величины ε_1 составляем уравнение

$$\varphi'(\alpha; x_0, -z_1) = 0,$$

где в силу (4)

$$\varphi(\alpha; x_0, -z_1) = F(x_0 - \alpha z_1) = F(x_0) - 2\alpha(z_1, z_1) + \alpha^2(Uz_1, z_1).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_1 = \frac{(z_1, z_1)}{(Uz_1, z_1)}.$$

Окончательно

$$x_1 = x_0 - \varepsilon_1 z_1.$$

Точно так же

$$x_2 = x_1 - \varepsilon_2 z_2 \quad \left(z_2 = Ux_1 - y; \varepsilon_2 = \frac{(z_2, z_2)}{(Uz_2, z_2)} \right)$$

и вообще

$$x_n = x_{n-1} - \varepsilon_n z_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$z_n = Ux_{n-1} - y; \quad \varepsilon_n = \frac{(z_n, z_n)}{(Uz_n, z_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Построенная последовательность $\{x_n\}$ является минимизирующей. Более того, справедлива

Теорема 2 (I.XV). Последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x^* . Быстрота сходимости дается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \quad \left(n = 0, 1, \dots; C = \frac{\|z_1\|}{m} \right). \quad (5)$$

Доказательство. Преобразуем уравнение (1), записав его в виде

$$x = x - kUx + ky. \quad (6)$$

Числовой множитель $k > 0$ выберем таким образом, чтобы оператор

$$T = I - kU$$

имел возможно меньшую норму. Так как границы оператора T будут $1 - km$ (верхняя) и $1 - kM$ (нижняя), то минимум нормы будет, если

$$1 - km = -(1 - kM),$$

откуда

$$k = \frac{2}{M+m}.$$

При этом

$$\|T\| = 1 - km = kM - 1 = \frac{M-m}{M+m}. \quad (7)$$

Обозначим

$$\tilde{x}_1 = Tx_0 + ky = x_0 - k(Ux_0 - y) = x_0 - kz_1. \quad (8)$$

Введем теперь оператор $V = U^{\frac{1}{2}}$ (см. теорему (4.2. V)). Используя (3), можно записать функционал F в форме

$$F(x) = (U(x - x^*), x - x^*) - (Ux^*, x^*) = \\ = (V(x - x^*), V(x - x^*)) - (Vx^*, Vx^*) = \|V(x - x^*)\|^2 - \|Vx^*\|^2. \quad (9)$$

Но ввиду очевидного неравенства $F(\tilde{x}_1) \geq F(x_1)$ имеем

$$F(x_1) - F(x^*) \leq F(\tilde{x}_1) - F(x^*),$$

что можно переписать, используя (9), и так:

$$\|V(x_1 - x^*)\| \leq \|V(\tilde{x}_1 - x^*)\|, \quad (10)$$

Уравнение (6) равносильно уравнению (1). Поэтому

$$x^* = Tx^* + ky.$$

Вычитая это из равенства (8), получим

$$\tilde{x}_1 - x^* = T(x_0 - x^*),$$

и, следовательно,

$$V(\tilde{x}_1 - x^*) = TV(x_0 - x^*),$$

откуда

$$\|V(\tilde{x}_1 - x^*)\| \leq \|T\| \|V(x_0 - x^*)\| = \frac{M-m}{M+m} \|V(x_0 - x^*)\|.$$

Сравнивая это с (10), будем иметь

$$\|V(x_1 - x^*)\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|V(x_0 - x^*)\|. \quad (11)$$

Проведя аналогичные рассуждения для каждого $n = 1, 2, \dots$, приходим к неравенствам

$$\|V(x_n - x^*)\| \leq \frac{M-m}{M+m} \|V(x_{n-1} - x^*)\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В конце концов получаем

$$\|V(x_n - x^*)\| \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|V(x_0 - x^*)\| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Так как функция $t^{-\frac{1}{2}}$ непрерывна в $[m, M]$ и тем более на спектре оператора U , то существует обратный оператор V^{-1} (см. теорему 2 (5. IX)). При этом

$$\|V^{-1}\| = \max_{t \in S_U} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Отметим еще, что

$$\|V\| = \max_{t \in S_U} \sqrt{t} = \sqrt{M}.$$

В силу сказанного находим, используя (12)

$$\begin{aligned}\|x_n - x^*\| &= \|V^{-1}V(x_n - x^*)\| \leq \|V^{-1}\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|V(x_0 - x^*)\| \leq \\ &\leq \|V^{-1}\| \|V\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|x_0 - x^*\| = \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \|x_0 - x^*\|.\end{aligned}$$

Полученная оценка неудобна тем, что в правую часть ее входит неизвестный элемент x^* . Чтобы избежать этого, заметим, что

$$\|V(x_0 - x^*)\| = \|V^{-1}U(x_0 - x^*)\| \leq \|V^{-1}\| \|Ux_0 - y\| = \frac{\|z_1\|}{\sqrt{m}}.$$

Это позволяет написать

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что совпадает с (5).

Теорема доказана.

1.4. Выразим p -е приближение x_p через x_0 и z_1 . Имеем

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - \varepsilon_2 z_2 = x_1 - \varepsilon_2 (Ux_1 - y) = x_0 - \varepsilon_1 z_1 - \varepsilon_2 (Ux_0 - y - \varepsilon_1 U z_1) = \\ &= x_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 U z_1 = x_0 + \lambda_1^{(2)} z_1 + \lambda_2^{(2)} U z_1.\end{aligned}$$

По индукции без труда докажем, что

$$x_p = x_0 + \lambda_1^{(p)} z_1 + \dots + \lambda_p^{(p)} U^{p-1} z_1. \quad (13)$$

Рассмотрим элемент

$$\bar{x}_1 = x_0 + \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p U^{p-1} z_1$$

и определим комплексные коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ из условия, чтобы функционал $F(\bar{x}_1)$ был минимален. Так как

$$\begin{aligned}F(\bar{x}_1) &= \left(Ux_0 + \sum_{j=1}^p \lambda_j U^j z_1, x_0 + \sum_{j=1}^p \lambda_j U^{j-1} z_1 \right) - [(\bar{x}_1, y) + (y, \bar{x}_1)] = \\ &= F(x_0) + \sum_{j=1}^p (\lambda_j + \bar{\lambda}_j) (U^{j-1} z_1, z_1) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \lambda_j \bar{\lambda}_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1),\end{aligned}$$

то, обозначая $\lambda_k = \sigma_k + \tau_k i$ ($k = 1, 2, \dots, p$), получим для определения λ_k две системы равенств

$$\frac{\partial F(\bar{x}_1)}{\partial \sigma_j} = 0, \quad \frac{\partial F(\bar{x}_1)}{\partial \tau_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

т. е. в развернутом виде

$$\begin{aligned}(U^{j-1} z_1, z_1) + \sum_{k=1}^p \sigma_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^p \tau_k (U^j z_1, U^{k-1} z_1) &= 0.\end{aligned}$$

Умножая второе равенство на i и складывая с первым, и принимая во внимание, что $(U^j z_1, U^{k-1} z_1) = (U^{j+k-1} z_1, z_1)$, можем объединить написанные системы в одну

$$(U^{j-1} z_1, z_1) + \sum_{k=1}^p \lambda_k (U^{j+k-1} z_1, z_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots; p). \quad (14)$$

Поскольку искомый минимум, очевидно, существует, указанная система имеет решение.*)

Исходя из элемента $\bar{x}_1$, строим подобным же образом элемент $\bar{x}_2$ и т. д., в результате чего приходим к последовательности $\bar{x}_0 = x_0, \bar{x}_1, \dots$, которая соответствует p -шаговому варианту метода наискорейшего спуска.

Из способа построения последовательности p -шагового процесса ясно, что сходимость ее к x^* будет по крайней мере в p раз быстрее, чем у последовательности $\{x_n\}$. Действительно, используя доказательство теоремы 2, нетрудно проверить, что

$$\|\bar{x}_n - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left[\left(\frac{M-m}{M+m} \right)^p \right]^n. \quad (15)$$

Однако, как и следует ожидать, фактически сходимость еще более быстрая.

Теорема 3 (1. XV) (Бирман) *Справедлива оценка*

$$\|\bar{x}_n - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \left[\frac{1}{\vartheta_p \left(\frac{M+m}{M-m} \right)} \right]^n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

где $\vartheta_p(t)$ — полином Чебышёва степени p :

$$\vartheta_p(t) = \cos p \arccos t \quad (\text{при } t \in [-1, 1]).$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$x = Tx + \bar{y} \quad (T = I - U\varphi(U); \bar{y} = \varphi(U)y), \quad (17)$$

где $\varphi(t)$ — полином степени $p-1$.

Обозначим

$$\tilde{x}_1 = Tx_0 + \bar{y} = x_0 - \varphi(U)(Ux_0 - y) = x_0 - \varphi(U)z_1 = x_0 + \sum_{k=1}^p c_k U^{k-1} z_1.$$

Ясно, что $F(\tilde{x}_1) \geq F(\bar{x}_1)$, а тогда, повторяя рассуждения теоремы 2, получим

$$\|\bar{x}_n - x^*\| \leq \frac{\|z_1\|}{m} \|T\|^n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

*) Хотя это решение может быть не единственно. Следует отметить, однако, что величина $F(\bar{x}_1)$ не зависит от выбора того или иного решения.

Так как

$$\|T\| \leq \max_{t \in [m, M]} |1 - t\varphi(t)|,$$

то естественно определить полином $\varphi(t)$ из условия, чтобы $\max_{t \in [m, M]} |1 - t\varphi(t)|$ был минимален. Если обозначить $\psi(t) = 1 - t\varphi(t)$, то $\psi(t)$ будет полиномом p -й степени, наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $[m, M]$, причем $\psi(0) = 1$. Как известно, *)

$$\psi(t) = \frac{\vartheta_p\left(\frac{2t - M - m}{M - m}\right)}{\vartheta_p\left(\frac{M + m}{M - m}\right)}.$$

Ввиду того, что

$$\max_{t \in [m, M]} \left| \vartheta_p\left(\frac{2t - M - m}{M - m}\right) \right| = \max_{t \in [-1, 1]} |\vartheta_p(t)| = 1,$$

для $\|T\|$ получаем оценку

$$\|T\| \leq \max_{t \in [m, M]} |\psi(t)| = \frac{1}{\vartheta_p\left(\frac{M + m}{M - m}\right)},$$

а это в силу (18) доказывает теорему.

Замечание 1. Пусть $\rho(t)$ — произвольный полином степени p . Тогда справедливо неравенство (Натансон-I, стр. 78)

$$|\rho(t_0)| \leq |\vartheta_p(t_0)| \max_{t \in [-1, 1]} |\rho(t)| \quad (|t_0| > 1).$$

Взяв здесь $\rho(t) = t^p$, $t_0 = \frac{M + m}{M - m}$, будем иметь

$$\frac{1}{\vartheta_p\left(\frac{M + m}{M - m}\right)} \leq \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^p.$$

Таким образом, (15) является следствием оценки (16).

Замечание 2. Так как

$$\frac{\vartheta_p(t)}{t^p} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{p-1}},$$

то, если $\frac{M + m}{M - m}$ достаточно велико, оценка (16) отличается от оценки (15) множителем, близким к $\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$.

В работе [141a] при некоторых дополнительных предположениях о спектре оператора U получена более точная по сравнению с (16) оценка.

*) См. В. Л. Гончаров. Интерполирование и приближение непрерывных функций. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1954, стр. 230.

§ 2. Нахождение собственных значений вполне непрерывных операторов

2.1. Рассмотрим теперь вполне непрерывный самосопряженный оператор U . Будем предполагать, не умаляя общности, что $M > |m| \geq 0$ (см. IX. 4.3). Тогда

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x) = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ux, x)}{(x, x)} = \frac{(Ux^*, x^*)}{(x^*, x^*)},$$

где x^* — собственный элемент, отвечающий наибольшему собственному значению $\lambda_1 = M$. Таким образом, λ_1 есть наибольшее значение функционала

$$L(x) = \frac{(Ux, x)}{(x, x)}$$

и, согласно IX. 4.3, каждый элемент, реализующий максимум, является собственным элементом.

Для нахождения максимума функционала L применим метод наискорейшего спуска. *) Возьмем произвольный нормированный элемент $x_0 \in H$. Так как

$$L(x_0 + \alpha z) = \frac{(Ux_0, x_0) + \alpha(Ux_0, z) + \alpha(z, Ux_0) + \alpha^2(Uz, z)}{1 + \alpha(x_0, z) + \alpha(z, x_0) + \alpha^2(z, z)}, \quad (1)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z}(x_0) &= \frac{[(Ux_0, z) + (z, Ux_0)] - [(x_0, z) + (z, x_0)](Ux_0, x_0)}{\|z\|^3} = \\ &= \frac{(Ux_0 - \mu_0 x_0, z) + (z, Ux_0 - \mu_0 x_0)}{\|z\|^2}, \end{aligned}$$

где через μ_0 обозначена величина

$$\mu_0 = L(x_0) = (Ux_0, x_0).$$

Из выражения $\frac{\partial L}{\partial z}(x_0)$ ясно, что направление «градиента» дается элементом $z_1 = Ux_0 - \mu_0 x_0$ (считаем $z_1 \neq 0$).

Таким образом, ε_1 определится из уравнения

$$\varphi'(\alpha; x_0, z_1) = 0, \quad (2)$$

где

$$\varphi(\alpha; x_0, z_1) = L(x_0 + \alpha z_1).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (x_0, z_1) &= (x_0, Ux_0 - \mu_0 x_0) = (x_0, Ux_0) - \mu_0(x_0, x_0) = 0, \\ (Ux_0, z_1) &= (\mu_0 x_0 + z_1, z_1) = \mu_0(x_0, z_1) + (z_1, z_1) = (z_1, z_1), \end{aligned}$$

*) Точнее говоря, метод «наискорейшего подъема».

после элементарных преобразований запишем уравнение (2) в виде

$$\frac{2 \{ (z_1, z_1) + [(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] \alpha - (z_1, z_1)^2 \alpha^2 \}}{[1 + \alpha^2 (z_1, z_1)]^2} = 0.$$

Итак, ε_1 есть положительный корень уравнения

$$(z_1, z_1)^2 \alpha^2 - [(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] \alpha - (z_1, z_1) = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon_1 = \frac{[(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)] + \sqrt{[(Uz_1, z_1) - \mu_0(z_1, z_1)]^2 + 4(z_1, z_1)^3}}{2(z_1, z_1)^2}.$$

Полагая

$$x^{(1)} = x_0 + \varepsilon_1 z_1,$$

мы в качестве следующего приближения берем элемент

$$x_1 = \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\|x_0 + \varepsilon_1 z_1\|}.$$

Продельвая с элементом x_1 те же операции и продолжая так дальше, получим последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

$$x_n = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|}, \quad x^{(n)} = x_{n-1} + \varepsilon_n z_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $(n = 1, 2, \dots)$

$$z_n = Ux_{n-1} - \mu_{n-1}x_{n-1}, \quad \mu_{n-1} = L(x_{n-1}) = (Ux_{n-1}, x_{n-1}),$$

$$\varepsilon_n = \frac{[(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)] + \sqrt{[(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)]^2 + 4(z_n, z_n)^3}}{2(z_n, z_n)^2}.$$

2.2. Относительно сходимости последовательности $\{\mu_n\}$ к λ_1 и последовательности $\{x_n\}$ к соответствующему собственному элементу имеет место

Теорема 1 (2. XV). Если элемент x_0 не ортогонален собственному подпространству, отвечающему наибольшему собственному значению $\lambda_1 = M$, то $\mu_n \rightarrow \lambda_1$ и $x_n \rightarrow x^*$, где x^* — собственный элемент, принадлежащий собственному значению λ_1 .

Доказательство. Обозначим через λ_k ($k = 1, 2, \dots$) различные собственные значения оператора U , через $H_{\lambda_k} = H_k$ соответствующие собственные подпространства и через P_k проекторы на эти подпространства. Положим далее

$$x_k^* = \frac{P_k x_0}{\|P_k x_0\|}. \quad *)$$

Имеем, согласно IX. 4.5

$$x_0 = \sum_k P_k x_0 = \sum_k \|P_k x_0\| x_k^* = \sum_k c_{0k} x_k^* \quad (c_{0k} = \|P_k x_0\|, \quad k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

*) Если $P_k x_0 = 0$, то $x_k^* = 0$.

Ясно, что $c_{0k} \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$), и по условию теоремы $c_{01} > 0$. Поскольку слагаемые в правой части (3) попарно ортогональны, а $\|x_k^*\| = 1$, то

$$\sum_k c_{0k}^2 = \|x_0\|^2 = 1,$$

и, наконец,

$$\mu_0 = (Ux_0, x_0) = \sum_k \lambda_k c_{0k}^2 \quad (\mu_0 \leq \lambda_1).$$

Элемент x_1 также можно выразить через элементы $x_1^*, x_2^*, \dots$. Действительно,

$$x_1 = \frac{x^{(1)}}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\|x^{(1)}\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 (Ux_0 - \mu_0 x_0)}{\|x^{(1)}\|}.$$

А так как

$$Ux_0 = \sum_k \lambda_k c_{0k} x_k^*,$$

то

$$x_1 = \sum_k c_{1k} x_k^* \quad \left(c_{1k} = \frac{[1 + \varepsilon_1 (\lambda_k - \mu_0)] c_{0k}}{\|x^{(1)}\|}, k = 1, 2, \dots \right).$$

Так же, как и выше,

$$\sum_k c_{1k}^2 = 1, \quad \mu_1 = \sum_k \lambda_k c_{1k}^2, \quad c_{11} > 0.$$

Вообще

$$x_n = \sum_k c_{nk} x_k^* \quad \left(c_{nk} = \frac{[1 + \varepsilon_n (\lambda_k - \mu_{n-1})] c_{n-1,k}}{\|x^{(n)}\|}, k, n = 1, 2, \dots \right), \quad (4)$$

причем

$$\sum_k c_{nk}^2 = 1, \quad \mu_n = \sum_k \lambda_k c_{nk}^2; \quad c_{n1} > 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (5)$$

Выразим μ_n через μ_{n-1} . В соответствии с формулой (1) имеем

$$\begin{aligned} \mu_n &= L(x_n) = L(x^{(n)}) = L(x_{n-1} + \varepsilon_n z_n) = \\ &= \frac{(Ux_{n-1}, x_{n-1}) + 2\varepsilon_n (Ux_{n-1}, z_n) + \varepsilon_n^2 (Uz_n, z_n)}{1 + 2\varepsilon_n (x_{n-1}, z_n) + \varepsilon_n^2 (z_n, z_n)}. \end{aligned}$$

Но

$$(x_{n-1}, z_n) = (x_{n-1}, Ux_{n-1} - \mu_{n-1} x_{n-1}) = 0,$$

$$(Ux_{n-1}, z_n) = (\mu_{n-1} x_{n-1} + z_n, z_n) = (z_n, z_n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{\mu_{n-1} + 2\varepsilon_n(z_n, z_n) + \varepsilon_n^2(Uz_n, z_n)}{1 + \varepsilon_n^2(z_n, z_n)} = \\ &= \mu_{n-1} + \frac{2\varepsilon_n(z_n, z_n) + \varepsilon_n^2[(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)]}{1 + \varepsilon_n^2(z_n, z_n)}.\end{aligned}$$

При этом ε_n удовлетворяет уравнению

$$(z_n, z_n)^2 \varepsilon_n^2 - [(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)] \varepsilon_n - (z_n, z_n) = 0, \quad (6)$$

так что

$$\varepsilon_n^2 [(Uz_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)] = \varepsilon_n^3 (z_n, z_n)^2 - \varepsilon_n (z_n, z_n).$$

Учитывая это, получаем

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \frac{2\varepsilon_n(z_n, z_n) + \varepsilon_n^3(z_n, z_n)^2 - \varepsilon_n(z_n, z_n)}{1 + \varepsilon_n^2(z_n, z_n)},$$

откуда окончательно

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \varepsilon_n(z_n, z_n). \quad (7)$$

Поскольку $\varepsilon_n > 0$, то $\mu_n > \mu_{n-1}$ и, следовательно, ввиду ограниченности последовательности $\{\mu_n\}$ ($\mu_n \leq \lambda_1$), она имеет предел, который мы обозначим через μ :

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n.$$

Из (7) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(z_n, z_n) = 0, \quad (8)$$

а вследствие соотношения

$$|\varepsilon_n(Uz_n, z_n)| \leq \|U\| \varepsilon_n(z_n, z_n)$$

имеем также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(Uz_n, z_n) = 0. \quad (9)$$

Учитывая (8) и (9), получим, переходя к пределу в уравнении (6),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n, z_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [Ux_n - \mu_n x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0. \quad (10)$$

Поскольку оператор U вполне непрерывный, а последовательность $\{x_n\}$ ограничена, существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$ такая,

что $\{Ux_{n_j}\}$ сходится. Из соотношения (10) вытекает, что и последовательность $\{x_{n_j}\}$ сходящаяся. Пусть $x_{n_j} \rightarrow \tilde{x}$. Переходя к пределу в равенстве

$$Ux_{n_j} - \mu_{n_j}x_{n_j} = z_{n_j+1},$$

найдем

$$U\tilde{x} - \mu\tilde{x} = 0.$$

Таким образом, μ является собственным значением, а $\tilde{x}$ — соответствующим собственным элементом. Покажем, что $\mu = \lambda$, а $\tilde{x} = x_1^*$. Предположим, что $\mu = \lambda_s$ ($s > 1$). Учитывая (4), будем иметь

$$\tilde{x} = \sum_k c_k x_k^* \quad (c_k = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j k}, \quad k = 1, 2, \dots).$$

Но $(\tilde{x}, x_k^*) = 0$ ($k \neq s$), поэтому $\tilde{x} = c_s x_s^*$, причем $|c_s| = 1$. Поскольку $c_{ns} \geq 0$, то окончательно находим $c_s = 1$ и $\tilde{x} = x_s^*$.

Рассмотрим отношение $\frac{c_{ns}}{c_{n1}}$. В соответствии с (4) имеем

$$\frac{c_{ns}}{c_{n1}} = \frac{1 + \varepsilon_n(\lambda_s - \mu_{n-1})}{1 + \varepsilon_n(\lambda_1 - \mu_{n-1})} \cdot \frac{c_{n-1, s}}{c_{n-1, 1}} < \frac{c_{n-1, s}}{c_{n-1, 1}},$$

т. е. рассмотренное отношение убывает с увеличением n . Но $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j s} = c_s = 1$, и поэтому $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j 1} = c_1 = 0$, вследствие чего

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{c_{n_j s}}{c_{n_j 1}} = \infty,$$

что, однако, противоречит установленному выше. Таким образом $\mu = \lambda_1$, $\tilde{x} = x_1^*$.

Докажем теперь сходимость всей последовательности $\{x_n\}$ к x_1^* . Пусть d — расстояние от точки λ_1 до остальной части спектра оператора U . Имеем

$$\begin{aligned} \|x_n - x_1^*\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x_1^*\|^2 - (x_n, x_1^*) - (x_1^*, x_n) = 2(1 - c_{n1}) \leq \\ &\leq 2(1 - c_{n1}^2) = 2 \sum_{k \geq 2} c_{nk}^2 \leq \frac{2}{d} \sum_k (\lambda_1 - \lambda_k) c_{nk}^2. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (23)

$$\sum_k (\lambda_1 - \lambda_k) c_{nk}^2 = \lambda_1 \sum_k c_{nk}^2 - \sum_k \lambda_k c_{nk}^2 = \lambda_1 - \mu_n,$$

то

$$\|x_n - x_1^*\|^2 \leq \frac{2}{d} (\lambda_1 - \mu_n) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (11)$$

Если принять во внимание, что $\mu_n \rightarrow \lambda_1$, то отсюда и следует, что $x_n \rightarrow x_1^*$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Относительно быстроты сходимости $\mu_n \rightarrow \lambda_1$ может быть установлен следующий факт:

$$\lambda_1 - \mu_n \leq q^2 (1 + \alpha_n) (\lambda_1 - \mu_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$q = \frac{M - m - d}{M - m + d},$$

а последовательность $\{\alpha_n\}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Таким образом, если n настолько велико, что $q(1 + \alpha_n) < 1$, быстрота сходимости характеризуется геометрической прогрессией.

С помощью оценки (11) можно охарактеризовать и быстроту сходимости $x_n \rightarrow x_1^*$.

По поводу применения метода наискорейшего спуска к разысканию собственных значений см. [141б].

§ 3. Применение к эллиптическим дифференциальным уравнениям

3.1. Рассмотрим применение метода наискорейшего спуска к решению эллиптического дифференциального уравнения. Для простоты рассмотрим граничную задачу для самосопряженного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными для случая замкнутого круга D (с центром в начале координат); ограниченного окружностью S :

$$Lx \equiv -\frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial x}{\partial t} \right) + cx = \varphi, \quad x|_S = 0; \quad (1)$$

коэффициенты a и b данного уравнения предполагаются непрерывно-дифференцируемыми функциями; функции c и φ — непрерывными; кроме того, будем считать, что $a, b > 0$; $c \geq 0$ в круге D .

Применим к обеим частям рассматриваемого уравнения оператор $-\Delta^{-1}$. Получим новое уравнение

$$Ux \equiv -\Delta^{-1}Lx = \psi \quad (\psi = -\Delta^{-1}\varphi), \quad (2)$$

которое будем решать в подпространстве $\dot{W}_2^{(1)}$ функций из $W_2^{(1)}(D)$, обращающихся в нуль на S . Отметим, что, как показано в XIII. 6. 5, оператор Δ^{-1} является линейным оператором, отображающим пространство L^2 на $\dot{W}_2^{(2)}$, так, что $\psi \in \dot{W}_2^{(2)}$.

Проверим, что для оператора $U = -\Delta^{-1}L$ выполнены условия § 1. Пусть x — дважды непрерывно-дифференцируемая функция из $\dot{W}_2^{(1)}$. Так как Lx есть непрерывная функция, то $y = Ux = -\Delta^{-1}Lx \in \dot{W}_2^{(2)} \subset \dot{W}_2^{(1)}$.

Применяя два раза формулу Грина, получим

$$\begin{aligned}
 (Ux, x) &= (-\Delta Lx, x) = (y, x) = \int_D \int \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} \right) ds dt = \\
 &= - \int_D \int x \left[\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] ds dt = - \int_D \int x \Delta y ds dt = \\
 &= \int_D \int x \left[-\frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(b \frac{\partial x}{\partial t} \right) + cx \right] ds dt = \\
 &= \int_D \int \left[a \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + b \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + cx^2 \right] ds dt.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Это соотношение дает

$$(Ux, x) \geq \alpha \int_D \int \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = \alpha(x, x), \quad (4)$$

где

$$\alpha = \min [\min a(s, t), \min b(s, t)] \quad ((s, t) \in D).$$

Так как на основании теоремы вложения (теорема 3(3. X))

$$\int_D \int |x(s, t)|^2 ds dt \leq A \|x\|^2_{\dot{W}_2^{(1)}},$$

то, используя это в (3), найдем

$$(Ux, x) \leq \beta \int_D \int \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = \beta(x, x), \quad (5)$$

где

$$\beta = 2 \max [\max a(s, t), \max b(s, t), A \max c(s, t)] \quad ((s, t) \in D).$$

Далее, рассуждая так же, как и при выводе (3), приходим к равенству

$$(Ux, y) = (x, Uy), \quad (6)$$

справедливому для любых дважды непрерывно-дифференцируемых функций $x, y \in \dot{W}_2^{(1)}$. Сопоставляя (4), (5) и (6), получаем, что оператор U , рассматриваемый на множестве дважды непрерывно-дифференцируемых функций из $\dot{W}_2^{(1)}$, ограничен, а тогда, поскольку указанное множество функций плотно в $\dot{W}_2^{(1)}$, он будет ограниченным и в $\dot{W}_2^{(1)}$. Соотношения (4), (5) и (6) распространяются при этом на все пространство $\dot{W}_2^{(1)}$. Таким образом, U является самосопряженным оператором, причем для его границ m и M имеем оценки

$$m \geq \alpha > 0, \quad M \leq \beta. \quad (7)$$

Применим к уравнению (2) метод наискорейшего спуска. Если $x_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}$ — начальное приближение, то последовательные приближения x_n находятся по формулам из XV. 1.3

$$x_n = x_{n-1} - \varepsilon_n z_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$z_n = Ux_{n-1} - \varphi = \Delta^{-1}(Lx_{n-1} - \varphi),$$

т. е. z_n находится из уравнения

$$\Delta z = Lx_{n-1} - \varphi; \quad z|_S = 0$$

для ε_n на основании (3) находим выражение

$$\varepsilon_n = \frac{(z_n, z_n)}{(Uz_n, z_n)} = \frac{\int_D \int \left[\left(\frac{\partial z_n}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt}{\int_D \int \left[a \left(\frac{\partial z_n}{\partial s} \right)^2 + b \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} \right)^2 + cz_n^2 \right] ds dt}.$$

Что касается сходимости процесса, то на основании теоремы 2 (1.XV) вследствие (7) имеем

$$\|x_n - x^*\| \leq C \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n \leq C \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

где x^* — решение уравнения (2) или, что то же, решение граничной задачи (1).

3.2. Построенный процесс последовательных приближений оказывается особенно эффективным, если коэффициенты данного уравнения функции a, b, c и его правая часть φ — полиномы. В этом случае, беря в качестве x_0 также полином, мы получим для определения z_1 уравнение

$$\Delta z = p, \quad (9)$$

где p есть полином. Нетрудно видеть, что решение этого уравнения (лежащее в $\mathring{W}_2^{(1)}$) также является полиномом, степень которого на две единицы выше степени полинома p . Действительно, запишем z в виде

$$z(s, t) = (s^2 + t^2 - 1) \pi(s, t), \quad (10)$$

где π — полином с неопределенными коэффициентами той же степени, что и p . Подставляя выражение (10) в уравнение (9) и приравнявая коэффициенты в левой и правой частях, получим для определения коэффициентов полинома π систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равным числу уравнений. При этом матрица указанной системы, очевидно, не зависит от p . Поскольку полиномиальное решение уравнения (9), если оно существует, един-

ственно, то определитель рассматриваемой системы отличен от нуля, что обеспечивает существование полиномиального решения уравнения (9), каков бы ни был полином p . *)

Итак, функция z_1 является полиномом, тем самым и $x_1 = x_0 - \varepsilon_1 z_1$ также является полиномом и, следовательно, все приближения x_n оказываются в этом случае полиномами.

Отмеченное обстоятельство дает возможность в предположении известной правильности уравнения (1) установить наличие не только обобщенного решения, но и решения в классическом понимании слова. Для этого нам нужны будут некоторые факты из конструктивной теории функций.

3.3. Прежде всего отметим двумерный аналог неравенств Бернштейна и В. А. Маркова. Пусть p — полином степени n , причем

$$|p(s, t)| \leq M \quad (s, t \in D),$$

где D — произвольная ограниченная область с гладким контуром. Тогда в области D

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq An^2 M, \quad \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leq An^2 M, \quad (11)$$

а в любой внутренней подобласти D_1 области D

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq BnM, \quad \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leq BnM, \quad (12)$$

где A и B — постоянные, зависящие только от D и D_1 .

Неравенства (11) и (12) очевидным образом получаются из соответствующих неравенств для одномерного случая (см. Натансон-I, стр. 169 и 174).

Докажем еще следующую лемму.

Лемма. Если u — полином степени не выше n , то справедливы неравенства

$$\|u\|_{C_D} \leq A_1 n^2 \|u\|_{L_D^2}, \quad \|u\|_{C_{D_1}} \leq B_1 n \|u\|_{L_{D_1}^2}; \quad (13)$$

$$\|u\|_{C_D^{(1)}} \leq A_2 n^2 \|u\|_{W_2^{(1)}(D)}, \quad \|u\|_{C_{D_1}^{(1)}} \leq B_1 n \|u\|_{W_2^{(1)} D}. \quad (14)$$

где D_1 означает внутреннюю подобласть области D , а через $C^{(1)}$ обозначено пространство непрерывно-дифференцируемых функций.

*) Для фактического решения уравнения (9) проще сначала найти решение, не заботясь о граничном условии, а затем перейти к решению с нулевыми граничными значениями, вычитая решение уравнения Лапласа с теми же граничными значениями, что и у найденного перед этим полинома. Последнее особенно просто находится с помощью разложения решения в ряд Фурье.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда область D — круг с центром в начале координат (общий случай требует небольших дополнительных рассуждений). Полагая

$$\varphi(s, t) = \int_0^s \int_0^t p^2(s, t) ds dt,$$

имеем

$$|\varphi(s, t)| \leq \|p\|_{\mathbf{L}}^2 \quad ((s, t) \in D),$$

а на основании двукратного применения неравенства (11)

$$\begin{aligned} |p(s, t)|^2 &= \left| \frac{\partial^2 \varphi(s, t)}{\partial s \partial t} \right| \leq A^2 (2n+2)^2 (2n+1)^2 \max |\varphi(s, t)| \leq \\ &\leq A_1^2 n^4 \|p\|_{\mathbf{L}}^2, \end{aligned}$$

откуда получается первое из неравенств (13). Второе неравенство устанавливается аналогично, надо только вместо (11) использовать (12).

Применяя установленное неравенство к производной, будем иметь

$$\left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| \leq A_1 n^2 \left\| \frac{\partial p}{\partial s} \right\|_{\mathbf{L}} \leq A_1 n^2 \|p\|_{\mathbf{W}_2^{(1)}};$$

аналогичное неравенство верно и для производной $\frac{\partial p}{\partial t}$. Наконец, в силу (11) и на основании теоремы вложения

$$|p(s, t)| \leq A n^2 \|p\|_{\mathbf{L}} \leq C A n^2 \|p\|_{\mathbf{W}_2^{(1)}}.$$

Сопоставляя все это, приходим к первому из неравенств (14):

$$\begin{aligned} \|p\|_{\mathbf{C}_D^{(1)}} &= \max_D |p(s, t)| + \max_D \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial s} \right| + \max_D \left| \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} \right| \leq \\ &\leq A_2 n^2 \|p\|_{\mathbf{W}_2^{(1)}}. \end{aligned}$$

Второе неравенство получается аналогично.

3.4. Вернемся к уравнению (1). Будем сначала считать, что коэффициенты a , b , c и правая часть φ суть полиномы. Как было показано в 3.2, если начальное приближение x_0 — полином, все следующие приближения x_n ($n = 1, 2, \dots$) также будут полиномами. При этом, если степень полиномов a , b , c , φ не выше m , а x_0 — полином степени N , то Lx_0 будет полиномом степени не выше $m+N$, а z_1 — степени не выше $m+N+2$. В частности, если $x_0 = 0$, то z_1 и, следовательно, x_1 — полиномы степени не выше $m+2$. Повторяя эти рассуждения, находим, что x_n является полиномом степени не выше $(m+2)n$.

Учитывая оценку (8), получаем

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{\dot{W}_2^{(1)}} \leq \|x_k - x^*\| + \|x_{k-1} - x^*\| \leq 2C \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{k-1} \\ (k = 1, 2, \dots).$$

Так как разность $x_k - x_{k-1}$ — полином степени не выше $(m+2)k$, то в силу леммы

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{C_D^{(1)}} \leq A_3 (m+2)^2 k^2 q \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где

$$q = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}.$$

Отсюда, применяя несколько раз неравенство (11), получаем оценку

$$\|x_k - x_{k-1}\|_{C_D^{(p)}} \leq A_4 [(m+2)k]^{2p} q^k \quad (k, p = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Таким образом, ряд

$$x^*(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k(s, t) - x_{k-1}(s, t)] \quad (16)$$

можно почленно дифференцировать p раз. Иначе говоря, решение уравнения (1) имеет производные любого порядка, причем

$$\|x^* - x_n\|_{C^{(p)}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| \leq A_5 [(m+2)n]^{2p} q^n \quad (17) \\ (n = 0, 1, \dots),$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ приближений, полученных по методу наискорейшего спуска, сходится к решению x^* равномерно вместе со всеми производными.

В связи с изложенным целесообразно отметить, что если использовать теорему Бернштейна об аппроксимации аналитической функции полиномами (Натансон-1, стр. 228), то можно получить и аналитичность решения x^* .

Переходим теперь к случаю, когда коэффициенты уравнения (1) и его правая часть — произвольные дифференцируемые несколько раз функции. Именно, будем предполагать, что функции a и b имеют производные до $(\nu+1)$ -го порядка, а функции c и φ до ν -го порядка, причем производные $(\nu+1)$ -го порядка функций a и b и производные ν -го порядка функций c и φ удовлетворяют условию Липшица с показателем $\alpha > 0$. На основании теоремы Джексона

(см., например, [1146]) могут быть найдены полиномы a_n, b_n, c_n и φ_n степени не выше n такие, что

$$\begin{aligned} |a(s, t) - a_n(s, t)| &\leq \frac{K}{n^{\nu+1+\alpha}}, & \left| \frac{\partial}{\partial s} [a(s, t) - a_n(s, t)] \right| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}, \\ & \left| \frac{\partial}{\partial t} [a(s, t) - a_n(s, t)] \right| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}; \\ |b(s, t) - b_n(s, t)| &\leq \frac{K}{n^{\nu+1+\alpha}}; & \left| \frac{\partial}{\partial s} [b(s, t) - b_n(s, t)] \right| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}, \\ & \left| \frac{\partial}{\partial t} [b(s, t) - b_n(s, t)] \right| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}; \\ |c(s, t) - c_n(s, t)| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}; & |\varphi(s, t) - \varphi_n(s, t)| &\leq \frac{K}{n^{\nu+\alpha}}. \end{aligned}$$

Обозначим через L_n оператор, получающийся из L заменой коэффициентов a, b, c на a_n, b_n, c_n соответственно. Ясно, что если n достаточно велико, к оператору L_n применим метод наискорейшего спуска, причем можно считать, что величины α и β обслуживают и оператор L_n . Обозначим через $x^{(n)}$ решение уравнения

$$L_n x = \varphi_n, \quad x|_S = 0. \quad (18)$$

и оценим разность двух таких решений.

$$\begin{aligned} \|Lx^{(n)} - L_n x^{(n)}\|_{L^2} &\leq \left\| \frac{\partial}{\partial s} (a - a_n) \frac{\partial x^{(n)}}{\partial s} \right\| + \left\| (a - a_n) \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial s^2} \right\| + \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial t} (b - b_n) \frac{\partial x^{(n)}}{\partial t} \right\| + \left\| (b - b_n) \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial t^2} \right\| + \|(c - c_n) x^{(n)}\| \leq \\ &\leq \frac{K_1}{n^{\nu+\alpha}} \left[\left\| \frac{\partial x^{(n)}}{\partial s} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial s^2} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial x^{(n)}}{\partial t} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial^2 x^{(n)}}{\partial t^2} \right\|_{L^2} + \|x^{(n)}\|_{L^2} \right] \leq \\ &\leq \frac{K_2}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|L(x^{(n)} - x^{(m)})\|_{L^2} &\leq \|(L - L_n)x^{(n)}\| + \|(L - L_m)x^{(m)}\| + \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \\ &\leq \frac{K_2}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{K_2}{m^{\nu+\alpha}} \|x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{K}{n^{\nu+\alpha}} + \frac{K}{m^{\nu+\alpha}}. \end{aligned}$$

На основании неравенства Бернштейна -- Ладыженской (см. XIII. 6.5) получаем отсюда оценку

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} &\leq K_3 \|L(x^{(n)} - x^{(m)})\|_{L^2} \leq \\ &\leq K_4 \left[\frac{1}{n^{\nu+\alpha}} \|x^{(n)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{1}{m^{\nu+\alpha}} \|x^{(m)}\|_{\dot{W}_2^{(2)}} + \frac{1}{n^{\nu+\alpha}} + \frac{1}{m^{\nu+\alpha}} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к паре $x^{(n)}, x^{(m)}$ (n_0 фиксированное, достаточно большое) и заменяя справа $\|x^{(m)}\|$ на большую сумму $\|x^{(n)}\| +$

$+ \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$, установим ограниченность величины $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \dot{w}_2^{(2)}$ в зависимости от m и тем самым ограниченность величины $\|x^{(m)}\|$. Считая в (19) $n < m$, перепишем это неравенство, используя доказанную ограниченность в виде

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \dot{w}_2^{(2)} \leq \frac{K_5}{n^{\nu+\alpha}}. \quad (20)$$

Возьмем число $h > 1$, о выборе которого более подробно сказано ниже, и рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел

$$n_k = [h^k] \quad ([\gamma] — \text{целая часть числа } \gamma; k = 1, 2, \dots).$$

К каждой из функций $x^{(n_k)}$ построим k -е приближение $x_k^{(n_k)}$ по методу наискорейшего спуска (начальные приближения берем нулевые). Как было показано выше, $x_k^{(n_k)}$ — полином степени не выше $(n_k + 2)k$. Оценим разность двух таких полиномов. Во-первых,

$$\begin{aligned} \|x_k^{(n_k)} - x_{k-1}^{(n_{k-1})}\| &\leq \|x_k^{(n_k)} - x^{(n_k)}\| + \|x_{k-1}^{(n_{k-1})} - x^{(n_{k-1})}\| + \\ &+ \|x^{(n_k)} - x^{(n_{k-1})}\|. \end{aligned}$$

Вследствие (20) имеем

$$\|x^{(n_k)} - x^{(n_{k-1})}\| \dot{w}_2^{(2)} \leq \frac{K_5}{n_{k-1}^{\nu+\alpha}} \leq \frac{K_6}{n_k^{\nu+\alpha}}. \quad (21)$$

Далее, на основании оценки (17)

$$\|x^{(n_k)} - x_k^{(n_k)}\|_{C^{(2)}} \leq A_5 [(n_k + 2)]^4 q^k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Таким образом,

$$\|x_k^{(n_k)} - x_{k-1}^{(n_{k-1})}\| \dot{w}_2^{(2)} \leq K_7 [(n_k + 2)k]^4 q^k + \frac{K_6}{n_k^{\nu+\alpha}}.$$

Так как под знаком нормы стоит полином степени не выше $(n_k + 2)k$, то на основании леммы с помощью неравенства (11) получим

$$\|x_k^{(n_k)} - x_{k-1}^{(n_{k-1})}\|_{C^{(p)}} \leq K_8 [(n_k + 2)k]^{2p-2} \left\{ K_7 [(n_k + 2)k]^4 q^k + \frac{K_6}{n_k^{\nu+\alpha}} \right\} = \varepsilon_k.$$

Поскольку $n_k \leq h^k$, ясно, что если $\nu + \alpha > 2p - 2$, а h выбрано так, что $h^{2p+2}q < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ сходится и потому последова-

тельность $\{x_k^{(n_k)}\}$ сходится в пространстве $C^{(p)}$ и ее предел есть элемент из $C^{(p)}$, т. е. p раз непрерывно-дифференцируемая функция

$$x(s, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n_k)}(s, t).$$

Если $p \geq 2$, то, используя те же оценки, нетрудно проверить, что x удовлетворяет уравнению (1), т. е. представляет классическое решение граничной задачи. Таким образом, классическое решение имеется, если $\nu + \alpha > 2$, в частности, при $\nu = 2$, т. е. если коэффициенты a и b имеют третьи, а c и φ вторые производные, удовлетворяющие условию Липшица с некоторым показателем $\alpha > 0$.

Аналогичным образом, используя оценки для внутренних подобластей, мы получим, что решение дважды непрерывно дифференцируемо внутри области уже при $\nu = 1$.

В заключение отметим, что тот же метод может быть применен для исследования более сложных задач. Случай некруговой области сводится к рассмотренному, если данная область может быть гладко преобразована в круг. С незначительными изменениями метод может быть использован и для уравнений высших порядков с числом независимых переменных, большим двух.

ГЛАВА XVI

ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Принцип Каччопполи — Банаха

В этой и следующей главах мы будем рассматривать главным образом нелинейные операции и уравнения.

1.1. Исследование нелинейных уравнений мы начнем с простейшего случая, обобщающего теорему Банаха об обратной операции (V. 2.5).

Рассмотрим полное метрическое пространство X (не обязательно линейное) и в нем замкнутое множество Ω . Предположим, что на Ω задана операция P , переводящая Ω в себя. Точка $x^* \in \Omega$ называется *неподвижной точкой операции* P , если

$$x^* = P(x^*).$$

Таким образом, неподвижные точки операции P суть решения уравнения

$$x = P(x). \quad (1)$$

Операция P может и не иметь неподвижных точек, так, например, будет, если $X = \Omega$ — линейное метрическое пространство, и

$$P(x) = x + x_0 \quad (x_0 \neq 0).$$

Однако если P есть операция сжатия, т. е. удовлетворяет условию

$$\rho(P(x), P(x')) \leq \alpha \rho(x, x') \quad (x, x' \in \Omega), \quad (2)$$

причем $\alpha < 1$ не зависит от x и x' , то можно гарантировать существование и притом только одной неподвижной точки. Именно, справедлива

Теорема 1 (I. XVI). Если P есть операция сближения, то в Ω существует единственное решение x^* уравнения (1).

При этом x^* может быть получено как предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_{n+1} = P(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

а x_0 — произвольный элемент из Ω .

Быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к решению дается неравенством

$$\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) \quad (n=0, 1, \dots). \quad (3)$$

Доказательство. Так как

$$x_{n+1} = P(x_n), \quad x_n = P(x_{n-1}),$$

то согласно (2)

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}).$$

Последовательно используя аналогичное неравенство, получим

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $\alpha^n \rightarrow 0$, полученная оценка показывает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и, следовательно, в силу полноты пространства X , сходится к некоторому элементу $x^* \in X$. Так как каждый $x_n \in Q$, то вследствие замкнутости Q и $x^* \in Q$, так что имеет смысл $P(x^*)$. Опять используя (2), имеем

$$\rho(x_{n+1}, P(x^*)) = \rho(P(x_n), P(x^*)) \leq \alpha \rho(x_n, x^*) \quad (n=0, 1, \dots),$$

и, поскольку правая часть здесь стремится к нулю,

$$x_{n+1} \rightarrow P(x^*),$$

откуда

$$x^* = P(x^*).$$

Единственность решения также вытекает из (2). Действительно, если бы существовало еще решение $\tilde{x} \in Q$, то было бы

$$\rho(\tilde{x}, x^*) = \rho(P(\tilde{x}), P(x^*)) \leq \alpha \rho(\tilde{x}, x^*),$$

а это возможно лишь в случае, когда $\rho(\tilde{x}, x^*) = 0$: $\tilde{x} = x^*$.

Оценка (3) получается, если перейти в (4) к пределу при $p \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Неравенство (3) дает область возможного расположения решения уравнения (1). В частности, при $n=0$

$$\rho(x^*, x_0) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \quad (5)$$

1.2. Условие (2) нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое:

$$\rho(P(x), P(x')) < \rho(x, x') \quad (x, x' \in Q). \quad (6)$$

Действительно, пусть $X = R_1$ — множество вещественных чисел, $Q = X$, а операция P определена следующим образом:

$$P(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x.$$

Нетрудно видеть, что неподвижных точек у операции P нет, между тем

$$\begin{aligned} \rho(P(x), P(x')) &= |P(x) - P(x')| = |P'(\xi)| |x - x'| = \\ &= \left| \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} \right| |x - x'| < \rho(x, x') \end{aligned}$$

(ξ — точка, лежащая между x и x'). Однако имеет место

Теорема 2 (1. XVI). Если операция P отображает замкнутое множество Ω на компактное множество $\Delta \subset \Omega$ и если для любых $x, x' \in \Omega$ удовлетворено условие (6), то существует единственная неподвижная точка операции P .

Доказательство. Очевидно, $\Delta_0 = P(\Delta) \subset \Delta = P(\Omega)$. Докажем, что на множестве Δ операция P есть операция сжатия. В противном случае нашлись бы такие $x_n, x'_n \in \Delta$ ($n = 1, 2, \dots$), что

$$\rho(P(x_n), P(x'_n)) = \alpha_n \rho(x_n, x'_n) \quad (n = 1, 2, \dots; \alpha_n \rightarrow 1), \quad (7)$$

при этом вследствие компактности Δ и замкнутости Ω можно было бы считать, что $x_n \rightarrow x \in \Omega$ и $x'_n \rightarrow x' \in \Omega$. Предельный переход в (7) тогда привел бы к равенству

$$\rho(P(x), P(x')) = \rho(x, x'),$$

которое противоречит (6).

Применяя теорему 1, получаем, что в $\bar{\Delta}$ существует единственная неподвижная точка $x^* \in \Delta$. Если $\tilde{x} \in \Omega$ — некоторая неподвижная точка операции P , то ввиду соотношения $\tilde{x} = P(\tilde{x})$ имеем $\tilde{x} \in \Delta \subset \bar{\Delta}$ и, следовательно, $\tilde{x} = x^*$. Таким образом, и в Ω неподвижная точка единственна.

Теорема доказана.

1.3. Нередко случается, что операция P зависит от числового или иного параметра. Тогда решение уравнения (1) также будет зависеть от этого параметра. Можно показать, что непрерывная зависимость P от параметра влечет непрерывную зависимость от параметра решения. Дадим более точные формулировки.

Пусть кроме пространства X имеется другое метрическое пространство Y_0 . Предположим, что каждому $y \in Y_0$ соотнесена операция P_y , отображающая $\Omega \subset X$ в себя. Мы говорим, что операция P_y непрерывна по y в точке $y_0 \in Y_0$, если, какова бы ни была последовательность $\{y_n\} \subset Y_0$; $y_n \rightarrow y_0$,

$$P_{y_n}(x) \rightarrow P_{y_0}(x) \quad \text{при каждом } x \in \Omega. \quad (8)$$

Рассмотрим уравнение (точнее, семейство уравнений)

$$x = P_y(x). \quad (9)$$

Предположим, что при каждом $y \in Y_0$ оно имеет единственное решение, которое, очевидно, будет зависеть от y , так что его естественно обозначить через x_y^* . Будем говорить, что решение уравнения (9) непрерывно зависит от y при $y = y_0$, если, какова бы ни была последовательность $\{y_n\} \subset Y_0$; $y_n \rightarrow y_0$, будет $x_{y_n}^* \rightarrow x_{y_0}^*$.

В случае, когда при каждом $y \in Y_0$ операция P_y является операцией сближения, из непрерывности P_y вытекает непрерывность решения уравнения (9). Точнее говоря, имеет место

Теорема 3 (I. XVI). *Если при каждом $y \in Y_0$ операция P_y удовлетворяет условию (2) с α , независимым от y , и если в точке $y_0 \in Y_0$ операция P_y непрерывна по y , то при $y = y_0$ решение уравнения (9) непрерывно зависит от y .*

Доказательство. Пусть y — произвольный элемент из Y_0 . Решение x_y^* уравнения (9) построим как предел последовательности $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} = P_y(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots; x_0 = x_{y_0}^*).$$

Поскольку $x_{y_n}^* = P_{y_n}(x_{y_n}^*)$, в силу (5) находим

$$\rho(x_y^*, x_{y_0}^*) \leq \frac{1}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0) = \frac{1}{1-\alpha} \rho(P_y(x_{y_0}^*), P_{y_0}(x_{y_0}^*)).$$

Требуемая непрерывность x_y^* при $y = y_0$ отсюда легко усматривается с помощью (8).

З а м е ч а н и е. Совокупность операций P_y можно трактовать как одну операцию P , сопоставляющую каждой паре (x, y) элементов $x \in \Omega$, $y \in Y_0$ элемент $P(x, y) = P_y(x)$. Точно так же решение x_y^* уравнения (9) можно рассматривать как операцию F , сопоставляющую элементу $y \in Y_0$ элемент $F(y) = x_y^*$.

Доказанную теорему можно поэтому сформулировать следующим образом.

Если при каждом $y \in Y_0$

$$\rho(P(x, y), P(x', y)) \leq \alpha \rho(x, x') \quad (x, x' \in \Omega)$$

($\alpha < 1$ и не зависит от y) и при каждом $x \in \Omega$ операция P непрерывна по y в точке $y_0 \in Y_0$, то операция F также непрерывна в точке y_0 .

Впервые теорема о неподвижной точке преобразования как метод доказательства существования была использована в [12]. В приведенной форме принцип неподвижной точки установлен Банахом [9а] и Каччопполи [50]. Интересное обобщение дано недавно в [62в].

§ 2. Вспомогательные предложения

В следующем параграфе будет установлен второй принцип неподвижной точки. Доказательство его представляет известные трудности, так как опирается на тонкие факты, касающиеся топологической структуры конечномерного пространства. Эти вспомогательные сведения из топологии и приведены в настоящем параграфе.

2.1. Введем сначала некоторые новые понятия, необходимые для дальнейшего. Рассмотрим B -пространство X и в нем совокупность элементов

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (1)$$

Предположим, что разности

$$x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0 \quad (2)$$

линейно независимы, и образуем выпуклую оболочку $S(x_0, x_1, \dots, x_n)$ элементов (1) (II. 1.6). Множество $S(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется *симплексом*, натянутым на *вершины* $x_0, x_1, \dots, x_n$. Число n называется *размерностью* симплекса.

З а м е ч а н и е. В приведенном здесь определении симплекса не все вершины входят равноправно. Однако можно доказать (предоставляем сделать это читателю), что если разности (2) линейно независимы, то необходимо линейно независимы и каждые из остальных n разностей

$$x_0 - x_k, \dots, x_{k-1} - x_k, x_{k+1} - x_k, \dots, x_n - x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Этим равноправие всех вершин восстанавливается.

Пусть имеется симплекс $S(x_0, x_1, \dots, x_n)$; выделим некоторые k различных его вершин $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, а на оставшиеся натянем симплекс $((n-k)$ -мерный).*) Получившийся симплекс называется *гранью* $((n-k)$ -мерной) данного симплекса $S(x_0, x_1, \dots, x_n)$, противоположной вершинам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$.

Пусть опять $S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — некоторый симплекс. Каждый элемент $x \in S$ может быть представлен в форме (II. 1.6)

$$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad (3)$$

где коэффициенты α_k связаны соотношением

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1; \quad \alpha_k \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Докажем, что представление (3) единственно. Действительно, поскольку $\alpha_0 = 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k$, то из (3) находим

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_0). \quad (4)$$

*) Возможность этого вытекает из сделанного выше замечания.

Если наряду с (3) имеется еще представление того же вида

$$x = \alpha'_0 x_0 + \alpha'_1 x_1 + \dots + \alpha'_n x_n,$$

то, как и выше, найдем

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha'_k (x_k - x_0),$$

что вместе с (4) дает равенство

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (x_k - x_0) = \sum_{k=1}^n \alpha'_k (x_k - x_0),$$

которое в силу линейной независимости разностей (2) возможно лишь в случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_n = \alpha_n, \alpha'_0 = \alpha_0.$$

Числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, однозначно определяемые элементом, мы будем называть *симплициальными координатами* точки $x \in S$.*)

Отметим, что для точек грани, противоположной вершинам $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, будет $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$.

Точка, все координаты которой положительны, называется *внутренней точкой* симплекса.

Центром симплекса называется точка, все координаты которой равны между собой.

Введем понятие о подразделении симплекса $S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Под *подразделением* симплекса мы будем понимать представление его в форме суммы конечного числа симплексов той же размерности, что и данный, определяемых индуктивно следующим образом:

Для одномерного симплекса $S(x_0, x_1)$ в качестве подразделения принимается совокупность двух симплексов $S(x_0, \frac{1}{2}(x_0 + x_1))$ и $S(\frac{1}{2}(x_0 + x_1), x_1)$. Предположим, что подразделение уже определено для всех симплексов, размерность которых меньше n , и рассмотрим n -мерный симплекс $S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Возьмем некоторую $(n-1)$ -мерную грань симплекса S . Поскольку эта грань представляет собой $(n-1)$ -мерный симплекс, то для нее уже определено подразделение. Пусть оно состоит из симплексов $((n-1)$ -мерных) $S_1, S_2, \dots, S_m$. Добавляя к вершинам симплекса S_k ($k = 1, 2, \dots, m$) центр x^* данного симплекса S , натянем на указанные $n+1$ точек n -мерный симплекс.***) Прделав аналогичные построения с каждой $(n-1)$ -мерной гранью данного симплекса, получим его подразделение.

*) Иногда числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ называют *барицентрическими координатами* точки $x \in S$, так как, если поместить в каждой вершине x_k массу α_k , то центр инерции получившейся системы материальных точек будет находиться в точке x .

**) В возможности этого предоставляем убедиться читателю.

Нетрудно видеть, что симплексы, образующие подразделение, не имеют общих внутренних точек. Пересечение их является общей гранью.

Рассмотрим некоторый симплекс S и его подразделение. Произведя подразделение каждого частичного симплекса, получим двукратное подразделение данного симплекса, а при продолжении процесса — подразделения более высоких кратностей.

Ясно, что с увеличением кратности подразделения диаметры частичных симплексов стремятся к нулю.

2.2. Приведем теперь ряд лемм, на которые опирается доказательство второго принципа неподвижной точки.

Пусть имеется n -мерный симплекс $S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и некоторое его подразделение (произвольной кратности), состоящее из симплексов

$$S_1, S_2, \dots, S_m. \quad (5)$$

Предположим, что каждой вершине z каждого из симплексов (5) соотнесено одно из чисел $0, 1, \dots, n$, т. е. что на множестве вершин симплексов (5) определена функция ν , принимающая значения $0, 1, \dots, n$. Таким образом, каждому из симплексов (5) оказывается сопоставленной совокупность $\nu(S_j)$ из $n+1$ числа, соотнесенных вершинам этого симплекса. Будем называть симплекс S_j нормальным, если $\nu(S_j) = \{0, 1, \dots, n\}$, считая безразличным в каком порядке расположены входящие в $\nu(S_j)$ числа.

Если функция ν произвольна, то, вообще говоря, нормальных симплексов может и не быть. Однако справедлива

Лемма 1. Пусть функция ν удовлетворяет следующему условию: если z — вершина некоторого симплекса из (5), принадлежащая k -мерной грани $S(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ основного симплекса S , то $\nu(z)$ может равняться лишь одному из чисел $i_0, i_1, \dots, i_k$.

Тогда среди симплексов (5) существует по крайней мере один нормальный.

Доказательство. Мы докажем, что число нормальных симплексов нечетно. Если размерность симплекса S равна нулю, т. е. если симплекс вырождается в точку, то утверждение тривиально. Положим, что оно доказано для симплексов размерности $n-1$ и проверим его справедливость для симплекса размерности n . Рассмотрим $(n-1)$ -мерную грань, $S_k^{(i)}$ симплекса S_k . Назовем ее отмеченной, если $\nu(S_k^{(i)}) = \{0, 1, \dots, n\}$. Если симплекс S_k нормальный, то, как легко проверить, число ρ_k его отмеченных граней равно единице;

в противном случае $\rho_k = 2$. Таким образом сумма $\rho = \sum_{k=1}^m \rho_k$ имеет ту же четность, что и число всех нормальных симплексов. Отмеченные грани симплексов (5) распределим на две группы. В первую отнесем грани, которые не содержатся ни в одной $(n-1)$ -мерной

грани основного симплекса S . Число таких отмеченных граней обозначим через ρ' . Поскольку каждая отмеченная грань указанного вида является общей гранью в точности двух симплексов (5), при подсчете суммы ρ она должна учитываться дважды. Во вторую группу поместим те отмеченные грани, которые целиком содержатся в одной из $(n-1)$ -мерной граней симплекса S . Так как такая грань служит гранью лишь одного из симплексов (5), то их число $\rho'' = \rho - 2\rho'$. Используя условие леммы без труда убедимся, что все отмеченные грани второй группы содержатся в грани $S' = S(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ симплекса S . Но всевозможные $(n-1)$ -мерные грани симплексов (5), лежащие в S' , образуют подразделение симплекса S' , причем функция χ , рассматриваемая только для полученного подразделения, удовлетворяет условию леммы. Следовательно, по индуктивному предположению число нормальных симплексов в указанном подразделении нечетно. Заметив, что нормальные симплексы в этом случае как раз и есть отмеченные грани второй группы, заключаем, что ρ'' и тем самым $\rho = 2\rho' + \rho''$ нечетно.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть в n -мерном B -пространстве $\mathbb{B}$ имеется n -мерный симплекс $S = S(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и пусть существуют замкнутые множества $F_0, F_1, \dots, F_n$ такие, что

$$S(x_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \subset \bigcup_{m=0}^k F_{i_m}.$$

какова бы ни была совокупность $i_0, i_1, \dots, i_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Тогда пересечение $\bigcap_{k=0}^n F_k$ непусто.

Доказательство. Рассмотрим подразделение симплекса S произвольной кратности. Пусть z — вершина одного из симплексов, образующих подразделение, и $S(x_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ — грань, содержащая z . Согласно условию леммы $z \in \bigcup_{m=0}^k F_{i_m}$. Допустим, что $z \in F_{i_s}$, и положим тогда $\chi(z) = i_s$. Ясно, что функция χ удовлетворяет условию леммы 1, и, следовательно, на основании этой леммы существует нормальный частичный симплекс, который в данном случае характеризуется тем, что пересечение его с каждым из множеств F_j непусто (содержит одну из вершин).

Рассмотрим теперь последовательность p -кратных подразделений ($p = 1, 2, \dots$). Для p -го подразделения существуют точки $z_0^{(p)}, z_1^{(p)}, \dots, z_n^{(p)}$ — вершины нормального частичного симплекса, такие, что

$$z_k^{(p)} \in F_k \quad (k = 0, 1, \dots, n; p = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Вследствие компактности множества S можно указать такую возрастающую последовательность натуральных чисел $p_1, p_2, \dots$, такую, что

стающую последовательность $\{p_j\}$ натуральных чисел, что последовательность $\{z_0^{(p_j)}\}$ сходится. Предел этой последовательности, точка z^* , в силу замкнутости симплекса S входит в S . Поскольку диаметры частичных симплексов стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$, имеем

$$z_k^{(p_j)} \rightarrow z^* \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда, учитывая замкнутость множеств F_k , получаем вследствие (6)

$$z^* \in F_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

что и требовалось доказать.

2.3. Следующая лемма дает уже некоторый принцип неподвижной точки (принцип Брауера), однако в слишком стеснительных условиях.

Лемма 3. *Непрерывная операция P , отображающая n -мерный симплекс S B -пространства X в себя, имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — симплициальные координаты произвольной точки $x \in S$. Обозначим

$$\beta_j = f_j(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

— симплициальные координаты точки $P(x)$. Это обозначение имеет смысл, поскольку $P(x) \in S$. Имеем, очевидно,

$$\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = 1; \quad \beta_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Нетрудно проверить, используя непрерывность операции P , непрерывность функций f_j . Обозначим через $F_j (j = 0, 1, \dots, n)$ множество тех точек $x \in S$, для которых

$$\alpha_j \geq \beta_j.$$

Ввиду непрерывности функций f_j множества F_j замкнуты. Убедимся также, что они удовлетворяют условиям леммы 2.

Действительно, пусть $x \in S(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Предположим, что $x \notin \bigcup_{m=0}^k F_{i_m}$. Это значит, что симплициальные координаты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ точек x и $P(x)$ соответственно находятся в отношении

$$\alpha_{i_m} < \beta_{i_m} \quad (m = 0, 1, \dots, k).$$

Поскольку для $i \neq i_m (m = 0, 1, \dots, k)$ должно быть $\alpha_i = 0$ и, следовательно, для этих номеров $\alpha_i \leq \beta_i$, мы получаем

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i < \sum_{i=0}^n \beta_i,$$

что невозможно, так как обе суммы должны равняться единице.

Согласно лемме 2 найдется точка $x^* \in \bigcap_{k=0}^n F_k$. Если $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$

и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ — симплицальные координаты точек x^* и $P(x^*)$ соответственно, то

$$\alpha_j^* \geq \beta_j^* \quad (j = 0, 1, \dots, n),$$

откуда

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i^* \geq \sum_{i=0}^n \beta_i^*. \quad (7)$$

При этом знак равенства здесь имеет место лишь тогда, когда

$$\alpha_i = \beta_i^* \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

Но обе суммы в (7) равны единице, следовательно, справедливо (8), т. е. $x^* = P(x^*)$.

Лемма доказана.

2.4. Перенесем теперь результат леммы 3 на произвольные замкнутые ограниченные выпуклые множества в конечномерном пространстве. Для этого сначала докажем еще одну лемму.

Будем называть *телом* замкнутое ограниченное множество Ω в B -пространстве X , имеющее внутренние точки.

Лемма 4. Пусть Ω — выпуклое тело в B -пространстве X и $\bar{K}$ — замкнутая единичная сфера пространства X . Существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение T множества Ω на $\bar{K}$, т. е. множества Ω и $\bar{K}$ гомеоморфны.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что 0 есть внутренняя точка множества Ω и что $\bar{K} \subset \Omega$. Поскольку

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} n\Omega \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\bar{K} = X, \text{ имеет смысл}$$

$$p(x) = \inf \lambda \quad \left(\lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in \Omega; x \in X \right).$$

Функционал p , как показано в XI. 1.7, полуаддитивен и положительно однороден, т. е.

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X), \quad (9)$$

$$p(tx) = tp(x) \quad (x \in X, t \geq 0). \quad (10)$$

Там же установлено, что множество Ω совпадает с совокупностью всех тех $x \in X$, для которых $p(x) \leq 1$. Если $x \neq 0$ — произвольный элемент из X , то $\frac{x}{\|x\|} \in \bar{K} \subset \Omega$ и, следовательно, $p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq 1$, что на основании (10) приводит к неравенству

$$p(x) \leq \|x\|, \quad (11)$$

которое справедливо, разумеется, и при $x = 0$.

Далее, вследствие ограниченности множества Ω существует открытая сфера K_r с центром в нуле радиуса $r > 0$, содержащая множество Ω . Поскольку элемент $\frac{rx}{\|x\|} \in K_r$, каков бы ни был $x \neq 0$, будет

также $\frac{rx}{\|x\|} \in \Omega$, так что $p\left(\frac{rx}{\|x\|}\right) > 1$. Следовательно,

$$p(x) \geq \frac{1}{r} \|x\| \quad (x \in X). \quad (12)$$

Функционал p непрерывен. Действительно, из (9) обычным образом вытекает неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq \max[p(x - y), p(y - x)] \quad (x, y \in X),$$

что с учетом соотношения (11) дает

$$|p(x) - p(y)| \leq \|x - y\|,$$

откуда и следует непрерывность функционала p .

Определим отображение T , полагая для $x \in \Omega$

$$T(x) = x \frac{p(x)}{\|x\|} \quad (x \neq 0); \quad T(0) = 0. \quad (13)$$

Так как множество Ω совпадает с множеством тех $x \in X$, для которых $p(x) \leq 1$, то ясно, что $T(\Omega) = \bar{K}$. Кроме того, непосредственно очевидно, что отображение T взаимно однозначно. Обратное отображение T^{-1} дается формулой

$$T^{-1}(x) = x \frac{\|x\|}{p(x)} \quad (x \neq 0); \quad T^{-1}(0) = 0. \quad (14)$$

Непрерывность отображения T в точке $x_0 \neq 0$ вытекает из непрерывности функционала p . Если же $x_n \rightarrow 0$, то, поскольку $\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = 1$, а $p(x_n) \rightarrow 0$, то $T(x_n) \rightarrow 0 = T(0)$.

Точно так же проверяется непрерывность отображения T^{-1} . Если $x_n \rightarrow x_0 \neq 0$, то ввиду того, что $p(x_0) \geq \frac{1}{r} \|x_0\| > 0$ (см. (12)) соотношение $T^{-1}(x_n) \rightarrow T^{-1}(x_0)$ является следствием непрерывности функционала p . При $x_0 = 0$ имеем, опять в силу (12),

$$\|T^{-1}(x_n)\| = \frac{\|x_n\|}{p(x_n)} \|x_n\| \leq \frac{r \|x_n\|}{\|x_n\|} \|x_n\| = r \|x_n\| \rightarrow 0,$$

т. е. $T^{-1}(x_n) \rightarrow 0 = T^{-1}(0)$.

Лемма полностью доказана.

Следствие. Выпуклое тело Ω n -мерного B -пространства гомеоморфно n -мерному симплексу.

Действительно, n -мерный симплекс является выпуклым телом в n -мерном пространстве, а следовательно, так же как и Ω гомеоморфен сфере $\bar{K}$.

Теперь мы в состоянии доказать основную лемму.

Лемма 5. Пусть Ω — выпуклое тело n -мерного B -пространства X . Непрерывная операция P , отображающая множество Ω в себя, имеет неподвижную точку.

Доказательство. Возьмем в пространстве X линейно независимые элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Положив $x_0 = 0$, натянем на вершины $x_0, x_1, \dots, x_n$ симплекс S . Согласно следствию из леммы 4,

существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение T симплекса S на тело Ω . Рассмотрим операцию

$$P_0 = T^{-1}PT.$$

Операция P_0 непрерывна и отображает симплекс S в себя. Следовательно, по лемме 3 существует неподвижная точка x_0 :

$$x_0 = P_0(x_0).$$

А тогда $x^* = T(x_0)$ будет неподвижной точкой операции P , так как

$$P(x^*) = PT(x_0) = TT^{-1}PT(x_0) = TP_0(x_0) = T(x_0) = x^*.$$

Теорема о неподвижной точке непрерывного преобразования симплекса в себя доказана Брауэром ([16]) в связи с установлением инвариантности размерности. Изложенное выше доказательство принадлежит Куратовскому.

§ 3. Принцип Шаудера

3.1. Опираясь на результаты предыдущего параграфа, мы можем установить второй принцип неподвижной точки (принцип Шаудера).

Теорема 1 (3. XVI). *Непрерывная операция P , отображающая выпуклое замкнутое компактное множество Ω B -пространства X в себя, имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку Ω — компактное множество, в нем найдется конечная ε -сеть. Пусть она состоит из элементов

$$x_1, x_2, \dots, x_m. \quad (1)$$

Образуем множество Ω_0 — выпуклую оболочку элементов (1). Ясно, что $\Omega_0 \subset \Omega$. При этом множество Ω_0 имеет конечную размерность $n \leq m - 1$.*)

С помощью индукции по размерности нетрудно доказать, что множество Ω_0 можно представить в форме суммы n -мерных симплексов таких, что

- а) все точки (1) служат вершинами этих симплексов;
- б) два симплекса либо не имеют общих точек, либо их пересечением служит общая грань (k -мерная; $k = 0, 1, \dots, n - 1$).

Произведем подразделение каждого из построенных симплексов настолько большой кратности, чтобы диаметры всех частичных симплексов, полученных в результате подразделения, были меньше ε . Обозначим образованные симплексы через

$$S_1, S_2, \dots, S_p. \quad (2)$$

*) Мы говорим, что *размерность* множества $E \subset X$ равна n , если существуют элементы $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ такие, что 1) разности $\bar{x}_k - \bar{x}_0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) линейно независимы и 2) каждый $x \in E$ представим в форме $x = \bar{x}_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k (\bar{x}_k - \bar{x}_0)$, причем для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ существует $x \in E$ такой, что соответствующий коэффициент $\alpha_k \neq 0$.

Очевидно, совокупность всех вершин симплексов (2) также образует ε -сеть. Отметим еще, что симплексы (2) удовлетворяют обоим условиям а) и б).

Рассмотрим теперь операцию P . Вследствие компактности и замкнутости множества $\mathcal{Q}$, из непрерывности P вытекает равномерная непрерывность, *) т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\|x - x'\| < \delta$ влечет

$$\|P(x) - P(x')\| < \varepsilon \quad (x, x' \in \mathcal{Q}). \quad (3)$$

Подразделяя, если нужно, симплексы (2), мы можем добиться того, чтобы их диаметры были меньше δ . Будем считать, что подразделение такого рода уже произведено, т. е. что диаметры всех симплексов (2) не только меньше ε , но и меньше δ .

Построим теперь операцию P_ε — симплициальное приближение операции P , — отображающую $\mathcal{Q}_0$ в себя. Сначала определим P_ε в вершинах симплексов (2). Пусть z — одна из вершин одного из симплексов (2). Поскольку $P(z) \in \mathcal{Q}$, а совокупность вершин симплексов (2) образует ε -сеть, найдется вершина $\bar{z}$ такая, что $\|\bar{z} - P(z)\| < \varepsilon$. Положим $\bar{z} = P_\varepsilon(z)$.

Пусть теперь $x \in \mathcal{Q}_0$ не является вершиной ни одного из симплексов (2). Предположим, что $x \in S_k$. Обозначим вершины симплекса S_k через $x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ и представим элемент x в форме

$$x = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k)} x_i^{(k)} \quad \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k)} = 1; \alpha_i^{(k)} \geq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n \right).$$

Положим

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k)} P_\varepsilon(x_i^{(k)}). \quad (4)$$

Это определение не требует дополнительных пояснений, если симплекс, содержащий точку x , единственен. Если же, кроме того, $x \in S_r$ ($r \neq k$), то надо еще показать, что $P_\varepsilon(x)$ не зависит от выбора того или иного симплекса. Согласно условию б) пересечение симплексов S_k и S_r есть их общая грань. Допустим, что эта грань натянута на вершины $x_{i_0}^{(k)}, x_{i_1}^{(k)}, \dots, x_{i_s}^{(k)}$ симплекса S_k ; обозначая через $x_0^{(r)}, x_1^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}$ вершины симплекса S_r , можем считать

$$x_{i_j}^{(k)} = x_{i_j}^{(r)} \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (5)$$

Представим x в форме

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)} x_i^{(r)} \quad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)} = 1; \alpha_i^{(r)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right).$$

*) Доказательство этого проводится как обычно в анализе. См., например, Фихтенгольц, т. 1, стр. 240.

Принимая во внимание замечание, сделанное в XVI. 2.1, имеем

$$\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(r)} = 0 \quad (i \neq i_j, j = 1, 2, \dots, s). \quad (6)$$

А тогда вследствие (5)

$$\sum_{j=0}^s \alpha_{i_j}^{(k)} x_{i_j}^{(k)} = \sum_{j=0}^s \alpha_{i_j}^{(r)} x_{i_j}^{(k)},$$

откуда вытекает равенство

$$\alpha_{i_j}^{(k)} = \alpha_{i_j}^{(r)} \quad (j = 0, 1, \dots, s). \quad (7)$$

Таким образом, если мы определим $P_\epsilon(x)$, исходя из симплекса S_r , то в силу (6), (5) и (7)

$$P_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(r)} P_\epsilon(x_i^{(r)}) = \sum_{j=0}^s \alpha_{i_j}^{(r)} P_\epsilon(x_{i_j}^{(r)}) = \sum_{j=0}^s \alpha_{i_j}^{(k)} P_\epsilon(x_{i_j}^{(k)}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k)} P_\epsilon(x_i^{(k)}),$$

что и требовалось доказать.

С помощью несложных рассуждений можно убедиться, что построенная операция P_ϵ непрерывна на Ω_0 и переводит Ω_0 в себя.

Для операции P_ϵ , таким образом, выполнены условия леммы 5 предыдущего параграфа. Следовательно, на основании этой леммы существует неподвижная точка $x_\epsilon \in \Omega_0$ операции P_ϵ :

$$x_\epsilon = P_\epsilon(x_\epsilon).$$

Пусть $z_0, z_1, \dots, z_n$ — вершины того из симплексов (2), которому принадлежит точка x_ϵ . Поскольку $\|z_i - z_j\| < \delta$, то согласно (3)

$$\|P(z_i) - P(z_j)\| < \epsilon \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда, принимая во внимание, что по определению

$$\|P_\epsilon(z_i) - P(z_i)\| < \epsilon \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (8)$$

находим

$$\|P_\epsilon(z_i) - P_\epsilon(z_j)\| < 3\epsilon \quad (i, j = 0, 1, \dots, n). \quad (9)$$

Далее, представив x_ϵ в форме

$$x_\epsilon = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(\epsilon)} z_i \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i^{(\epsilon)} = 1; \alpha_i^{(\epsilon)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right),$$

будем иметь по определению операции P_ϵ

$$x_\epsilon = P_\epsilon(x_\epsilon) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(\epsilon)} P_\epsilon(z_i).$$

Учитывая (9), получим отсюда

$$\|x_\epsilon - P_\epsilon(z_j)\| = \left\| \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(\epsilon)} [P_\epsilon(z_i) - P_\epsilon(z_j)] \right\| \leq 3\epsilon \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(\epsilon)} = 3\epsilon \quad (10) \\ (j = 0, 1, \dots, n).$$

Наконец, из соотношения

$$\|x_\varepsilon - z_i\| < \delta \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

вытекает в силу (3)

$$\|P(x_\varepsilon) - P(z_i)\| < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (11)$$

Используя (10), (8) и (11), находим окончательно

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - P(x_\varepsilon)\| &\leq \|x_\varepsilon - P_\varepsilon(z_i)\| + \|P_\varepsilon(z_i) - P(z_i)\| + \\ &+ \|P(z_i) - P(x_\varepsilon)\| < 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in \Omega$ такая, что

$$\|x_\varepsilon - P(x_\varepsilon)\| < 5\varepsilon.$$

Возьмем последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и построим для каждого $k = 1, 2, \dots$ точку $x_k = x_{\varepsilon_k}$. Вследствие компактности и замкнутости множества Ω можно, не умаляя общности, считать, что

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^* \in \Omega.$$

Но тогда

$$\|x^* - P(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - P(x_k)\| + \|P(x_k) - P(x^*)\|$$

и все слагаемые в правой части стремятся к нулю (последнее — в силу непрерывности P). Следовательно,

$$x^* = P(x^*)$$

и существование неподвижной точки доказано.

З а м е ч а н и е. Предоставляем читателю убедиться, что оба условия теоремы — выпуклости и компактности множества Ω — существенны. Точно также нетрудно построить пример, показывающий, что условие компактности нельзя ослабить, заменив его требованием ограниченности множества Ω .

3.2. Теорему 1 можно сформулировать в несколько более общей форме, если воспользоваться следующим результатом.

Лемма. Пусть E — компактное множество в B -пространстве X . Тогда выпуклое замыкание $\overline{C}(E)$ множества E также компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как замыкание компактного множества компактно, то достаточно доказать, что компактна будет выпуклая оболочка $\overline{C}(E)$ множества E .

Выпуклая оболочка $\overline{C}(E)$ состоит из всех тех $x \in X$, которые могут быть представлены в форме (II. 1.6)

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где элементы $x_i \in E$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а коэффициенты $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку E компактно, для него существует конечная ε -сеть $\tilde{E} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Выпуклая оболочка $\mathcal{C}(\tilde{E})$ множества $\tilde{E}$, будучи ограниченным множеством в конечномерном пространстве (в $\mathcal{S}(\tilde{E})$), также компактна.

Пусть теперь x — произвольный элемент из $\mathcal{C}(E)$. Представим x в форме (12). По свойству ε -сети для каждого x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) найдется такой элемент $y_{k_i} \in \tilde{E}$, что

$$\|x_i - y_{k_i}\| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

А тогда, полагая

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_{k_i},$$

будем иметь

$$\|x - \tilde{y}\| = \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i - y_{k_i}) \right\| < \varepsilon \sum_{i=1}^m \alpha_i = \varepsilon.$$

Поскольку $\tilde{y} \in \mathcal{C}(\tilde{E})$, последнее соотношение показывает, что $\mathcal{C}(\tilde{E})$ является ε -сетью (компактной) для множества $\mathcal{C}(E)$. Используя замечание к теореме Хаусдорфа (1.3.2), получаем отсюда, что $\mathcal{C}(E)$ компактно, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (3. XVI). *Непрерывная операция P , отображающая замкнутое выпуклое множество $\mathcal{Q}$ B -пространства X в компактное множество $\Delta \subset \mathcal{Q}$, имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{Q}_0 = \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ — выпуклое замыкание множества Δ . Очевидно, $\mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$. Согласно лемме $\mathcal{Q}_0$ компактно. Кроме того, ясно, что $\mathcal{Q}_0$ — выпуклое замкнутое множество.

Операция P отображает $\mathcal{Q}_0$ в Δ и, следовательно, поскольку $\Delta \subset \mathcal{Q}_0$, в себя. Поэтому, если рассматривать P лишь на $\mathcal{Q}_0$, мы оказываемся в условиях теоремы 1, применение которой завершает доказательство.

Изменяя соответствующим образом доказательство теорем 1 и 2, используя при этом результаты главы XI, можно доказать аналогичные теоремы о существовании неподвижной точки для случая, когда X — полное (или даже ограниченно полное) локально-выпуклое пространство.

Принцип неподвижной точки (теоремы 1 и 2) установлен в статье Шаудера [121a]. Более глубокие теоремы существования неподвижной точки, в частности для локально-выпуклых пространств, доказаны Лерзем (см. [71]). В них используется понятие категории, введенное в статье [73]. В последнее время эти вопросы значительно продвинуты М. А. Красносельским (см. его обзор [626]).

§ 4. Применения принципа неподвижной точки

Рассмотрим некоторые применения доказанных выше теорем.

4.1. Пусть имеется функция $\Phi(s, u)$ двух вещественных переменных, определенная в полосе $a \leq s \leq b$; $-\infty < u < \infty$; предположим, что Φ непрерывна и имеет непрерывную производную по u , удовлетворяющую условию

$$0 < m \leq \Phi'_u(s, u) \leq M \quad (a \leq s \leq b; -\infty < u < \infty). \quad (1)$$

При этих условиях существует единственная непрерывная в $[a, b]$ функция $u = x^*(s)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi(s, x^*(s)) = 0. \quad (2)$$

Этот результат может быть получен с помощью теоремы 1 (1. XVI). Для этого рассмотрим в пространстве $X = C$ операцию P , определенную следующим образом:

$$y = P(x), \quad y(s) = x(s) - \frac{2}{M+m} \Phi(s, x(s)). \quad (s \in [a, b]).$$

Без труда проверяется, что P является операцией сближения. В самом деле, если $y = P(x)$, $\tilde{y} = P(\tilde{x})$, то для любого $s \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |y(s) - \tilde{y}(s)| &= \left| x(s) - \tilde{x}(s) - \frac{2}{M+m} [\Phi(s, x(s)) - \Phi(s, \tilde{x}(s))] \right| = \\ &= |x(s) - \tilde{x}(s)| \left| 1 - \frac{2}{M+m} \Phi'_u(s, \theta(s)) \right| \leq \alpha \|x - \tilde{x}\|, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{M-m}{M+m},$$

и, следовательно, ввиду (1) $\alpha < 1$.

Существует единственная в C неподвижная точка x^* операции P . Остается заметить, что соотношение $x^* = P(x^*)$ равносильно равенству (2).

4.2. Рассмотрим далее систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Если ввести n -мерные векторные функции, понимая под этим упорядоченный набор из n вещественных функций, можно записать систему (3) в виде одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, t), \quad (4)$$

где $x(t)$ — вектор с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, а $\varphi(x, t)$ имеет компоненты $\varphi_1(x_1, \dots, x_n; t), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$. При этом

производная понимается как векторная функция с компонентами $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ..., $\frac{dx_n}{dt}$.

Допустим, что требуется найти решение системы (1) в промежутке $[a, b]$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_i(a) = y_0^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или в векторной форме

$$x(a) = y_0 \quad (5)$$

(y_0 — элемент пространства R^n с координатами $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_0^{(n)}$). Решение этой задачи равносильно разысканию решения интегрального уравнения

$$x(t) = y_0 + \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (6)$$

Теорема 1 (4. XVI). Пусть векторная функция $\varphi(y, t)$ определена для

$$y \in R^n; |y - y_0| < \delta; *) \quad t \in [a, b'],$$

ограничена для указанных значений y, t , измерима по t при каждом из возможных значений y и удовлетворяет условию Липшица по y :

$$|\varphi(y, t) - \varphi(\tilde{y}, t)| \leq K |y - \tilde{y}|, \quad (7)$$

где K не зависит от t .

Обозначим

$$M = \sup |\varphi(y, t)| \quad (|y - y_0| \leq \delta; t \in [a, b']).$$

Тогда, если промежуток $[a, b] \subset [a, b']$ достаточно мал, именно если

$$b - a < \min \left[\frac{\delta}{M}, \frac{1}{K} \right], \quad (8)$$

то интегральное уравнение (6), а следовательно, и система дифференциальных уравнений (3) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. При этом решение непрерывно зависит от начального вектора y_0 .

Доказательство. Введем пространство C_n непрерывных n -мерных векторных функций, заданных в $[a, b]$. C_n , естественным образом линейризованное, становится B -пространством, если положить для $x \in C_n$

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

*) Длину вектора y мы здесь и в дальнейшем обозначаем через $|y|$.

Имея в виду применение теоремы 3 (1. XVI) к уравнению (6), положим $X = C_n$, $Y = R_n$. Уравнение (6) можно записать в виде функционального уравнения

$$x = P_{y_0}(x); \quad (9)$$

здесь P_y — интегральная операция

$$\begin{aligned} z &= P_y(x) \quad (y \in R_n, x \in C_n), \\ z(t) &= y + \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

определенная на множестве Ω , состоящем из всех $x \in C_n$, удовлетворяющих условию

$$|x(t) - y_0| \leq \delta \quad (t \in [a, b]).$$

В качестве Y_0 следует взять совокупность векторов $y \in R^n$, для которых

$$|y - y_0| < \delta_1 = \delta - M(b - a).$$

Операция P_y при каждом $y \in Y_0$ переводит Ω в себя. Действительно,

$$|z(t) - y_0| \leq |y - y_0| + \left| \int_a^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \right| \leq \delta_1 + M(b - a) = \delta.$$

Проверим еще выполнение условия (2) § 1. Пусть $x, \tilde{x} \in \Omega$; $y \in Y_0$

$$\begin{aligned} \|P_y(x) - P_y(\tilde{x})\| &= \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^t [\varphi(x(\tau), \tau) - \varphi(\tilde{x}(\tau), \tau)] d\tau \right| \leq \\ &\leq K(b - a) \|x - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Принимая

$$\alpha = K(b - a),$$

имеем согласно (8) $\alpha < 1$.

Непрерывность операции P_y по y очевидна.

Итак, согласно теореме 3 (1. XVI) уравнение (9), а следовательно, и интегральное уравнение (6) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от y .

З а м е ч а н и е. Непрерывная зависимость решения x_y^* системы (3) от начального вектора y при $y = y_0$ в настоящем случае означает следующее: по каждому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что как только $|y - y_0| < \eta$, так $\|x_y^* - x_{y_0}^*\|_0 < \varepsilon$.

4.3. Применение к операции (9) принципа Шаудера позволяет установить существование решения уравнения (6) и, следовательно,

системы (1) при более слабых предположениях относительно функции $\varphi(y, t)$. Однако в этом случае не может быть доказана единственность решения и тем более непрерывная зависимость его от начального вектора.

Теорема 2 (4. XVI). Пусть функция φ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 кроме условия (7), которое заменено более слабым требованием: при каждом $t \in [a, b']$ функция $\varphi(y, t)$ непрерывна по y равномерно относительно $t \in [a, b]$.

Тогда, если

$$b - a \leq \frac{\delta}{M},$$

то система (3) имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее начальному условию (5).

Доказательство. Примем обозначения теоремы 1 и положим $P = P_{y_0}$. Легко видеть, что операция P переводит Ω в себя. Действительно, при доказательстве этого обстоятельства в теореме 1 было использовано лишь неравенство $M(b - a) \leq \delta$, которое выполняется и в настоящем случае.

Так же нетрудно проверить, что P — непрерывная операция. В самом деле, пусть $x_n \rightarrow x_0$; $x_n \in \Omega$; $z_n = P(x_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Поскольку функция $\varphi(y, t)$ непрерывна, по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|y - y'| < \eta$

$$|\varphi(y, t) - \varphi(y', t)| < \varepsilon \quad (t \in [a, b]). \quad (11)$$

Так как $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, то при достаточно больших n ($n \geq n_0$) будет $\|x_n - x_0\| < \eta$ и тем более

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \eta \quad (t \in [a, b]).$$

Принимая во внимание (11), можно написать для указанных n

$$|\varphi(x_n(t), t) - \varphi(x_0(t), t)| < \varepsilon \quad (t \in [a, b]).$$

Следовательно, при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|z_n - z_0\| &= \max_{t \in [a, b]} |z_n(t) - z_0(t)| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a, b]} \int_a^t |\varphi(x_n(\tau), \tau) - \varphi(x_0(\tau), \tau)| d\tau \leq \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Поэтому $z_n = P(x_n) \rightarrow z_0 = P(x_0)$.

Поскольку ясно, что Ω — выпуклое замкнутое множество, то для применения теоремы 2 (3. XVI) надо установить лишь компактность множества $P(\Omega)$. Этим завершится доказательство теоремы.

Критерий компактности множества в пространстве C (1.3.3) без труда переносится и на пространство C_n . Таким образом, надо доказать, что функции семейства $P(\Omega)$ равномерно непрерывны (равно-

мерная ограниченность их вытекает из того, что $P(\Omega) \subset \Omega$, а Ω — ограниченное множество). Но это является следствием неравенства

$$|z(t') - z(t)| = \left| \int_t^{t'} \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \right| \leq M |t' - t| \quad (x \in \Omega; z = P(x)).$$

Теорема доказана.

4.4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x(t)) dt. \quad (12)$$

Применение теоремы 1 (1. XVI) позволяет доказать, что при достаточно малых λ уравнение (12) имеет единственное решение.

Теорема 3 (4. XVI). Пусть функция $\varphi(s, t, u)$ определена и непрерывна в параллелепипеде

$$a \leq s, t \leq b; |u| \leq h$$

и (при каждом фиксированных s и t) удовлетворяет условию Липшица по u :

$$|\varphi(s, t, u) - \varphi(s, t, u')| \leq K |u - u'|,$$

причем K не зависит от s и t .

Тогда если обозначить

$$M = \max |\varphi(s, t, u)| \quad (a \leq s, t \leq b; |u| \leq h),$$

то при λ , удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \min \left[\frac{h}{M(b-a)}, \frac{1}{K(b-a)} \right], \quad (13)$$

уравнение (12) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. В теореме 1 (1. XVI) положим $X = C$, а в качестве Ω возьмем совокупность тех $x \in C$, для которых $\|x\| \leq h$. Операцию P определим так:

$$z = P(x), \quad z(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x(t)) dt.$$

Условие (13) обеспечивает принадлежность $P(x) \in \Omega$. Действительно,

$$\|P(x)\| \leq |\lambda| M(b-a) < h \quad (x \in \Omega).$$

Далее

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(x')\| &\leq |\lambda| \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |\varphi(s, t, x(t)) - \varphi(s, t, x'(t))| dt \leq \\ &\leq |\lambda| K(b-a) \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Следовательно, если положить $\alpha = |\lambda| K(b - a)$, то из (13) получаем $\alpha < 1$, т. е. P есть операция сближения.

Поскольку уравнение (12) можно записать в форме

$$x = P(x), \quad (14)$$

то существование и единственность решения уравнения (12) вытекают из теоремы 1 (1. XVI), все условия которой, как проверено выше, удовлетворены.

З а м е ч а н и е 1. Возьмем произвольную непрерывную функцию x_0 ($\|x_0\| \leq h$) и построим исходя из нее последовательность $\{x_n\}$ функций

$$x_{n+1}(s) = \lambda \int_a^b \varphi(s, t, x_n(t)) dt \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Тогда, как это следует из теоремы 1 (1. XVI), построенная последовательность равномерно сходится к решению уравнения (12).

З а м е ч а н и е 2. Применение теоремы 3 (1. XVI) дает возможность установить непрерывную зависимость решения уравнения (12) от λ для λ , удовлетворяющих условию (13).

4.5. Использование принципа Шаудера позволяет в некоторых случаях увеличить границу тех λ , для которых можно утверждать разрешимость уравнения (12).

Предположим, что функция φ имеет вид

$$\varphi(s, t, u) = K(s, t) \psi(t, u), \quad (15)$$

где $K(s, t)$ непрерывна в квадрате $[a, b; a, b]$, а $\psi(t, u)$ непрерывна для $t \in [a, b]$, $|u| \leq h$. Справедлива

Теорема 4 (4. XVI). Если в интегральном уравнении (12) функция имеет вид (15) и

$$|\lambda| \leq \frac{h}{M_1 M_2 (b - a)}, \quad (16)$$

где $M_1 = \max_{a \leq s, t \leq b} |K(s, t)|$; $M_2 = \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ |u| \leq h}} |\psi(t, u)|$, то уравнение (12) имеет непрерывное решение.

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения, докажем, как и выше, что операция P переводит множество Ω в себя. Поскольку множество Ω выпукло и замкнуто, а операция P непрерывна (ср. доказательство теоремы 2), то, как и в теореме 2, достаточно проверить, что $P(\Omega)$ компактно, тогда будет применима теорема 2 (3. XVI). Так как $P(\Omega)$ есть подмножество пространства C , то надо доказать, что функции из $P(\Omega)$ равномерно ограничены и равносте-

пенно непрерывны. Первое очевидно, а второе является следствием неравенства ($z = P(x)$), $x \in \mathfrak{Q}$)

$$\begin{aligned} |z(s) - z(s')| &= |\lambda| \left| \int_a^b [K(s, t) - K(s', t)] \psi(t, x(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M_2 \int_a^b |K(s, t) - K(s', t)| dt. \end{aligned}$$

Трактуя интегральную операцию как операцию в пространстве L^2 , можно с помощью принципа Шаудера установить результат, аналогичный теореме 4.

Теорема 5 (4. XVI). Пусть в уравнении (12) функция $\varphi(s, t, u)$ имеет вид (15), причем функция $K(s, t)$ измерима в квадрате $[a, b; a, b]$ и удовлетворяет условию

$$A^2 = \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|^2 dt < \infty,$$

а функция $\psi(t, u)$ определена в прямоугольнике $[a, b; -h, h]$ и непрерывна там.

Тогда, если

$$|\lambda| \leq \frac{h}{AM_2 \sqrt{b-a}}, \quad (17)$$

то уравнение (12) имеет решение, суммируемое с квадратом на $[a, b]$.

Доказательство, как и выше, опирается на теорему 2 (3. XVI). Но на этот раз мы положим $X = L^2$. В качестве $\mathfrak{Q}$ возьмем множество тех $x \in L^2$, для которых

$$|x(t)| \leq h \text{ почти для всех } t \in [a, b],$$

а за P сохраним прежний смысл.

Проверим, что условие (17) обеспечивает включение: $P(\mathfrak{Q}) \subset \mathfrak{Q}$. Действительно, если $x \in \mathfrak{Q}$ и $z = P(x)$, то для $s \in [a, b]$ по неравенству Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} |z(s)| &= |\lambda| \left| \int_a^b K(s, t) \psi(t, x(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |\psi(t, x(t))|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq |\lambda| AM_2 \sqrt{b-a} \leq h. \end{aligned}$$

Докажем, что операция P непрерывна. Пусть $x, x' \in \Omega$ и $z = P(x)$, $z' = P(x')$. Имеем

$$\begin{aligned} \|z(s) - z'(s)\|^2 &\leq |\lambda|^2 \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt \leq \\ &\leq |\lambda|^2 A^2 \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. По непрерывности функции ψ найдем $\eta > 0$ так, что при $|u - u'| < \eta$ будет

$$|\psi(t, u) - \psi(t, u')| < \varepsilon \quad (t \in [a, b]).$$

Разобьем далее промежуток $[a, b]$ на два множества e_1 и e_2 , относя в e_1 те точки, в которых разность $|x(t) - x'(t)| < \eta$, а в e_2 остальные точки. Обозначая $\|x - x'\| = \gamma$, будем иметь

$$\gamma^2 = \int_a^b |x(t) - x'(t)|^2 dt \geq \int_{e_2} |x(t) - x'(t)|^2 dt \geq \eta^2 \text{mes } e_2,$$

так что

$$\text{mes } e_2 \leq \frac{\gamma^2}{\eta^2}.$$

Оценим теперь интеграл $I = \int_a^b |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{e_1} + \int_{e_2} |\psi(t, x(t)) - \psi(t, x'(t))|^2 dt \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \text{mes } e_1 + 4M_2^2 \text{mes } e_2 \leq \varepsilon^2(b-a) + \frac{4M_2^2 \gamma^2}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Используя эту оценку, получим из (18)

$$\begin{aligned} \|z - z'\|^2 &= \int_a^b |z(s) - z'(s)|^2 ds \leq \\ &\leq |\lambda|^2 A^2 (b-a) \left[\varepsilon^2(b-a) + \frac{4M_2^2 \|x - x'\|^2}{\eta^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, z и z' могут быть сделаны сколь угодно близкими, если достаточно близки x и x' .

Поскольку ясно, что Ω — выпуклое и замкнутое множество, остается доказать компактность множества $P(\Omega)$. Для этого восполь-

зуется теоремой М. Рисса (IX. 1.3), на основании которой достаточно проверить, что

$$\int_a^b |z(t+\eta) - z(t)|^2 dt \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

равномерно относительно $z \in P(\Omega)$. *)

Пусть $x \in \Omega$, $z = P(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b |z(s+\eta) - z(s)|^2 ds &= \int_a^b \left| \lambda \int_a^b [K(s+\eta, t) - K(s, t)] \psi(t, x(t)) dt \right|^2 ds \leq \\ &\leq M_2^2 |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s+\eta, t) - K(s, t)|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Докажем, что последний интеграл стремится к нулю.

Это очевидно, если функция $K(s, t)$ непрерывна. Если же $K(s, t)$ общего вида, то можно подобрать последовательность $\{K_n(s, t)\}$ непрерывных функций такую, что

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b \int_a^b |K(s+\eta, t) - K(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\ &\leq \left[\int_a^b \int_a^b |K_n(s+\eta, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left[\int_a^b \int_a^b |K(s+\eta, t) - K_n(s+\eta, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_n(s, t)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Выбирая n настолько большим, чтобы последние два интеграла в правой части были меньше произвольного $\varepsilon > 0$, и затем η настолько малым, чтобы первый интеграл был также меньше ε , получим требуемый результат в общем случае.

*) В теореме М. Рисса имеется еще условие ограниченности норм, о котором мы не упоминаем в тексте, так как оно очевидно налицо.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если функция $\psi(t, u)$ определена в полосе $a \leq t \leq b$; $-\infty < u < \infty$, и, кроме того,

$$\frac{\psi(t, h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0, \quad (19)$$

то при достаточно большом h условие (16) теоремы 4 и условие (17) теоремы 5 будут выполнены, каковы бы ни были λ , M_1 , M_2 и $b - a$. Таким образом, (19) обеспечивает существование решения уравнения (12) для любого λ .

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 4 и 5 можно доказать при нескольких условиях, накладываемых на входящие в уравнения функции. Также не представляет труда сформулировать теоремы, в которых уравнение (12) трактовалось бы в функциональном пространстве, отличном от C и L^2 (например, в L).

О применении принципа неподвижной точки к доказательству существования решения нелинейного интегрального уравнения см. [84 а, б].

Важнейшие применения принципа Шаудера даны им в его работах по эллиптическим дифференциальным уравнениям, а теорем Лерэ — Шаудера — в работах по гиперболическим уравнениям (см. [121в]).

ГЛАВА XVII

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Дальнейшее изучение нелинейных операций может быть осуществлено путем установления их связи с линейными, точнее говоря, с помощью локальной аппроксимации нелинейных операций линейными.

В настоящей главе развивается необходимый для этого аппарат дифференциального исчисления для нелинейных операций, который полностью будет использован лишь в следующей главе.

§ 1. Первая производная

1.1. Пусть имеется операция P , отображающая открытое множество Ω одного B -пространства X в множество Δ другого B -пространства Y . Возьмем фиксированный элемент $x_0 \in \Omega$ и предположим, что существует такая линейная операция $U \in [X \rightarrow Y]$, *) что при любом $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x). \quad (1)$$

В этом случае говорят, что линейная операция U является *производной* операции P в точке x_0 . При этом пишут

$$U = P'(x_0).$$

Часто так определенную производную называют *производной Гато*, или *слабой производной*, а элемент $U(x)$ — *дифференциалом Гато*.

Обозначим через $\bar{K}$ множество всех $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Если предельное соотношение (1) выполняется равномерно относительно $x \in \bar{K}$, то говорят, что операция P *дифференцируема* в точке x_0 , а производную $P'(x_0)$ называют в этом случае *производной Фреше*, или *сильной производной*. **)

Дифференцируемость операции P в точке x_0 означает, иначе говоря, что существует такая линейная операция $U \in [X \rightarrow Y]$, что

*) Напомним, что символом $[X \rightarrow Y]$ мы обозначаем пространство всех линейных операций, переводящих X в Y .

**) Определение производной Фреше дано в [109в], слабой производной — в [28а, б, в]. Определение производной функционала в вариационном исчислении см. [1] и [25].

по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|\Delta x\| < \delta$ ($\Delta x \in X$) следует

$$\|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - U(\Delta x)\| \leq \varepsilon \|\Delta x\|. \quad (2)$$

Простое доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

1.2. Укажем на некоторые простейшие свойства производной.

I. Если операция P дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке. *)

Это непосредственно следует из (2).

II. Пусть $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, тогда, если существуют производные $P'_1(x_0)$ и $P'_2(x_0)$, то существует и

$$P'(x_0) = \alpha_1 P'_1(x_0) + \alpha_2 P'_2(x_0).$$

При этом, если P_1 и P_2 дифференцируемы в точке x_0 , то будет дифференцируемой и P .

Это следует непосредственно из определения.

III. Если $P = U \in [X \rightarrow Y]$, то P дифференцируема в каждой точке $x_0 \in X$ и

$$P'(x_0) = U.$$

Действительно,

$$\frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x).$$

IV. Пусть P — операция, переводящая $\mathfrak{Q} \subset X$ в открытое множество $\Delta \subset Y$, а Q — операция, отображающая множество Δ в некоторое B -пространство Z . Положим $R = QP$ и пусть Q дифференцируема в точке $y_0 = P(x_0)$ ($x_0 \in \mathfrak{Q}$), а P имеет производную в точке x_0 . Тогда операция R имеет производную в точке x_0 и

$$R'(x_0) = Q'(P(x_0)) P'(x_0) = Q'(y_0) P'(x_0).$$

Действительно, обозначим $U = P'(x_0)$, $V = Q'(y_0)$ и возьмем произвольное $x \in X$. Положим $\Delta y = P(x_0 + tx) - P(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{R(x_0 + tx) - R(x_0)}{t} &= \frac{QP(x_0 + tx) - QP(x_0)}{t} = \frac{Q(y_0 + \Delta y) - Q(y_0)}{t} = \\ &= \frac{V(\Delta y) + \zeta(\Delta y)}{t} = V\left(\frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t}\right) + \frac{\zeta(\Delta y)}{\|\Delta y\|} \left\| \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} \right\|, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\zeta(\Delta y) = Q(y_0 + \Delta y) - Q(y_0) - V(\Delta y), \quad \|\zeta(\Delta y)\| = o(\|\Delta y\|).$$

При $t \rightarrow 0$ первое слагаемое в (3) имеет пределом

$$[VP'(x_0)](x) = VU(x),$$

*) Одного предположения о наличии производной недостаточно.

а второе слагаемое стремится к нулю, так как отношение $\frac{\zeta(\Delta y)}{\|\Delta y\|}$ стремится к нулю, а скалярный множитель ограничен. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + tx) - R(x_0)}{t} = VU(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если P дифференцируема в точке x_0 , то R также дифференцируема.

V. Если в условиях предложения IV операция $Q = V$ линейная, то

$$R'(x_0) = VP'(x_0).$$

1.3. Отметим теперь одно неравенство, которое заменяет в общем случае формулу конечных приращений, имеющую место для случая обычных вещественных функций.

Пусть x_0 и $x \in \Omega$; предположим также, что все точки прямолинейного отрезка $[x_0, x]$, соединяющего x_0 и x , входят в Ω , и пусть в каждой точке отрезка $[x_0, x]$ существует производная операции P . Обозначив $\Delta x = x - x_0$ и взяв произвольный функционал $g \in Y^*$, положим

$$\varphi(t) = g(P(x_0 + t\Delta x)). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что вещественная функция φ имеет производную в промежутке $[0, 1]$. В самом деле,

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = g\left(\frac{P(x_0 + t\Delta x + \Delta t\Delta x) - P(x_0 + t\Delta x)}{\Delta t}\right). \quad (5)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ выражение под знаком функционала g имеет пределом $P'(x_0 + t\Delta x)(\Delta x)$, а потому, в силу линейности функционала g , правая часть (5) имеет предел

$$\varphi'(t) = g(P'(x_0 + t\Delta x)(\Delta x)). \quad (6)$$

Напишем для функции φ формулу конечных приращений

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \quad (0 < \theta < 1).$$

Принимая во внимание (4) и (6), получим отсюда

$$g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)) = g(P'(x_0 + \theta\Delta x)(\Delta x))$$

и, следовательно,

$$|g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))| \leq \|g\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta\Delta x)\| \|\Delta x\|. \quad (7)$$

Выберем теперь функционал $g \neq 0$ так, чтобы было

$$g(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)) = \|g\| \|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)\|.$$

Тогда из (7) получаем

$$\|P(x) - P(x_0)\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x)\| \|\Delta x\| \quad (\Delta x = x - x_0).$$

Применяя оценку (8) к операции $P \rightarrow U$ ($U \in [X \rightarrow Y]$) и используя при этом утверждения II и III из 1.2, мы приходим к неравенству

$$\|P(x) - P(x_0) - U(\Delta x)\| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - U\| \|\Delta x\|. \quad (8)$$

В частности, полагая здесь $U = P'(x_0)$, получим

$$\begin{aligned} \|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - P'(x_0)\Delta x\| &\leq \\ &\leq \|\Delta x\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - P'(x_0)\|. \quad (9) \end{aligned}$$

Соотношение (8) мы будем называть *формулой конечных приращений*, а неравенство (9) *формулой конечных приращений с остаточным членом*.

1.4. Укажем на некоторые применения формул конечных приращений.

Предположим, что производная операции P существует в каждой точке некоторого открытого множества $\Omega_0 \subset \Omega$. Тем самым в Ω_0 определена операция P' , сопоставляющая элементу $x \in \Omega_0$ элемент $P'(x) \in [X \rightarrow Y]$. Докажем, что если операция P' непрерывна в точке $x_0 \in \Omega_0$, то P дифференцируема в этой точке.

В самом деле, в силу предположенной непрерывности операции P' , каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$ так, что

$$\|P'(x) - P'(x_0)\| < \varepsilon \text{ как только } \|x - x_0\| < \delta,$$

т. е. если $\|\Delta x\| < \delta$, то $\sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_0 + \theta \Delta x) - P'(x_0)\| \leq \varepsilon$. Применяя это к (9), приходим к неравенству

$$\|P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) - P'(x_0)\Delta x\| \leq \varepsilon \|\Delta x\|,$$

которое и означает дифференцируемость P в точке x_0 .

Формула конечных приращений может оказаться полезной при доказательстве существования неподвижной точки у операции P .

Теорема 1 (1. XVII). Пусть операция P отображает множество $\Omega \subset X$ в X и имеет в каждой точке выпуклого замкнутого множества $\Omega_0 \subset \Omega$ производную. Тогда, если

- 1) $P(\Omega_0) \subset \Omega_0$;
- 2) $\sup_{x \in \Omega_0} \|P'(x)\| = \alpha < 1$,

то в Ω_0 существует единственная неподвижная точка операции P .

Доказательство. Достаточно проверить, что в рассматриваемой ситуации выполняются условия теоремы 1 (1. XVI), т. е., что операция P является операцией сжатия.

Пусть $x_1, x_2 \in \mathfrak{Q}_0$. По формуле конечных приращений имеем

$$\|P(x_2) - P(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| \sup_{0 < \theta < 1} \|P'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))\| \leq \alpha \|x_2 - x_1\|,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если предположить, что операция P' непрерывна в $\mathfrak{Q}_0$, то условие 2) оказывается и необходимым для того, чтобы P была операцией сжатия.

Действительно, если

$$\sup_{x \in \mathfrak{Q}_0} \|P'(x)\| \geq 1,$$

то найдется числовая последовательность $\alpha_n \rightarrow 1$ и последовательность $\{x_n\}$ элементов из $\mathfrak{Q}_0$ такие, что

$$\|P'(x_n)\| > \alpha_n \quad (n = 1, 2, \dots);$$

при этом можно считать, что точки x_n — внутри $\mathfrak{Q}_0$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ по определению производной найдется элемент x'_n такой, что для достаточно малых t

$$\left\| \frac{P(x_n + tx'_n) - P(x_n)}{t} \right\| > \alpha_n \|x'_n\| \quad (|t| \leq t_n; n = 1, 2, \dots).$$

Полагая $y_n = x_n + t_n x'_n$, получаем такую последовательность пар элементов x_n, y_n , что

$$\frac{\|P(y_n) - P(x_n)\|}{\|y_n - x_n\|} > \alpha_n, \quad (10)$$

т. е. P не есть операция сжатия.

1.5. Выясним смысл введенных выше понятий в случае, когда одно или оба пространства X и Y конечномерны.

Предположим сначала, что X — одномерное вещественное пространство, элемент которого мы будем отождествлять с числами.

Пусть $U \in [X \rightarrow Y]$. Нетрудно видеть, что в данном случае U имеет вид

$$U(t) = ty_0 \quad (t \in X), \quad (11)$$

где y_0 — некоторый элемент из Y . При этом, поскольку $\|U(t)\| = |t| \|y_0\|$,

$$\|U\| = \|y_0\|. \quad (12)$$

Наоборот, каков бы ни был элемент $y_0 \in Y$, формула (11) дает операцию $U \in [X \rightarrow Y]$. Ясно, что соответствие между элементами пространств Y и $[X \rightarrow Y]$ взаимно однозначно, линейно и, согласно (12), сохраняет норму. Таким образом, можно считать $[X \rightarrow Y] = Y$.

Рассмотрим теперь операцию F , переводящую $\mathfrak{Q} \subset X$ в Y . Операция F является, таким образом, функцией числового аргумента со значениями в пространстве Y .

Существование производной $F'(t_0) = y_0 \in Y$ означает, что при любом $t \in X$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \tau t) - F(t_0)}{\tau} = ty_0. \quad (13)$$

Обозначая $\Delta t = \tau t$, можем переписать (13) в форме

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = y_0.$$

Итак, в рассмотренном случае определение $F'(t_0)$ ничем не отличается от определения обычной производной вещественной функции вещественного аргумента. Отметим, что, поскольку $F'(t_0) \in Y$, операция F' , так же как и F , переводит некоторое числовое множество в Y .

Как и в случае вещественных функций, нетрудно доказать, что наличие производной $F'(t_0)$ обеспечивает дифференцируемость операции F в точке t_0 .

Если $\Omega = [a, b]$, то множество $F(\Omega)$ естественно рассматривать как кривую в пространстве Y . Элемент $F'(t_0)$ дает тогда направление касательной к данной кривой в точке $y_0 = F(t_0)$.

1.6. Пусть теперь X и Y — конечномерные пространства. Обозначим размерность X через μ , а размерность Y через ν . Как было указано в III.2.8, всякая операция $U \in [X \rightarrow Y]$ определяется прямоугольной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{pmatrix} \quad (14)$$

посредством формул

$$y = U(x) \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in Y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in X) \\ \eta_i = \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, \nu). \quad (15)$$

Рассмотрим некоторую операцию P , переводящую $\Omega \subset X$ в Y . Задание операции P равносильно указанию ν числовых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ от μ переменных так, что, если

$$y = P(x) \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu) \in Y, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \in \Omega),$$

то

$$\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu) \quad (i = 1, 2, \dots, \nu). \quad (16)$$

Допустим, что существует производная $P'(x_0) = U$ ($x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_\mu^{(0)})$). Пусть U определяется матрицей (14). Развертывая равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + tx) - P(x_0)}{t} = U(x)$$

и принимая во внимание (15) и (16), получим ν соотношений

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\xi_1^{(0)} + t\xi_1, \dots, \xi_\mu^{(0)} + t\xi_\mu) - \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_\mu^{(0)})}{t} = \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} \xi_k \quad (i=1, 2, \dots, \nu). \quad (17)$$

Так как эти равенства должны иметь место для всех $x \in X$, то, беря в каждом из них последовательно такие x , у которых все координаты равны нулю, кроме одной, равной единице, мы найдем, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ имеют частные производные по $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$, именно

$$\frac{\partial \varphi_i(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_\mu^{(0)})}{\partial \xi_k} = a_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, \nu; k=1, 2, \dots, \mu).$$

Таким образом, производная $P'(x_0)$ есть линейная операция, определяемая матрицей частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$.

Отметим, однако, что существование частных производных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ не обеспечивает еще существования производной $P'(x_0)$, как показывает следующий пример: пусть $\nu=1, \mu=2$

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, \quad \varphi_1(0, 0) = 0; \quad x_0 = (0, 0).$$

Ясно, что $\frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_2} = 0$. Поэтому, если бы производная $P'(x_0)$ существовала, это была бы нулевая операция и, следовательно, соотношение (17) дало бы

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(t\xi_1, t\xi_2)}{t} = 0.$$

Между тем в действительности этот предел равен бесконечности, если только $\xi_1 \neq 0$ и $\xi_2 \neq 0$.

Предоставляем читателю доказать, что для дифференцируемости операции P необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ имели дифференциалы. Отметим, что в общем случае дифференцируемость операции P не является следствием существования производной, как это вытекает из известного факта элементарного анализа.

1.7. Рассмотрим функцию F вещественного аргумента, значения которой суть элементы B -пространства X . Если F определена в промежутке $[a, b]$, то имеет смысл говорить об интеграле от F , понимая под этим предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

$$(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b; \tau_k \in [t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, n-1)$$

при $\lambda = \max_k [t_{k+1} - t_k] \rightarrow 0$. В случае существования указанного предела он и называется *интегралом* функции F и обозначается символом $\int_a^b F(t) dt$. Как и для функций с вещественными значениями, доказывается, что непрерывная функция равномерно непрерывна и потому интегрируема, т. е. для нее интеграл существует. Свойства обычного интеграла Римана переносятся вместе с их доказательствами на определенный выше абстрактный интеграл. Отметим среди них лишь три:

I. Если $U \in [X \rightarrow Y]$, то

$$\int_a^b U(F(t)) dt = U \left(\int_a^b F(t) dt \right).$$

II. Если $F(t) = \varphi(t) x_0$ ($t \in [a, b]$), где $x_0 \in X$ — фиксированный элемент и $\varphi(t)$ вещественная интегрируемая функция, то

$$\int_a^b F(t) dt = x_0 \int_a^b \varphi(t) dt.$$

$$\text{III. } \left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Вернемся теперь к рассмотрению нелинейных операций.

Пусть имеется некоторая операция R , определенная на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ($x_0, x_0 + \Delta x \in X$), со значениями в пространстве $[X \rightarrow Y]$. По определению полагаем

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} R(x) dx &= \int_0^1 R(x_0 + t \Delta x) \Delta x dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} R(x_0 + \tau_k \Delta x) \Delta x (t_{k+1} - t_k). \end{aligned}$$

Очевидно, если R непрерывна, то интеграл существует и представляет собой элемент из Y . Интегралы такого типа впервые введены в [27a].

В частности, если $R = P'$, где P — операция, переводящая $\mathcal{Q} \subset X$ в Y , имеющая непрерывную производную на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset \mathcal{Q}$, то интеграл от $P'(x)$ существует, и, как мы докажем, справедливо соотношение

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P'(x) dx = P(x_0 + \Delta x) - P(x_0), \quad (18)$$

являющееся обобщением основной теоремы интегрального исчисления: формулы Ньютона — Лейбница.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P'(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P'(x_0 + \tau_k \Delta x) \Delta x (t_{k+1} - t_k) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P'(\bar{x}_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

$$(\bar{x}_k = x_0 + \tau_k \Delta x; \Delta x_k = (t_{k+1} - t_k) \Delta x; k = 0, \dots, n-1).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(x_0 + \Delta x) - P(x_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_0 + t_{k+1} \Delta x) - P(x_0 + t_k \Delta x)] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_{k+1}) - P(x_k)]. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой конечных приращений, найдем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} [P(x_{k+1}) - P(x_k) - P'(\bar{x}_k) \Delta x_k] \right\| &\leq \\ &\leq \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|P'(x_k + \theta \Delta x_k) - P'(\bar{x}_k)\|, \end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание непрерывность P' , а следовательно, и равномерную ее непрерывность на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, получим требуемый результат.

З а м е ч а н и е. Из свойства III интеграла следует, что если

$$\|R(x_0 + \tau \Delta x)\| \leq \varphi(t_0 + \tau \Delta t) \quad (\tau \in [0, 1]) \quad (19)$$

и

$$\|\Delta x\| \leq \Delta t, \quad (20)$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} R(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varphi(t) dt. \quad (21)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} R(x) dx \right\| &= \left\| \int_0^1 R(x_0 + \tau \Delta x) (\Delta x) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\Delta x\| \int_0^1 \|R(x_0 + \tau \Delta x)\| d\tau \leq \Delta t \int_0^1 \varphi(t_0 + \tau \Delta t) d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Из (21), в частности, следует, что если неравенство

$$\|R(x)\| \leq \varphi(t) \quad (22)$$

выполнено для всех таких x и t , что

$$\|x - x_0\| \leq t - t_0, \quad (23)$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} R(x) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t) dt, \quad (24)$$

где x_1 — любой элемент, удовлетворяющий условию $\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0$.

Действительно, полагая $\Delta x = x_1 - x_0$; $\Delta t = t_1 - t_0$; $x = x_0 + \tau \Delta x$; $t = t_0 + \tau \Delta t$, находим, что $\|\Delta x\| \leq \Delta t$ и

$$\|x - x_0\| = \tau \|\Delta x\| \leq \tau \Delta t = t - t_0 \quad (\tau \in [0, 1]),$$

т. е. выполнено (23), а тогда вследствие (22)

$$\|R(x_0 + \tau \Delta x)\| \leq \varphi(t_0 + \tau \Delta t) \quad (\tau \in [0, 1]).$$

Применяя (21), получим (24).

§ 2. Вторая производная и билинейные операции

2.1. Пусть в открытом множестве Ω B -пространства X существует производная P' операции P , отображающей множество Ω в B -пространство Y . Как отмечалось выше, P' можно рассматривать как операцию, отображающую множество Ω в пространство $[X \rightarrow Y]$. Поэтому имеет смысл говорить о производной этой операции в точке $x_0 \in \Omega$, которую, если она существует, называют *второй производной* данной операции P и обозначают $P''(x_0)$. Если операция P' дифференцируема, то говорят, что P *дважды дифференцируема*.

Если вторая производная существует в каждой точке множества Ω , то тем самым определена операция P'' , производная которой называется *третьей производной* данной операции P и вообще *производная $P^{(n)}(x_0)$ порядка n* в точке x_0 есть по определению производная операции $P^{(n-1)}$. Ясно, что

$$P^{(n)}(x_0) \in \overbrace{[X \rightarrow [X \rightarrow \dots \rightarrow [X \rightarrow Y] \dots]]}^n.$$

2.2. Элементы пространства $[X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$ непосредственно интерпретируются недостаточно наглядно. Для выяснения сущности этих образований целесообразно ввести новое понятие.

Пусть даны два B -пространства X и Y ; и пусть каждой упорядоченной паре элементов $x, x' \in X$ отнесен элемент

$$y = B(x, x') \in Y.$$

Бинарная операция B называется *билинейной*, если при этом соблюдены два условия:

I. Каковы бы ни были $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$ и числа α, β ,

$$\begin{aligned} B(\alpha x_1 + \beta x_2, x') &= \alpha B(x_1, x') + \beta B(x_2, x'), \\ B(x, \alpha x'_1 + \beta x'_2) &= \alpha B(x, x'_1) + \beta B(x, x'_2). \end{aligned} \quad (x, x' \in X) \quad (1)$$

II. Существует такое вещественное $M > 0$, что при любых $x, x' \in X$

$$\|B(x, x')\| \leq M \|x\| \|x'\|. \quad (2)$$

Как и для линейных операций, наименьшее значение M в неравенстве (2) называется *нормой* операции B и обозначается обычным образом: $\|B\|$. Ясно, что

$$\|B\| = \sup_{\|x\|, \|x'\| \leq 1} \|B(x, x')\|. \quad (3)$$

Множество всех билинейных операций с нормой (3) и естественным образом линеаризованное является, как нетрудно проверить, B -пространством, которое мы будем обозначать $[X^2 \rightarrow Y]$.

Не останавливаясь на деталях, укажем, что аналогичным образом вводятся пространства $[X^n \rightarrow Y]$ n -линейных операций. *)

Рассмотрим несколько примеров билинейных операций.

В простейшем случае $X = Y = \mathbf{R}^1$, общая форма билинейной операции будет

$$B(x, x') = \alpha x x'$$

(α — вещественное число).

Пусть теперь X и Y — конечномерные пространства; X — μ -мерное; Y — ν -мерное. Обозначим через x_i ($i = 1, 2, \dots, \mu$) элемент пространства X , все координаты которого, кроме i -й, равны нулю, а i -я равна единице. Аналогичное значение имеет $y_j \in Y$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$). Рассмотрим операцию $B \in [X^2 \rightarrow Y]$. Положив

$$B(x_i, x_j) = (a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(\nu)}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, \mu),$$

в силу (1) будем иметь для произвольных элементов $x, x' \in X$ ($x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu)$, $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_\mu)$)

$$y = B(x, x') = B\left(\sum_{i=1}^{\mu} \xi_i x_i, \sum_{j=1}^{\mu} \xi'_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{\mu} \xi_i \xi'_j B(x_i, x_j).$$

Таким образом, если $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu)$, то

$$\eta_k = \sum_{i,j=1}^{\mu} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j \quad (k = 1, 2, \dots, \nu), \quad (4)$$

*) Подробное изложение теории n -линейных операций см. [27 б], а также Гавури и Хилл.

т. е. координаты элемента y суть билинейные формы координат элементов x и x' .

Ясно, что какую бы матрицу с тремя входами

$$(a_{ij}^{(k)}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, \mu; k = 1, 2, \dots, \nu) \quad (5)$$

ни взять, операция B , определенная по формулам (4), будет билинейной.

Итак, в рассмотренном случае каждая билинейная операция определяет и определяется сама матрицей с тремя входами (5).

Что касается нормы операции B , то она, разумеется, зависит от нормировки пространств X и Y . Так, если $X = R^\mu$, $Y = R^\nu$, то из (4) с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$|\eta_k| = \left| \sum_{i,j=1}^{\mu} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi'_j \right| \leq \left[\sum_{i=1}^{\mu} |\xi_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{\mu} \left| \sum_{i=1}^{\mu} a_{ij}^{(k)} \xi'_j \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \Lambda_k \|x\| \|x'\|$$

$$(k = 1, 2, \dots, \nu),$$

где Λ_k^2 означает наибольшее собственное значение матрицы $A_k A_k^*$ представляющей произведение матрицы

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1\mu}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2\mu}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1}^{(k)} & a_{\mu 2}^{(k)} & \dots & a_{\mu \mu}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, \nu)$$

и транспонированной A_k^* (ср. III. 2.8). Таким образом,

$$\|y\| = \left[\sum_{k=1}^{\nu} |\eta_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\nu} \Lambda_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|x\| \|x'\|.$$

Это дает оценку для $\|B\|$:

$$\|B\| \leq \left[\sum_{k=1}^{\nu} \Lambda_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Поскольку

$$\Lambda_k^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\mu} |a_{ij}^{(k)}|^2 \quad (k = 1, 2, \dots, \nu),$$

то из (6) получается более грубая, но и более простая оценка

$$\|B\| \leq \left[\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} |a_{ij}^{(k)}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Если положить $X = m_\mu$, $Y = m_\nu$, то с помощью очевидных рассуждений можно получить такую оценку для $\|B\|$:

$$\|B\| \leq \max_k \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu} |a_{ij}^{(k)}|.$$

Значительно больший интерес представляют примеры билинейных операций в бесконечномерных пространствах, в частности и главным образом, в пространствах функций.

Операция B :

$$y = B(x, x'), \quad y(s) = \int_0^1 \int_0^1 K(s, t, u) x(t) x'(u) dt du \quad (7)$$

будет билинейной в том или ином пространстве функций (заданных на $[0, 1]$) в зависимости от требований, накладываемых на функцию K — ядро операции. Так, если предполагать функцию K непрерывной, билинейность B будет иметь место, каковы бы ни были X и Y из числа пространств C , L^p ($1 \leq p \leq \infty$).

Еще больший интерес для приложений представляет случай операции вида

$$y = B(x, x'), \quad (8)$$

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) x'(t) dt. \quad (9)$$

Пусть сначала $X = Y = L^p$ ($p \geq 2$). Тогда, если $M < \infty$, где

$$M^p = \begin{cases} \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{p}{p-2}} dt \right]^{p-2} ds & (p > 2) \\ \int_0^1 \sup_s |K(s, t)| dt & (p = 2), \end{cases}$$

то $B \in [X^2 \rightarrow Y]$.

В самом деле, произведение, стоящее под знаком интеграла в (9), суммируемо для почти всех $s \in [0, 1]$. Чтобы убедиться в этом случае $p > 2$, достаточно применить к интегралу (9) обобщенное неравенство Гёльдера (II. 3.4) с показателями $\frac{p}{p-2}$, p , p . На основании этого же неравенства получим

$$\begin{aligned} |y(s)|^p &= \left| \int_0^1 K(s, t) x(t) x'(t) dt \right|^p \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{p}{p-2}} dt \right]^{p-2} \int_0^1 |x(t)|^p dt \int_0^1 |x'(t)|^p dt. \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 |y(s)|^p ds \leq M^p \|x\|^p \|x'\|^p < \infty. \quad (10)$$

Итак, $y \in L^p$. Вместе с тем доказано, что для операции B выполнено неравенство (2). Ввиду того, что аддитивность (соотношения (1)) очевидна, билинейность операции B установлена. Одновременно из (10) вытекает оценка для нормы

$$\|B\| \leq M.$$

Рассуждения проведены для случая $p > 2$. Рассмотрение случая $p = 2$ не представляет затруднений.

Пусть теперь $X = Y = C$. В этом случае билинейность операции (8) обеспечивается требованием, чтобы функция $K(s, t)$ была непрерывна по s и чтобы

$$M = \max_s \int_0^1 |K(s, t)| dt < \infty.$$

Действительно, суммируемость подынтегральной функции в (9) не вызывает сомнений. Непрерывность y следует из возможности перехода к пределу под знаком интеграла (9). Равенства (1) очевидны. Выполнение неравенства (2) также легко проверяется, так как

$$|y(s)| \leq \max_t |x(t)| \max_t |x'(t)| \int_0^1 |K(s, t)| dt \quad (0 \leq s \leq 1),$$

и поэтому

$$\|y\| \leq M \|x\| \|x'\|.$$

Отсюда получается оценка

$$\|B\| \leq M = \sup_s \int_0^1 |K(s, t)| dt,$$

причем фактически имеет место равенства

$$\|B\| = \sup_s \int_0^1 |K(s, t)| dt$$

(это устанавливается в точности так же, как соответствующее равенство для линейных операций в III. 2.4).

2.3. Пространство $[X^2 \rightarrow Y]$, введенное выше, оказывается тесно связанным с пространством $[X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$, встретившимся нам при рассмотрении второй производной. Именно, докажем, что указанные пространства линейно изометричны.

Пусть $W \in [X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$. Возьмем произвольный элемент $x' \in X$ и положим $U_{x'} = W(x')$. Очевидно, $U_{x'} \in [X \rightarrow Y]$, так что

$y = B(x, x') = U_{x'}(x)$ является элементом пространства Y . Бинарная операция B , определенная таким образом, удовлетворяет, очевидно, условию I из 2.2, условие II также выполнено, так как

$$\|y\| \leq \|U_{x'}\| \|x\| \leq \|W\| \|x\| \|x'\|. \quad (11)$$

Итак, $B \in [X^2 \rightarrow Y]$, причем из (11) следует неравенство

$$\|B\| \leq \|W\|. \quad (12)$$

Таким образом, каждой операции $W \in [X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$ можно указанным способом отнести билинейную операцию $B \in [X^2 \rightarrow Y]$. Покажем, что при таком соответствии каждая билинейная операция $B \in [X^2 \rightarrow Y]$ является образом некоторой операции $W \in [X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$.

Для этого достаточно отметить, что, если B задана, то при фиксированном $x' \in X$ операция *)

$$W(x') = B(., x') \in [X \rightarrow Y].$$

При этом

$$\|W(x')\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|W(x')(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|B(x, x')\| \leq \|B\| \|x'\|,$$

откуда вытекает, что $W \in [X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$, и неравенство

$$\|W\| \leq \|B\|.$$

Сопоставляя его с (12), приходим к равенству

$$\|W\| = \|B\|. \quad (13)$$

Так как соответствие между элементами пространств $[X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$ и $[X^2 \rightarrow Y]$ аддитивно и однородно, то из (13) следует, что оно взаимно однозначно и, таким образом, осуществляет линейную изометрию указанных пространств.

Линейная изометрия пространств $[X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$ и $[X^2 \rightarrow Y]$ дает основание для отождествления соответствующих элементов этих пространств, что мы и будем делать в дальнейшем.

Отметим без доказательства (его без труда проведет читатель самостоятельно), что в общем случае пространство $[X \rightarrow \dots \rightarrow [X \rightarrow Y] \dots]$ и пространство $[X^n \rightarrow Y]$ n -линейных операций линейно изометричны (см. Гавурин).

2.4. Как было показано в 2.1, вторая производная операции P , переводящей X в Y , есть элемент пространства $[X \rightarrow [X \rightarrow Y]]$, так что в соответствии с полученными выше результатами $P''(x_0)$ можно считать билинейной операцией. Понимая под $P''(x_0)$ билинейную операцию, будем иметь согласно 2.3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx') - P'(x_0)}{t} = P''(x_0)(., x'). \quad (14)$$

*) $B(., x')$ означает операцию U такую, что $U(x) = B(x, x')$. Подобные обозначения используются и в дальнейшем.

Следовательно, при любом $x \in X$

$$P''(x_0)(x, x') = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx')x - P'(x_0)x}{t}. \quad (15)$$

Отметим, что равенства (14) и (15) не эквивалентны. Точнее говоря, может существовать билинейная операция $B \in [X^2 \rightarrow Y]$ такая, что при любых $x, x' \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P'(x_0 + tx')x - P'(x_0)x}{t} = B(x, x') \quad (16)$$

и вместе с тем $P''(x_0)$ не существует. Как нетрудно видеть, для того чтобы $P''(x_0)$ существовало, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $x' \in X$ предельное соотношение (16) имело бы место равномерно относительно $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Отмеченное обстоятельство позволяет несколько расширить понятие второй производной. Именно, мы будем называть билинейную операцию B *слабой второй производной* операции P в точке x_0 , если при любых $x, x' \in X$ имеет место (16). Очевидно, возможно сохранить за слабой производной прежнее обозначение, так как если вторая производная существует в обычном смысле, то она совпадает со слабой.

Замечание. Нетрудно видеть, что если P дважды дифференцируема в точке x_0 , то это означает, что (16) имеет место равномерно относительно $x, x' \in X$ с $\|x\| = 1$ и $\|x'\| = 1$.

Выясним вид второй производной в случае, когда X и Y — конечномерные пространства.

Пусть $P''(x_0)$ существует и как билинейная операция определяется матрицей

$$(a_{ij}^{(k)}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, \mu; k = 1, 2, \dots, \nu).$$

Тогда, приравнивая соответствующие координаты левой и правой части соотношения (15), найдем, сохраняя обозначения из XVII.1.6,

$$\sum_{i, j=1}^{\mu} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi_j' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}(\xi_j^{(0)} + t \xi_j') \xi_i - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_i}(\xi_j^{(0)}) \xi_i}{t} \\ (k = 1, 2, \dots, \nu). *)$$

Беря в качестве x и x' такие элементы, у которых все координаты равны нулю, кроме i -й и j -й соответственно, равных единице, мы получим, что функции φ_k имеют вторые производные и

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 \varphi_k(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_{\mu}^{(0)})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, \mu; k = 1, 2, \dots, \nu).$$

*) Здесь использовано сокращенное обозначение:

$$\varphi(\xi_j) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mu}).$$

2.5. В заключение параграфа установим формулу, являющуюся обобщением формулы Тэйлора для вещественных функций.

Пусть, как и раньше, операция P переводит множество Ω пространства X в Y и имеет на отрезке $[x_0, \bar{x}] \subset \Omega$ непрерывную вторую производную. Тогда справедлива формула

$$P(\bar{x}) - P(x_0) - P'(x_0)(\bar{x} - x_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} P''(x)(\bar{x} - x, \cdot) dx. \quad (17)$$

Для доказательства рассмотрим операцию Q :

$$Q(x) = P(x) + P'(x)(\bar{x} - x) = P(x) + Q_0(x) \quad (x \in \Omega)$$

и проверим, что для любого $\tilde{x} \in [x_0, \bar{x}]$

$$Q'(\tilde{x})(x) = P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x) \quad (x \in X). \quad (18)$$

Если это будет установлено, то формула (17) очевидным образом может быть получена из формулы Ньютона—Лейбница (см. (18), XVII.1.7).

Достаточно рассмотреть лишь операцию Q_0 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{Q_0(\tilde{x} + tx) - Q_0(\tilde{x})}{t} &= \frac{P'(\tilde{x} + tx)(\bar{x} - \tilde{x} - tx) - P'(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x})}{t} = \\ &= \frac{P'(\tilde{x} + tx)(\bar{x} - \tilde{x}) - P'(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x})}{t} - P'(\tilde{x} + tx)x. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow 0$ первое слагаемое имеет пределом $P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x)$, второе же—вследствие очевидной непрерывности операции P' —стремится к $P'(\tilde{x})(x)$. Таким образом,

$$Q'_0(\tilde{x})(x) = P''(\tilde{x})(\bar{x} - \tilde{x}, x) - P'(\tilde{x})x,$$

что и дает для $Q'(\tilde{x})(x)$ выражение (18).

З а м е ч а н и е. Как ясно из приведенного вывода, формула (17) остается верной, если под $P''(x)$ понимать слабую вторую производную.

§ 3. Примеры

В предыдущих параграфах мы уже встречались с примерами нахождения производных нелинейных операций в простейшем—конечномерном—случае. В настоящем параграфе рассмотрены более сложные и более содержательные примеры, которые найдут себе применение в следующем параграфе и главным образом в следующей главе.

3.1. Рассмотрим интегральную операцию P :

$$y = P(x), \quad y(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt. \quad (1)$$

Теорема 1(3.XVII). Пусть функция $K(s, t, u)$ непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема по u для $0 \leq s, t \leq 1$; $-\infty < u < \infty$, причем для этих значений s, t, u

$$|K''_{uu}(s, t, u)| \leq M |u|^{p-2} + N. \quad (2)$$

Тогда, если $p \geq 2$, операция (1) отображает пространство L^p в пространство L^q ($1 \leq q < \infty$), дифференцируема и имеет вторую производную в каждой точке $x_0 \in L^p$. При этом $P'(x_0) = U$, $P''(x_0) = B$, где U и B определяются формулами

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) dt;$$

$$v = B(x, x'), \quad v(s) = \int_0^1 K''_{uu}(s, t, x_0(t)) x(t) x'(t) dt.$$

Доказательство. Убедимся сначала, что операция (1) отображает L^p в $L^\infty = \tilde{M}$ (и тем самым в L^q ($q < \infty$)). С этой целью отметим, что, поскольку $K(s, t, u)$ — непрерывная функция, сложная функция $K(s, t, x(t))$ измерима.

На основании формулы Тэйлора имеем далее

$$K(s, t, x(t)) = K(s, t, 0) + K'_u(s, t, 0) x(t) + \\ + \frac{1}{2} K''_{uu}(s, t, \theta x(t)) x^2(t) \quad (0 < \theta < 1).$$

Оценим интеграл от каждого слагаемого в правой части

$$\left| \int_0^1 K(s, t, 0) dt \right| \leq \max_{s, t} |K(s, t, 0)| = A_1;$$

$$\left| \int_0^1 K'_u(s, t, 0) x(t) dt \right| \leq \max_{s, t} |K'_u(s, t, 0)| \int_0^1 |x(t)| dt \leq A_2 \|x\|_{L^p}.$$

Для оценки интеграла от третьего слагаемого используем (2)

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 K''_{uu}(s, t, \theta x(t)) x^2(t) dt \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^1 [M |x(t)|^{p-2} + N] |x(t)|^2 dt \leq A_3 \|x\|_{L^p}.$$

Отсюда следует, что $y = P(x)$ имеет смысл и, кроме того, справедлива оценка

$$|y(s)| \leq A_1 + A_2 \|x\|_{L^p} + A_3 \|x\|_{L^p} \quad (s \in [0, 1]),$$

так что $y \in \tilde{M}$.

Докажем теперь, что P дифференцируема и что $P'(x_0) = U$. Пусть $z = U(x)$, а

$$z_\tau = \frac{P(x_0 + \tau x) - P(x_0)}{\tau},$$

Имеем

$$\begin{aligned} |z_\tau(s) - z(s)| &= \\ &= \left| \int_0^1 \left[\frac{K(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) - K(s, t, x_0(t))}{\tau} - K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) \right] dt \right|, \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что по формуле Тэйлора

$$\begin{aligned} K(s, t, x_0(t) + \tau x(t)) &= K(s, t, x_0(t)) + \tau K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} K''_{uu}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x(t)) x^2(t) \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

перепишем (3)

$$|z_\tau(s) - z(s)| = \frac{|\tau|}{2} \left| \int_0^1 K''_{uu}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x(t)) dt \right|.$$

Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим оценку

$$|z_\tau(s) - z(s)| \leq A_4 |\tau| \quad (0 \leq s \leq 1),$$

где постоянная A_4 зависит лишь от $\|x\|$, но не от самого x . Таким образом, $z_\tau \rightarrow z$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Перейдем теперь ко второй производной. Обозначим

$$v = B(x, x'); \quad v_\tau = \frac{P'(x_0 + \tau x')(x) - P'(x_0)(x)}{\tau}.$$

Как указывалось в XVII.2.4, достаточно доказать, что при $\tau \rightarrow 0$

$$v_\tau \rightarrow v$$

равномерно относительно $x \in L^p$ с $\|x\| = 1$.

Применяя формулу конечных приращений, а затем неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |v_\tau(s) - v(s)| &= \\ &= \left| \int_0^1 \left[\frac{K'_u(s, t, x_0(t) + \tau x'(t)) - K'_u(s, t, x_0(t))}{\tau} - K''_{us}(s, t, x_0(t)) x'(t) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times x(t) dt \right| = \left| \int_0^1 [K''_{us}(s, t, x_0(t) + \tau \theta x'(t)) - K''_{us}(s, t, x_0(t))] x(t) x'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \|x\| \left\{ \int_0^1 |K''_{us}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) - K''_{us}(s, t, x_0(t))| x'(t) \right|^{\frac{p}{p-1}} dt \right\}^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned} \quad (4)$$

Если $x_0(t)$ и $x'(t)$ конечны, то подынтегральная функция в последнем интеграле стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Далее, в силу (2)

$$\begin{aligned} |K''_{us}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) - K''_{us}(s, t, x_0(t))| x'(t) \Big|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \\ &\leq \{ [M |x_0(t) + \theta \tau x'(t)|^{p-2} + M |x_0(t)|^{p-2} + 2N] |x'(t)| \}^{\frac{p}{p-1}} \leq \\ &\leq A_5 |x_0(t)|^{\frac{(p-2)p}{p-1}} |x'(t)|^{\frac{p}{p-1}} + A_6 |x'(t)|^p. *) \end{aligned}$$

Так как произведения $|x_0(t)|^{\frac{p-2}{p-1}} |x'(t)|^{\frac{p}{p-1}}$ и $|x'(t)|^p$ суммируемы, то в (4) возможен предельный переход под знаком интеграла, что дает

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} v_\tau(s) = v(s) \quad (0 \leq s \leq 1);$$

при этом очевидно равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Из приведенных выше рассуждений следует также, что

$$|v_\tau(s)| \leq \int_0^1 |K''_{us}(s, t, x_0(t) + \theta \tau x'(t)) x(t) x'(t)| dt \leq A_7,$$

так что в интеграле

$$\|v_\tau - v\|_{L^q} = \left\{ \int_0^1 |v_\tau(s) - v(s)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}}$$

возможен предельный переход под знаком интеграла, т. е. $\|v_\tau - v\| \rightarrow 0$ при этом равномерно относительно x с $\|x\| = 1$.

Теорема доказана.

*) Нужно воспользоваться неравенством: $|a + b|^\alpha \leq 2^\alpha (|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ при $\alpha > 0$.

З а м е ч а н и е. Если условие (2) заменить условием

$$|K''_u(s, t, u)| \leq M |u|^\lambda + N \quad (\lambda < p-2) \quad (5)$$

и если $p > 2$, то можно доказать, что операция P , рассматриваемая как операция из L^p в $\tilde{M}$, дважды дифференцируема в каждой точке $x_0 \in L^p$ такой, что x_0 — ограниченная функция.

3.2. Операцию (1) можно рассматривать и как операцию из C в C .

Пусть $x_0 \in C$ — фиксированный элемент. Обозначим через Ω сферу пространства C с центром в x_0 и радиусом r , а через G — множество точек (s, t, u) трехмерного пространства, определяемое неравенствами: $0 \leq s, t \leq 1$; $|u - x_0(t)| \leq r$.

Теорема 2 (3. XVII). Пусть функция $K(s, t, u)$ задана в G и непрерывна там вместе с производными $K'_u(s, t, u)$ и $K''_u(s, t, u)$. Тогда операция P , определяемая формулами (1), переводит множество Ω в C , дважды дифференцируема в каждой внутренней точке $\bar{x} \in \Omega$ и $P'(\bar{x}) = U$, $P''(\bar{x}) = B$ определяются формулами

$$z = U(x), \quad z(s) = \int_0^1 K'_u(s, t, \bar{x}(t)) x(t) dt;$$

$$v = B(x, x'), \quad v(s) = \int_0^1 K''_u(s, t, \bar{x}(t)) x(t) x'(t) dt.$$

Доказательство. Возьмем произвольный x из Ω . Непрерывность функции $y = P(x)$, определенной формулой (1), следует непосредственно из элементарных фактов теории интегралов, зависящих от параметра, и, значит, $y \in C$.

Пусть теперь $\bar{x} \in \Omega$ и $x \in C$. Рассмотрим элемент

$$z_\tau = \frac{P(\bar{x} + \tau x) - P(\bar{x})}{\tau} - U(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} z_\tau(s) &= \\ &= \int_0^1 \left[\frac{K(s, t, \bar{x}(t) + \tau x(t)) - K(s, t, \bar{x}(t))}{\tau} - K'_u(s, t, \bar{x}(t)) x(t) \right] dt. \end{aligned}$$

При $\tau \rightarrow 0$ подынтегральное выражение стремится к нулю и равномерно ограничено относительно x с $\|x\| = 1$ и $s \in [0, 1]$ (это устанавливается с помощью формулы конечных приращений). Таким образом, $z_\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in C$ с $\|x\| = 1$ и дифференцируемость P в точке $\bar{x}$ доказана.

При этом

$$P'(\bar{x}) = U.$$

Аналогичными рассуждениями докажем, что $P''(\bar{x}) = B$ и, более того, что P дважды дифференцируема.

3.3. Рассмотрим нелинейную операцию, связанную с системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_i}{ds} = f_i(s, y_k(s)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

которую нам удобнее записывать в форме системы интегральных уравнений

$$y_i(s) = y_i^{(0)} + \int_0^s f_i(t, y_k(t)) dt \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

или, короче, в векторной форме

$$y(s) = y^{(0)} + \int_0^s f(t, y(t)) dt,$$

где $y(s)$, $y^{(0)}$, $f(t, u)$, u — вектора, составляющие которых соответственно

$$(y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)), \quad (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ (f_1(t, u_k), f_2(t, u_k), \dots, f_n(t, u_k)), \quad (u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Введем в рассмотрение пространство C_n^α ($\alpha > 0$), элементы которого суть абсолютно непрерывные вектор-функции на $[0, \infty)$ такие, что

$$\sup_t |y(t) e^{\alpha t}| < \infty, \quad \sup_t |y'(t) e^{\alpha t}| < \infty \quad (t \geq 0). *)$$

Норма в C_n^α вводится посредством равенства

$$\|y\| = \sup_t |y(t) e^{\alpha t}| + \sup_t |y'(t) e^{\alpha t}| \quad (y \in C_n^\alpha).$$

Кроме C_n^α рассмотрим еще пространство D_n^α , состоящее из абсолютно непрерывных вектор-функций, удовлетворяющих условию:

$$\sup_t |z(t)| < \infty, \quad \sup_t |z'(t) e^{\alpha t}| < \infty \quad (z \in D_n^\alpha).$$

Норма в D_n^α определяется так:

$$\|z\| = \sup_t |z(t)| + \sup_t |z'(t) e^{\alpha t}| \quad (z \in D_n^\alpha).$$

Нетрудно проверить, что C_n^α и D_n^α являются B -пространствами.

*) Как и выше (в главе XVI), длину вектора u мы обозначаем символом $|u|$, а норму матрицы A как оператора из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ — через $|A|$.

Рассмотрим операцию P :

$$z = P(y) \quad (6)$$

$$z(s) = y(s) - \int_0^s f(t, y(t)) dt. \quad (7)$$

Теорема 3 (3.XVII). Пусть $f(t, u)$ — векторная функция, определенная на множестве G $(n+1)$ -мерного пространства:

$$(t, u) \in G \text{ означает } t \geq 0, |u| \leq re^{-\alpha t}.$$

При этом

$$1) f(t, 0) = 0;$$

2) в G существует ограниченная производная $f'_u(t, u)$ *) непрерывная по u равномерно относительно $t \geq 0$.

Тогда, если обозначить через Ω сферу пространства C_n^α с центром в нуле, радиуса r , то операция (6) переводит Ω в D_n^α и дифференцируема в каждой точке из Ω , причем $P'(y_0) = U$, где U определяется формулой

$$z = U(y), \quad z(s) = y(s) - \int_0^s f'_u(t, y_0(t)) y(t) dt. \quad (8)$$

Доказательство. Докажем сначала, что функция, определяемая равенством (7), принадлежит D_n^α (в предположении, что $y \in \Omega$). Действительно, так как $f(t, 0) = 0$, то

$$z(s) = y(s) - \int_0^s [f(t, y(t)) - f(t, 0)] dt.$$

Подынтегральное выражение здесь оценивается с помощью формулы конечных приращений следующим образом:

$$|f(t, y(t)) - f(t, 0)| \leq \sup_{0 \leq \theta < 1} |f'_u(t, \theta y(t))| |y(t)| \leq M \|y\| e^{-\alpha t}$$

$$(M = \sup |f'_u(t, u)| \quad (t, u) \in G).$$

Используя полученную оценку, будем иметь

$$\sup_s |z(s)| \leq \sup_s |y(s)| + M \|y\| \sup_s \int_0^s e^{-\alpha t} dt \leq \|y\| + \frac{M}{\alpha} \|y\| < \infty.$$

*) Напомним, что производная $f'_u(t, u)$ векторной функции $f(t, \cdot)$ есть n -квадратная матрица производных $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right)$ (см. XVII. 1.6).

Далее,

$$z'(s) = y'(s) - f(s, y(s))$$

и аналогичными рассуждениями убеждаемся, что

$$\sup_s |z'(s) e^{as}| < \infty.$$

Таким образом, z имеет смысл и является элементом пространства D_n^α .

Проверим теперь, что U , определенная формулой (8), является линейной операцией, отображающей C_n^α в D_n^α .

Повторяя предыдущие рассуждения, найдем для $z = U(y)$

$$\begin{aligned} \sup_s |z(s)| + \sup_s |z'(s) e^{as}| &= \sup_s \left| y(s) - \int_0^s f'_u(t, y_0(t)) y(t) dt \right| + \\ &+ \sup_s | [y'(s) - f'_u(s, y_0(s)) y(s)] e^{as} | \leq \|y\| + \frac{M}{a} \|y\| + \\ &+ (M+1) \|y\| = L \|y\|, \end{aligned}$$

так что $z = U(y) \in D_n^\alpha$ и $\|z\| \leq L \|y\|$.

Рассмотрим теперь, как и в предыдущих теоремах, элемент

$$v_\tau = \frac{P(y_0 + \tau y) - P(y_0)}{\tau} - U(y);$$

$$\begin{aligned} v_\tau(s) &= \int_0^s J_\tau(t) dt \left(J_\tau(t) = \frac{f(t, y_0(t) + \tau y(t)) - f(t, y_0(t))}{\tau} - \right. \\ &\quad \left. - f'_u(t, y_0(t)) y(t) \right). \end{aligned}$$

Применяя формулу конечных приращений к подынтегральному выражению, получим

$$|J_\tau(t)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} |f'_u(t, y_0(t) + \theta \tau y(t)) - f'_u(t, y_0(t))| |y(t)|.$$

Отсюда в силу равномерной непрерывности $f'_u(t, u)$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно малом τ равномерно относительно y с $\|y\| = 1$

$$|J_\tau(t)| \leq \varepsilon e^{-at}$$

и, следовательно,

$$\sup_s |v_\tau(s)| \leq \frac{\varepsilon}{a}.$$

Аналогично, при тех же τ , будет

$$\sup_s |v'_\tau(s) e^{as}| \leq \varepsilon,$$

так что

$$\|v_\tau\| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{a} + 1 \right).$$

Итак, $v_\tau \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно относительно $y \in C_n^\alpha$ с $\|y\| = 1$, что и требовалось доказать.

§ 4. Теорема о неявной функции

4.1. Пусть X и Y — два B -пространства. Образует множество $X \times Y$ всевозможных пар (x, y) ($x \in X, y \in Y$). Множество $X \times Y$, естественным образом линейризованное, становится B -пространством, если ввести в нем норму, полагая, например,

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Это B -пространство называется *прямым произведением* пространств X и Y (ср. I. 5. 5).

Отождествляя пары вида $(x, 0_Y)$ ($x \in X, 0_Y$ — нулевой элемент пространства Y) с элементами пространства X , можем считать, что X и аналогично Y являются подпространствами прямого произведения $X \times Y$. При этом каждый элемент $u = (x, y) \in X \times Y$ может быть единственным образом представлен в форме

$$u = (x, y) = (x, 0_Y) + (0_X, y) = x + y.$$

Каждая линейная операция $U \in [X \times Y \rightarrow Z]$ индуцирует пару (U_X, U_Y) линейных операций: $U_X \in [X \rightarrow Z], U_Y \in [Y \rightarrow Z]$

$$U_X(x) = U((x, 0_Y)), \quad U_Y(y) = U((0_X, y)).$$

Наоборот, если имеется пара операций (U_X, U_Y) , то операция U :

$$U((x, y)) = U_X(x) + U_Y(y)$$

будет линейной операцией из пространства $X \times Y$ в Z .

Пусть теперь P — нелинейная операция, отображающая множество $\Omega \subset X \times Y$ в B -пространство Z . Фиксируя $y_0 \in Y$, рассмотрим операцию

$$P^{(y_0)} = P(\cdot, y_0),$$

которая отображает множество $\Omega^{(y_0)}$ тех $x \in X$, для которых $(x, y_0) \in \Omega$ («сечение» множества Ω), в Z . Подобным же образом определяется операция $P^{(x_0)}$ ($x_0 \in X$), отображающая $\Omega^{(x_0)} \subset Y$ в Z .

Если $x_0 \in X$ — внутренняя точка множества $\Omega^{(y)}$, то можно говорить о производной $P^{(y_0)'}(x_0)$. Эта производная называется *частной производной по x* операции P в точке (x_0, y_0) и обозначается $P'_x(x_0, y_0)$. Аналогично вводится частная производная по y : $P'_y(x_0, y_0)$. Очевидно,

$$P'_x(x_0, y_0) \in [X \rightarrow Z]; \quad P'_y(x_0, y_0) \in [Y \rightarrow Z].$$

Если операция P имеет в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ производную $P'(x_0, y_0) = U$, то $P'_x(x_0, y_0) = U_X$ и $P'_y(x_0, y_0) = U_Y$; это обстоятельство оправдывает введенные обозначения частных производных.

Операцию P можно рассматривать как абстрактную «функцию двух переменных», что мы и будем отображать в обозначениях,

записывая $P(x, y)$ вместо $P((x, y))$. На такие «функции» без труда распространяются основные положения элементарной теории функций многих переменных. Отметим, в частности, один из таких фактов.

Предположим, что производные P'_x и P'_y существуют в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$. Тогда справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} & \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\| \leq \\ & \leq \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\|. \quad (1) \end{aligned}$$

Действительно, очевидно

$$\begin{aligned} A = & \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\| \leq \\ & \leq \|P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0 + \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)(\Delta x)\| + \\ & + \|P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0) - P'_y(x_0, y_0)(\Delta y)\|. \end{aligned}$$

Применяя к каждому слагаемому формулу конечных приращений (см. (8), § 1), получим

$$\begin{aligned} A \leq & \sup_{0 < \theta < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\| \leq \\ & \leq \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_x(x_0, y_0)\| \|\Delta x\| + \\ & + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - P'_y(x_0, y_0)\| \|\Delta y\|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4.2. Основной результат этого параграфа относится к вопросу о существовании решения уравнения

$$P(x, y) = 0,$$

т. е. о существовании неявной функции, определяемой этим уравнением. Как и в элементарном анализе справедлива

Теорема 1 (4. XVII). Пусть операция P задана в окрестности Ω точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, отображает ее в пространство Z и непрерывна в точке (x_0, y_0) . Если, кроме того, выполнены условия:

- 1) $P(x_0, y_0) = 0$;
- 2) в Ω существует P'_y , непрерывная в точке (x_0, y_0) ;
- 3) операция $P'_y(x_0, y_0) \in [Y \rightarrow Z]$ имеет линейную обратную

$$\Gamma = [P'_y(x_0, y_0)]^{-1} \in [Z \rightarrow Y],$$

то существует операция F , заданная в некоторой окрестности $G \subset X$ точки x_0 , переводящая эту окрестность в пространство Y и обладающая свойствами:

$$a) P(x, F(x)) = 0 \quad (x \in G);$$

$$b) F(x_0) = y_0;$$

c) F непрерывна в точке x_0 .

Операция F определяется свойствами а) — с) однозначно в том смысле, что если F_1 — другая операция, обладающая этими свойствами, то существует такое $\eta > 0$, что для $\|x - x_0\| < \eta$

$$F_1(x) = F(x).$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x_0 = 0_X$, $y_0 = 0_Y$. Возьмем $x \in X$ настолько малым, чтобы $0_Y \in Q^{(x)}$, где, как и выше, $Q^{(x)}$ означает совокупность элементов $y \in Y$ таких, что $(x, y) \in Q$, и рассмотрим определенную на $Q^{(x)}$ операцию $Q^{(x)}$

$$Q^{(x)}(y) = y - \Gamma P(x, y).$$

Докажем, что каково бы ни было достаточно малое число $\varepsilon > 0$, можно указать такое $\delta > 0$, что при $\|x\| < \delta$ операция $Q^{(x)}$ переводит сферу $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя. С этой целью найдем и оценим производную операции $Q^{(x)}$. Согласно предложениям III и V из XVII. 1.2

$$Q^{(x)'}(\bar{y})(y) = y - \Gamma P'_y(x, \bar{y})(y) = -\Gamma[P'_y(x, \bar{y}) - P'_y(0, 0)](y),$$

и, следовательно,

$$\|Q^{(x)'}(\bar{y})\| \leq \|\Gamma\| \|P'_y(x, \bar{y}) - P'_y(0, 0)\|.$$

В силу предположенной непрерывности операции P'_Y в точке $(0, 0)$, второй множитель здесь может быть сделан сколь угодно малым, так что за счет выбора достаточно малых ε и δ , можно добиться того, что

$$\|Q^{(x)'}(\bar{y})\| \leq \alpha < 1 \quad (\|x\| < \delta; \|\bar{y}\| \leq \varepsilon). \quad (2)$$

Оценим еще $Q^{(x)}(0)$. Принимая во внимание условие 1), будем иметь

$$\|Q^{(x)}(0)\| = \|\Gamma P(x, 0)\| \leq \|\Gamma\| \|P(x, 0) - P(0, 0)\|$$

и, значит, учитывая непрерывность операции P в точке $(0, 0)$, можно за счет уменьшения δ сделать правую часть написанного неравенства сколь угодно малой. Будем считать, что δ , если это необходимо, уже уменьшено настолько, что

$$\|Q^{(x)}(0)\| \leq \varepsilon(1 - \alpha) \quad (\|x\| < \delta). \quad (3)$$

Теперь высказанное выше утверждение легко доказывается с помощью формулы конечных приращений. Действительно, если $\|x\| < \delta$, $\|y\| \leq \varepsilon$, то согласно (2) и (3)

$$\begin{aligned} \|Q^{(x)}_1(y)\| &\leq \|Q^{(x)}(0)\| + \|Q^{(x)}(y) - Q^{(x)}(0)\| \leq \\ &\leq \varepsilon(1 - \alpha) + \sup_{0 < \theta < 1} \|Q^{(x)'}(\theta y)\| \|y\| \leq \varepsilon(1 - \alpha) + \alpha\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, операция $Q^{(x)}$ переводит замкнутую сферу $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя, причем для производной $Q^{(x)'}(y)$ справедливо соотношение (2). Тем самым выполнены условия теоремы 1 (1. XVII) и, следовательно, в упомянутой сфере существует единственная неподвижная точка $y^* = F(x)$ этой операции:

$$y^* = y^* - \Gamma P(x, y^*),$$

т. е.

$$P(x, y^*) = 0.$$

Операция F — требуемая. Действительно, а) уже проверено. Справедливость б) вытекает из условия 1), которое можно записать в форме: $Q_0(0) = 0$, и единственности неподвижной точки операции Q_0 . Наконец, с) следует из того, что выбор величины ε не ограничен снизу, и поэтому ее можно взять сколь угодно малой.

Докажем единственность F . В сфере $\|y\| \leq \varepsilon$ неподвижная точка операции $Q^{(x)}$ ($\|x\| < \delta$) единственная, а ввиду непрерывности операции F_1 для достаточно малых η будет

$$\|F_1(x)\| = \|F_1(x) - F_1(0)\| \leq \varepsilon \quad (\|x\| < \eta),$$

так что для этих x имеет место совпадение $F_1(x) = F(x)$.

Теорема 2 (4. XVII). Если в теореме 1 предположить непрерывность операции P в каждой точке Ω , то операция F будет непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 .

Доказательство. В рассматриваемом случае к операции $Q^{(x)}$ применима теорема 3 (1. XVI). Действительно, операция $Q^{(x)}$ ($\|x\| < \delta$) преобразует сферу $\|y\| \leq \varepsilon$ в себя, а неравенство (2) обеспечивает то, что $Q^{(x)}$ является операцией сближения (равномерно относительно $x \in X$ с $\|x\| < \delta$). Непрерывность $Q^{(x)}$ по параметру (его роль играет в данном случае x) следует из непрерывности операции P .

Применяя указанную теорему, получаем, что $y^* = F(x)$ непрерывно зависит от x для $\|x\| < \delta$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 имеют локальный характер. Кроме того, в них не указывается эффективный способ оценки величины ε в зависимости от δ . Этот недостаток будет восполнен в следующей главе, где с привлечением второй производной устанавливаются более точные результаты.

Кое-что в этом направлении может быть сделано уже с помощью сформулированной ниже теоремы 3.

4.3. Теорема 3 (4. XVII). Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, в $\mathfrak{Q}$ существует частная производная P'_x , непрерывная в точке (x_0, y_0) . Тогда операция F дифференцируема в точке x_0 , причем

$$F'(x_0) = U,$$

где

$$U = -\Gamma P'_x(x_0, y_0) = -[P'_y(x_0, y_0)]^{-1} P'_x(x_0, y_0). \quad (4)$$

Доказательство. Будем, как и при доказательстве теоремы 1, считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Согласно XVII. 1.1 надо доказать, что по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любого $x \in X$ с $\|x\| < \delta$

$$\|F(x) - F(0) - U(x)\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

т. е., поскольку $F(0) = 0$,

$$\|F(x) - U(x)\| \leq \varepsilon \|x\|. \quad (5)$$

Полагая $F(x) = y$ и заменяя U ее выражением (4), перепишем выражение, стоящее в левой части (5) под знаком нормы в виде

$$F(x) - U(x) = y + \Gamma P'_x(0, 0)x = \Gamma [P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y].$$

Но $P(x, y) = P(0, 0) = 0$, поэтому согласно неравенству (1)

$$\begin{aligned} \|F(x) - U(x)\| &\leq \|\Gamma\| \|P(x, y) - P(0, 0) - \\ &\quad - P'_x(0, 0)x - P'_y(0, 0)y\| \leq \\ &\leq \|\Gamma\| \left[\sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_x(\theta x, \theta_1 y) - P'_x(0, 0)\| \|x\| + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < \theta, \theta_1 < 1} \|P'_y(\theta x, \theta_1 y) - P'_y(0, 0)\| \|y\| \right] \leq \eta [\|x\| + \|y\|], \end{aligned}$$

причем вследствие непрерывности частных производных P'_x и P'_y величина η может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого δ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \|F(x) - U(x)\| &\leq \eta [\|x\| + \|F(x)\|] \leq \\ &\leq \eta [\|x\| + \|U(x)\| + \|F(x) - U(x)\|]. \end{aligned}$$

Отсюда, если только η достаточно мало,

$$\|F(x) - U(x)\| \leq \eta \frac{1 + \|U\|}{1 - \eta} \|x\|,$$

и, следовательно, если η подобрать так, чтобы

$$\eta \frac{1 + \|U\|}{1 - \eta} \leq \varepsilon,$$

то для всех достаточно малых x будет выполняться (5), что и требовалось доказать.

4.4. В заключение параграфа приведем один пример применения теоремы 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y'_i(s) = f_i(s, y_k(s)) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

которую, как и в XVII. 3.3, будем записывать в форме

$$y(s) = y(0) + \int_0^s f(t, y(t)) dt. \quad (7)$$

Предположим, что $f(t, 0) = 0$ ($t \geq 0$). Тогда система (6), или, иначе, уравнение (7), имеет тривиальное решение — тождественно равное нулю. Это решение отвечает начальным условиям $y(0) = 0$.

Возникает вопрос, имеющий большое практическое значение: при каких условиях уравнение (7) имеет решение с достаточно малыми начальными данными, определенное на $[0, \infty)$ и, главное, когда близость к нулю начальных данных влечет близость решения к нулю на всей полупрямой $[0, \infty)$? Дадим точные определения.

Пусть по каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только вектор x имеет норму, меньшую δ , так уравнение

$$y(s) = x + \int_0^s f(t, y(t)) dt \quad (8)$$

имеет единственное ограниченное решение y^* , причем

$$\sup_{s \geq 0} |y^*(s)| \leq \varepsilon.$$

Тогда говорят, что нулевое решение уравнения (7) *устойчиво*. Если кроме того, $y^*(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым*.

Прежде чем рассматривать достаточные условия устойчивости, введем одно вспомогательное понятие.

Пусть T — квадратная матрица n -го порядка. Образует ряд

$$E + \frac{1}{1!} T + \frac{1}{2!} T^2 + \dots + \frac{1}{n!} T^n + \dots,$$

где E — единичная матрица. Так как $|T^k| \leq |T|^k$ ($k = 0, 1, \dots$), то написанный ряд сходится, какова бы ни была матрица T . Сумма его обозначается e^T .

Если x_0 — некоторый фиксированный вектор, то вектор-функция

$$u(s) = e^{sT} x_0 \quad (s \geq 0)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'(s) = T u(s), \quad (9)$$

в чем можно убедиться точно так же, как и в случае обычных вещественных функций. Указанное обстоятельство используется в доказательстве следующей леммы

Лемма. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots$ — собственные значения матрицы T . Тогда элементы матрицы e^{sT} имеют вид $\sum_k p_k(s) e^{s\mu_k}$, где p_k — полиномы степени не выше n .

Таким образом, если $\mu = \max_k \operatorname{Re} \mu_k$, то норма матрицы e^{sT} может быть оценена следующим образом:

$$|e^{sT}| \leq K_{\eta} e^{(\mu + \eta)s}, \quad (10)$$

где $\eta > 0$ произвольное.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из элементарных фактов теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если учесть, что согласно сделанному выше замечанию столбцы матрицы e^{sT} образуют полную линейно независимую систему решений уравнения (9), которое является, по существу, системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *)

Так как норма матрицы оценивается корнем квадратным из суммы квадратов элементов, то из сказанного сразу же вытекает и (10).

Возвратимся теперь к уравнению (7). Пусть, как и в XVII. 3.3, вектор функция $f(t, u)$ задана в области G $(n+1)$ -мерного пространства ($t \geq 0$; $|u| \leq re^{-\alpha t}$; $\alpha > 0$), непрерывна по u при $u=0$ и имеет непрерывную по u при $u=0$ производную $f'_u(t, u)$. Предположим, что матрица $A = f'_u(t, 0)$ не зависит от t , и обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ее собственные значения.

Теорема 4 (4. XVII). Если

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то нулевое решение уравнения (7) асимптотически устойчиво. Точнее говоря, справедлива оценка

$$|y^*(s)| \leq L_x e^{-\alpha s} \quad (s \geq 0),$$

где константа L_x зависит только от x и стремится к нулю при $x \rightarrow 0$, а $\alpha > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k < -\alpha$ ($k = 1, 2, \dots$).

Доказательство основывается на теореме 1. Положим в ней $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{C}_n^\alpha$, $Z = \mathbb{D}_n^\alpha$, а операцию P определим следующим образом:

$$z = P(x, y) \quad z(s) = y(s) - x - \int_0^s f(t, y(t)) dt,$$

*) См. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Стр. 214.

причем за Ω примем множество точек $(x, y) \in X \times Y$ с произвольным $x \in X$ и $\|y\| < r$.

Учитывая результат теоремы 3 (3. XVII), мы сразу убеждаемся, что первые два условия теоремы 1 выполнены. Наличие условия 3) проверяется сложнее. Прежде всего, согласно теореме 3. (3. XVII), производная $P'_Y(0, 0) = U$ существует и имеет вид

$$z = U(y), \quad z(s) = y(s) - \int_0^s Ay(t) dt,$$

и, следовательно, требуется доказать, что операция U допускает непрерывное обращение. Поскольку пространства C_n^α и D_n^α полные, то для этого достаточно доказать, что операция U осуществляет взаимно однозначное соответствие между C_n^α и D_n^α (см. XII. 1.3), т. е. что при любом $\tilde{z} \in D_n^\alpha$ существует единственный элемент $\tilde{y} \in C_n^\alpha$ такой, что $\tilde{z} = U(\tilde{y})$. Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$\tilde{z}(s) = y(s) - \int_0^s Ay(t) dt \quad (11)$$

имеет единственное решение в C_n^α .

Как это следует из элементарных фактов теории дифференциальных уравнений, решение $\tilde{y}$ уравнения (11) всегда существует, единственно и имеет вид

$$\tilde{y}(s) = \int_0^s e^{(s-t)A} \tilde{z}'(t) dt + e^{sA} \tilde{z}(0).$$

Следовательно, взяв число σ так, что

$$\alpha < \sigma < -\max_k \operatorname{Re} \lambda_k,$$

на основании оценки (10) будем иметь

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(s)| &\leq K \left[\int_0^s e^{-(s-t)\sigma} |\tilde{z}'(t)| dt + e^{-s\sigma} |\tilde{z}(0)| \right] \leq \\ &\leq K \left[e^{-\sigma s} \int_0^s e^{(\sigma-\alpha)t} \|\tilde{z}\| dt + e^{-s\sigma} \|\tilde{z}\| \right] = K \|\tilde{z}\| e^{-s\sigma} \left[\frac{e^{(\sigma-\alpha)s} - 1}{\sigma - \alpha} + 1 \right] = \\ &= K \|\tilde{z}\| e^{-\alpha s} \left[\frac{1 - e^{(\alpha-\sigma)s}}{\sigma - \alpha} + e^{(\alpha-\sigma)s} \right] \leq K_1 \|\tilde{z}\| e^{-\alpha s}, \end{aligned}$$

так что

$$\sup |\tilde{y}(s) e^{\alpha s}| \leq K_1 \|\tilde{z}\| < \infty. \quad (12)$$

Так как

$$\tilde{y}'(s) = \tilde{z}'(s) - A\tilde{y}(s),$$

то

$$\begin{aligned} \sup_s |\tilde{y}'(s) e^{\alpha s}| &\leq \sup_s |\tilde{z}'(s) e^{\alpha s}| + |A| \sup_s |\tilde{y}(s) e^{\alpha s}| \leq \\ &\leq (1 + K_1 |A|) \|\tilde{z}\| < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, сопоставляя (12) и (13), заключаем, что $\tilde{y} \in C_n^\alpha$ и условия теоремы 1 проверены полностью.

На основании доказанного можно, таким образом, утверждать, что уравнение $P(x, y) = 0$, т. е. уравнение (8) имеет единственное решение $y^* = F(x) \in C_n^\alpha$, если только начальный вектор x достаточно мал. Имеем далее

$$|y^*(s)| \leq \|F(x)\| e^{-\alpha s},$$

причем по непрерывности операции F будет $\|F(x)\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Теорема доказана.

ГЛАВА XVIII

МЕТОД НЬЮТОНА

В этой главе развивается подробная теория метода решения функциональных уравнений, который, в случае вещественных уравнений, известен под названием метода Ньютона или метода касательных. Этот метод и некоторая его модификация являются в настоящее время одними из немногих, применяемых на практике, для фактического нахождения решения нелинейного функционального уравнения.

Должно быть отмечено и теоретическое значение метода, так как с его помощью можно делать заключения о существовании, единственности и области расположения решения уравнения, не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактическое знание решения.

Результаты этой главы принадлежат главным образом Л. В. Канторовичу (см. Канторович). Изложение следует статье [45 д].

§ 1. Уравнения вида $P(x) = 0$

1.1. Пусть имеется операция P , переводящая открытое множество $\mathfrak{Q}$ одного B -пространства X в другое B -пространство Y . Предположим, что в $\mathfrak{Q}$ имеется нуль операции P , т. е. такой элемент x^* , что

$$P(x^*) = 0.$$

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in \mathfrak{Q}$. Предполагая, что операция P имеет в $\mathfrak{Q}$ непрерывную производную, можно заменить элемент $P(x_0) = P(x_0) - P(x^*)$ близким ему выражением $P'(x_0)(x_0 - x^*)$ и, следовательно, есть основания считать, что решение уравнения

$$P'(x_0)(x_0 - x) = P(x_0)$$

будет близко к x^* . Но написанное уравнение — линейное, и его решение нетрудно найти. Это будет

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1}(P(x_0))$$

(само собой разумеется, что существование операции $[P'(x_0)]^{-1}$ предполагается).

Продолжая этот процесс, мы получим, исходя из x_0 — начального приближения — последовательность $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}(P(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Каждое x_n является приближенным решением уравнения

$$P(x) = 0, \quad (2)$$

тем более точным, вообще говоря, чем больше n .

Способ образования последовательности $\{x_n\}$ и называется *методом Ньютона*.*)

Ясно, что метод Ньютона не всегда осуществим. Во-первых, x_n может при некотором n выйти за пределы множества Ω , а, во-вторых, если даже этого не случится, то может не существовать $[P'(x_n)]^{-1}$.

Если последовательность x_n сходится к корню x^* и x_0 выбрано достаточно близко к x^* , то по непрерывности операции P' операции $P'(x_n)$ и $P'(x_0)$ будут мало отличаться. Это дает основание ввести вместо формул (1) упрощенные

$$x'_{n+1} = x'_n - [P'(x_0)]^{-1} (P(x'_n)), \quad (n = 0, 1, \dots; \quad x'_0 = x_0), \quad (3)$$

которые хотя и дают, вообще говоря, худшие приближения, но зато значительно проще формул (1).

Способ образования последовательности $\{x'_n\}$ мы будем называть *модифицированным методом Ньютона*.

Ниже подробно исследуются условия осуществимости метода Ньютона (основного и модифицированного) и его сходимости, т. е. сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ к решению рассматриваемого уравнения (2).

Отметим, что метод Ньютона для уравнения (2) совпадает с обычным методом последовательных приближений, примененным к уравнению

$$x = x - \Gamma(x)(P(x)) \quad (\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}), \quad (4)$$

которое, очевидно, равносильно данному.

Точно так же модифицированный метод Ньютона означает метод последовательных приближений применительно к уравнению

$$x = x - \Gamma(x_0)(P(x)). \quad (5)$$

В связи с отмеченным обстоятельством мы предварительно и займемся исследованием обычного метода последовательных приближений.

1.2. Рассмотрим уравнение

$$x = S(x), \quad (6)$$

*) Если операция P — вещественная функция вещественного аргумента, то формулу (1) можно записать так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

что и приводит к методу Ньютона в собственном смысле слова.

где S — операция, определенная в сфере $\|x - x_0\| < R$ некоторого B -пространства X ($x_0 \in X$). Наряду с уравнением (6) рассмотрим вещественное уравнение

$$t = \varphi(t), \quad (7)$$

где функция φ определена в промежутке $[t_0, t']$ ($t' = t_0 + r < t_0 + R$). Будем говорить, что уравнение (7) (или функция φ) *мажорирует* уравнение (6) (или операцию S), если

$$1) \|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(t_0) - t_0; \quad (8)$$

$$2) \|S'(x)\| \leq \varphi'(t), \text{ если } \|x - x_0\| \leq t - t_0.$$

Теорема 1 (1. XVIII). Пусть операция S имеет непрерывную производную в замкнутой сфере $\mathfrak{Q}_0$ ($\|x - x_0\| \leq r$), а функция φ дифференцируема в промежутке $[t_0, t']$. Тогда, если уравнение (7) мажорирует уравнение (6), и уравнение (7) имеет в промежутке $[t_0, t']$ корень, то уравнение (6) также имеет решение x^* , к которому сходится последовательность $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = S(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

последовательных приближений, начатая с x_0 .

При этом

$$\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0, \quad (10)$$

где через t^* обозначен наименьший корень уравнения (7).

Доказательство. Докажем сначала, что последовательные приближения для уравнения (7)

$$t_{n+1} = \varphi(t_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

образуют сходящуюся последовательность. С этой целью отметим, что из условия 2) вытекает неравенство

$$\varphi'(t) \geq 0 \quad (t \in [t_0, t']),$$

так что функция φ возрастает в промежутке $[t_0, t']$. Отсюда следует, что t_n имеет смысл для любого n и, более того, что

$$t_n \leq \bar{t} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (12)$$

где через $\bar{t}$ обозначен корень уравнения (7), существование которого предположено в теореме.

Действительно, при $n = 0$ неравенство (12) не вызывает сомнений, и если оно уже доказано для $n = k$, то из $t_k \leq \bar{t}$ вследствие монотонности φ , получаем $\varphi(t_k) \leq \varphi(\bar{t})$, т. е. $t_{k+1} \leq \bar{t}$ и по индукции неравенство оправдано для всех n .

Также, используя монотонность φ , по индукции можно доказать монотонность последовательности $\{t_n\}$.

В самом деле, из $t_n \leq t_{n+1}$ вытекает $t_{n+1} = \varphi(t_n) \leq \varphi(t_{n+1}) = t_{n+2}$ неравенство же $t_0 \leq t_1$ есть следствие условия 1).

Таким образом, установлено существование предела $t^* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, который по (11) в силу непрерывности φ , оказывается корнем уравнения (7) и, как это следует из (12), наименьшим в промежутке $[t_0, t']$.

Докажем теперь, что все элементы (9) имеют смысл и образуют сходящуюся последовательность.

Прежде всего, переписывая (8) в форме

$$\|x_1 - x_0\| \leq t_1 - t_0,$$

замечаем, что $x_1 \in \Omega_0$. Пусть уже доказано, что $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega_0$ и что

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_{k+1} - t_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (13)$$

Тогда в соответствии с результатами из XVII.1.7 будем иметь

$$x_{n+1} - x_n = S(x_n) - S(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} S'(x) dx.$$

Если через x и t обозначить соответствующие точки отрезка $[x_{n-1}, x_n]$ и промежутка $[t_{n-1}, t_n]$, т. е.

$$x = x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}), \quad t = t_{n-1} + \tau(t_n - t_{n-1}) \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

то вследствие (13)

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \tau \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots \\ &\dots + \|x_1 - x_0\| \leq \tau(t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_1 - t_0) = t - t_0. \end{aligned}$$

Поэтому согласно условию 2)

$$\|S'(x)\| \leq \varphi'(t).$$

Отсюда, пользуясь замечанием из XVII.1.7, находим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \left\| \int_{x_{n-1}}^{x_n} S'(x) dx \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi'(t) dt = \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) = t_{n+1} - t_n. \end{aligned}$$

Итак, (13) доказано для $k = n$. Вместе с тем доказано, что $x_{n+1} \in \Omega_0$, так как

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq (t_{n+1} - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + \dots + (t_1 - t_0) = t_{n+1} - t_0 \leq t' - t_0 = r. \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции установлено для всех $k = 0, 1, \dots$ включение $x_k \in \Omega_0$ и оценка (13).

Далее, поскольку в силу (13)

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (t_{n+p} - t_{n+p-1}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) = t_{n+p} - t_n, \end{aligned} \quad (14)$$

то последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе, и, значит, имеет предел. Обозначим $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в (9) и учитывая непрерывность операции S , получим

$$x^* = S(x^*),$$

т. е. x^* — корень уравнения (6).

Оценка (10) вытекает из (14), если положить там $n = 0$ и перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Неравенство

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (15)$$

которое получается из (14) предельным переходом при $p \rightarrow \infty$, дает оценку быстроты сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x^* .

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы условие 2) использовалось не в полном объеме. Для доказательства была необходима справедливость неравенства $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$ только в соответствующих точках отрезков $[x_{n-1}, x_n]$ и $[t_{n-1}, t_n]$ ($n = 1, 2, \dots$).

Уравнение (6) может иметь в сфере Ω_0 еще и другие, отличные от x^* , корни, даже если решение t^* мажорантного уравнения (7) единственно в промежутке $[t_0, t']$. Однако справедлива

Теорема 2 (1. XVIII). Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и, кроме того,

$$\varphi(t') \leq t'.$$

Тогда, если уравнение (7) имеет в промежутке $[t_0, t']$ единственное решение, то в сфере Ω_0 корень x^* уравнения (6) единственен и к нему сходится процесс последовательных приближений, начатый с любого $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$.

Доказательство. Применим к уравнению (7) метод последовательных приближений, взяв в качестве начального приближения $\tilde{t}_0 = t'$. Буквально так же, как и в теореме 1, доказывается, что последовательность

$$\tilde{t}_{n+1} = \varphi(\tilde{t}_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу ($\tilde{t}_n \geq t^*$), а потому имеет предел, равный $\tilde{t}$, причем $\tilde{t}$, являясь корнем уравнения (7), должен совпадать с t^* ($\tilde{t} = t^*$).

Докажем теперь, что процесс последовательных приближений для уравнения (6), с какого бы элемента $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$ его ни начать, сходится и дает, следовательно, корень уравнения (6).

Последовательные приближения будут иметь вид:

$$\tilde{x}_{n+1} = S(\tilde{x}_n) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Имеем

$$\tilde{x}_1 - x_1 = S(\tilde{x}_0) - S(x_0) = \int_{x_0}^{\tilde{x}_0} S'(x) dx$$

и, снова применяя замечание из XVII. 1.7, получим

$$\|\tilde{x}_1 - x_1\| \leq \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} \varphi'(t) dt = \varphi(\tilde{t}_1) - \varphi(t_0) = \tilde{t}_1 - t_1.$$

Отсюда ясно, что

$$\|\tilde{x}_1 - x_0\| \leq \|\tilde{x}_1 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq (\tilde{t}_1 - t_1) + (t_1 - t_0) = \tilde{t}_1 - t_0 \leq r,$$

и, значит, $\tilde{x}_1 \in \Omega_0$.

Пусть уже доказано, что

$$\tilde{x}_k \in \Omega_0, \quad \|\tilde{x}_k - x_k\| \leq \tilde{t}_k - t_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Тогда

$$\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = S(\tilde{x}_n) - S(x_n) = \int_{x_n}^{\tilde{x}_n} S'(x) dx.$$

Но если x и t — соответствующие точки отрезка $[x_n, \tilde{x}_n]$ и промежутка $[t_n, \tilde{t}_n]$,

$$x = x_n + \tau(\tilde{x}_n - x_n), \quad t = t_n + \tau(\tilde{t}_n - t_n) \quad (0 \leq \tau \leq 1),$$

то

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \tau \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq \tau(\tilde{t}_n - t_n) + (t_n - t_{n-1}) + \dots + (t_1 - t_0) = t - t_0, \end{aligned}$$

и поэтому для указанных x и t будет $\|S'(x)\| \leq \varphi'(t)$ и

$$\|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \int_{t_n}^{\tilde{t}_n} \varphi'(t) dt = \varphi(\tilde{t}_n) - \varphi(t_n) = \tilde{t}_{n+1} - t_{n+1},$$

а тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_{n+1} - x_0\| &\leq \|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_0\| \leq \\ &\leq (\tilde{t}_{n+1} - t_{n+1}) + (t_{n+1} - t_0) = \tilde{t}_{n+1} - t_0 \leq r, \end{aligned}$$

и, следовательно, $\tilde{x}_{n+1} \in \Omega_0$.

По индукции заключаем, что (16) справедливо для всех $k = 1, 2, \dots$

Поскольку последовательности $\{t_n\}$ и $\{\tilde{t}_n\}$ имеют общий предел (равный t^*), то из сходимости последовательности $\{x_n\}$ вследствие (16) вытекает сходимость последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ и равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*. \quad (17)$$

Итак, доказано, что какое бы начальное приближение $\tilde{x}_0 \in \Omega_0$ ни взять, процесс последовательных приближений сходится к x^* . Отсюда немедленно вытекает единственность решения уравнения (6). Действительно, если $\tilde{x} \in \Omega_0$ — корень этого уравнения, то, взяв $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$, получим, очевидно, при любом $n = 1, 2, \dots$

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}$$

и ввиду (17) $\tilde{x} = x^*$, что и требовалось доказать.

1.3. Перейдем к исследованию метода Ньютона для уравнения (2).

Вместе с уравнением (2) рассмотрим вещественное уравнение

$$\psi(t) = 0. \quad (18)$$

Будем считать, что операция P определена в сфере Ω ($\|x - x_0\| < R$) пространства X и имеет в замкнутой сфере Ω_0 ($\|x - x_0\| \leq r$) непрерывную вторую производную. Функцию ψ будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемой в промежутке $[t_0, t']$ ($t' = t_0 + r$).

С помощью теоремы 1 легко получить следующий результат о сходимости модифицированного метода Ньютона.

Теорема 3 (I.XVIII). Пусть выполнены условия:

1) существует линейная операция $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$;

2) $c_0 = -\frac{1}{\psi'(t_0)} > 0$;

3) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq c_0\psi(t_0)$;

4) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq c_0\psi''(t)$, если $\|x - x_0\| \leq t - t_0 \leq r$;

5) уравнение (18) имеет в промежутке $[t_0, t']$ корень $\bar{t}$.

Тогда модифицированный процесс Ньютона для уравнений (2) и (18), начатый соответственно с x_0 и t_0 , сходится и приводит к решениям этих уравнений x^* и t^* , причем

$$\|x^* - x_0\| \leq t^* - t_0. \quad (19)$$

Доказательство. Выше было отмечено, что модифицированный метод Ньютона для уравнения (2) равносильен методу последовательных приближений для уравнения (5), т. е. для уравнения

$$x = S(x) \quad (S(x) = x - \Gamma_0(P(x))). \quad (20)$$

Равным образом, модифицированный процесс Ньютона для уравнения (18) может быть заменен процессом последовательных приближений для уравнения

$$t = \varphi(t) \quad (\varphi(t) = t + c_0 \psi(t)). \quad (21)$$

Докажем, что для уравнений (20) и (21) выполнены условия теоремы 1.

Имеем

$$S(x_0) - x_0 = -\Gamma_0(P(x_0))$$

и аналогично

$$\varphi(t_0) - t_0 = c_0 \psi(t_0).$$

Таким образом, в силу условия 3)

$$\|S(x_0) - x_0\| \leq \varphi(t_0) - t_0.$$

Далее, используя правила дифференцирования (XVII. 1.2), получим

$$S'(x) = I - \Gamma_0 P'(x); \quad S''(x) = -\Gamma_0 P''(x),$$

поэтому

$$S'(x) = S'(x) - S'(x_0) = \int_{x_0}^x S''(x) dx = - \int_{x_0}^x \Gamma_0 P''(x) dx,$$

и, следовательно, на основании замечания из XVII. 1.7 и условия 4) найдем

$$\|S'(x)\| \leq \int_{t_0}^t c_0 \psi''(\tau) d\tau = c_0 \psi'(t) - c_0 \psi'(t_0) = 1 + c_0 \psi'(t) = \varphi'(t),$$

если x и t связаны неравенством $\|x - x_0\| \leq t - t_0$.

Таким образом уравнение (21) является мажорантным по отношению к уравнению (20), что позволяет применить теорему 1 к этим уравнениям, а это для данных уравнений приводит к доказываемому результату.

З а м е ч а н и е. Как и в теореме 1, быстрота сходимости последовательности $\{x'_n\}$ (см. (3)) к x^* оценивается неравенством

$$\|x^* - x'_n\| \leq t^* - t'_n \quad (n = 0, 1, \dots; x'_0 = x_0; t'_0 = t_0), \quad (22)$$

где t'_n — последовательные приближения модифицированного метода Ньютона для уравнения (18).

Применение теоремы 2 к уравнениям (20) и (21) позволяет сразу же установить факт единственности решения уравнения (2).

Теорема 4 (I. XVIII). Пусть соблюдены условия теоремы 3 и, кроме того,

$$\psi(t') \leq 0. \quad (23)$$

Тогда, если уравнение (18) имеет в промежутке $[t_0, t']$ единственный корень, то уравнение (2) имеет в сфере $\mathcal{Q}_0$ только одно решение.

Для доказательства достаточно заметить, что (23) влечет неравенство

$$\varphi(t') = t' + c_0 \psi(t') \leq t',$$

т. е. выполнено дополнительное условие теоремы 2.

Замечание. Так как t^* — наименьший корень уравнения (18), то теорема единственности, наверно, применима, если положить $t' = t^*$. Таким образом, можно гарантировать единственность решения x^* уравнения (2) во всяком случае в сфере

$$\|x - x_0\| \leq t^* - t_0.$$

1.4. Сходимость основного процесса Ньютона устанавливается на основании теоремы 3 о сходимости модифицированного процесса.

Теорема 5 (1. XVIII). Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда основной процесс Ньютона для уравнения (2), начатый с x_0 , осуществим и приводит к последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к корню x^* уравнения (2).

Доказательство. Первый шаг в модифицированном и основном процессах Ньютона совпадает, поэтому x_1 имеет смысл, и $x_1 \in \Omega_0$. Проверим, что условия теоремы 3 не нарушатся, если в ней заменить x_0 на x_1 , а t_0 на t_1 . Сохраняя обозначения теоремы 3, рассмотрим операцию

$$I - \Gamma_0 P'(x_1) = -\Gamma_0(P'(x_1) - P'(x_0)) = -\int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x) dx.$$

Используя замечание из XVII. 1.7, найдем

$$\|I - \Gamma_0 P'(x_1)\| \leq \int_{t_0}^{t_1} c_0 \psi''(t) dt = 1 + c_0 \psi'(t_1) = q.$$

Так как $\psi''(t) \geq 0$ во всем промежутке $[t_0, t']$, а $\psi(t_0) \geq 0$, то минимум функции $\psi(t)$ не может достигаться левее точки t^* . Поскольку $t_1 \leq t^*$ и $\psi'(t_0) < 0$, то $\psi'(t_1) < 0$ *) и, значит, $q < 1$.

По теореме Банаха (V. 2.5) существует линейная операция

$$U = [\Gamma_0 P'(x_1)]^{-1} \in [X \rightarrow X],$$

причем

$$\|U\| \leq \frac{1}{1-q} = \frac{\psi'(t_0)}{\psi'(t_1)} = \frac{c_1}{c_0} \quad \left(c_1 = -\frac{1}{\psi'(t_1)}\right). \quad (24)$$

*) Если $\psi'(t_1) = 0$, то $t_1 = t^*$ и $\psi(t_1) = 0$, а тогда

$$0 = \psi(t_1) - \psi(t_0) - \psi'(t_0)(t_1 - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi''(t)(t_1 - t) dt,$$

что возможно лишь при $\psi''(t) = 0$ в промежутке $[t_0, t_1]$, а это, в свою очередь, приводит к равенству $\psi'(t_0) = \psi'(t_1) = 0$.

Следовательно, существует линейная операция

$$\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1} = U\Gamma_0.$$

Итак, условия 1) и 2) теоремы 3 проверены.

Докажем теперь, что

$$\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq c_0\psi(t_1). \quad (25)$$

По формуле Тэйлора (XVII. 2.5) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_0(P(x_1)) &= \Gamma_0(P(x_0)) + \Gamma_0 P'(x_0)(x_1 - x_0) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_0) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx = \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx. \end{aligned}$$

Аналогично

$$c_0\psi(t_1) = c_0 \int_{t_0}^{t_1} \psi''(t)(t_1 - t) dt.$$

Так как для соответствующих точек x и t отрезков $[x_0, x_1]$ и $[t_0, t_1]$ будет

$$\|\Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot)\| \leq \|\Gamma_0 P''(x)\| \|x_1 - x\| \leq c_0\psi''(t)(t_1 - t),$$

то

$$\left\| \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx \right\| \leq \int_{t_0}^{t_1} c_0\psi''(t)(t_1 - t) dt,$$

а это и означает (25).

Принимая во внимание (25) и (24), получим

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1(P(x_1))\| &= \|U\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \|U\| \|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \\ &\leq \frac{c_1}{c_0} \cdot c_0\psi(t_1) = c_1\psi(t_1), \end{aligned}$$

т. е. условие 3) также выполнено.

Условие 4) проверяется подобным же образом. Отметим сначала, что если $\|x - x_1\| \leq t - t_1$, то подавно $\|x - x_0\| \leq t - t_0$. Поэтому

$$\|\Gamma_1 P''(x)\| = \|U\Gamma_0 P''(x)\| \leq \|U\| \|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \frac{c_1}{c_0} \cdot c_0\psi''(t) = c_1\psi''(t).$$

Наконец, условие 5) не нарушается, так как корень $\bar{t}$ лежит в промежутке $[t^*, t']$, а следовательно, и в более широком промежутке $[t_1, t']$.

Рассуждая аналогично, покажем, что условия теоремы 3 не нарушатся, если перейти от x_1 и t_1 к x_2 и t_2 и т. д.

Итак, все x_n имеют смысл, т. е. уже доказано, что процесс Ньютона осуществим.

Так как последовательность $\{t_n\}$ очевидно возрастающая и ограниченная, то она имеет предел $\tilde{t}$, а ввиду неравенств

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

последовательность $\{x_n\}$ также имеет предел $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Из (1) получаем соотношение

$$P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (26)$$

Для произвольного $x \in \Omega_0$ по формуле конечных приращений имеем

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0[P'(x) - P'(x_0)]\| &\leq \|x - x_0\| \sup_{0 < \theta < 1} \|\Gamma_0 P''(x_0 + \theta(x - x_0))\| \leq \\ &\leq r \max_{[t, t']} c_0 \psi''(t), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|P'(x_n)\|$ ограничены в совокупности. Поэтому предельный переход в (26) дает

$$P(\tilde{x}) = 0,$$

т. е. $\tilde{x}$ является корнем уравнения (2).

Равным образом $\tilde{t}$ является корнем уравнения (18), причем так как $\tilde{t} \leq t$, а t^* — наименьший корень, то $\tilde{t} = t^*$.

Поскольку очевидно $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \tilde{t} - t_0 = t^* - t_0$, то согласно замечанию к теореме 4 $\tilde{x} = x^*$.

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x^* оценивается неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (27)$$

Это следует из неравенства (22), так как x_n и t_n можно рассматривать как первые приближения по модифицированному методу Ньютона с начальными приближениями x_{n-1} и t_{n-1} соответственно.

1.5. Непосредственное использование теоремы 3 или теоремы 5 представляется обычно затруднительным, вследствие наличия в их формулировке неопределенной функции ψ . В связи с этим приобретает значение

Теорема 6 (1. XVIII). Пусть, как и раньше, операция P определена в Ω и имеет непрерывную вторую производную в Ω_0 . Пусть, кроме того,

1) существует линейная операция $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$;

- 2) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \eta$;
 3) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq K \quad (x \in \Omega_0)$.
 Тогда, если

$$h = K\eta \leq \frac{1}{2} \quad (28)$$

а

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad (29)$$

то уравнение (2) имеет решение x , к которому сходится процесс Ньютона (основной и модифицированный). При этом

$$\|x^* - x_0\| \leq r_0. \quad (30)$$

Далее, если при $h < \frac{1}{2}$

$$r < r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad (31)$$

а при $h = \frac{1}{2}$

$$r \leq r_1, \quad (32)$$

то в сфере Ω_0 решение x^* единственно.

Быстрота сходимости основного процесса характеризуется неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} (2h)^{2^n} \frac{\eta}{h} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (33)$$

а модифицированного — при $h < \frac{1}{2}$ —

$$\|x^* - x'_n\| \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (34)$$

Доказательство. Рассмотрим в промежутке $[0, r]$ вещественную функцию

$$\psi(t) = Kt^2 - 2t + 2\eta = Kt^2 - 2t + \frac{2h}{K} = \frac{h}{\eta} t^2 - 2t + 2\eta.$$

Проверим, что операция P и функция ψ удовлетворяют всем условиям теоремы 3 (а значит, и теоремы 5). В самом деле, выполнение условий 1) — 4) очевидно; далее, так как корни уравнения

$$\psi(t) = 0 \quad (35)$$

есть

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta,$$

то (28) обеспечивает вещественность корней, а условие (29) гарантирует, что наименьший корень, равный r_0 , содержится в проме-

жутке $[0, r]$. Поскольку $t^* = r_0$, то неравенство (30) означает просто неравенство (19) теоремы 3.

Утверждение о единственности решения является следствием теоремы 4, так как, каково бы ни было $h \leq \frac{1}{2}$, при условиях теоремы $\psi(r) \leq 0$ и корень уравнения (35) единственен в промежутке $[0, r]$.

Установим теперь неравенства (33) и (34), характеризующие быстроту сходимости процесса Ньютона. Принимая во внимание замечания к теоремам 3 и 5, достаточно рассмотреть лишь вещественные последовательности $\{t_n\}$ и $\{t'_n\}$ последовательных приближений соответственно основного и модифицированного процессов для уравнения (35).

Рассмотрим сначала основной метод. Обозначим

$$c_n = -\frac{1}{\psi'(t_n)}, \quad \eta_n = c_n \psi(t_n), \quad K_n = c_n \psi''(t_n) = 2Kc_n, \quad h_n = K_n \eta_n$$

и выразим η_n , K_n и h_n через эти же величины, но с меньшим на единицу индексом. Для этого отметим, что

$$t_{k+1} - t_k = -\frac{\psi(t_k)}{\psi'(t_k)} = \eta_k \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (36)$$

Следовательно, по формуле Тэйлора для полинома второй степени

$$\begin{aligned} \eta_n &= c_n \psi(t_n) = c_n \psi(t_{n-1} + \eta_{n-1}) = \\ &= c_n \left[\frac{1}{2} \psi''(t_{n-1}) \eta_{n-1}^2 + \psi'(t_{n-1}) \eta_{n-1} + \psi(t_{n-1}) \right] = \\ &= c_n \left[K \eta_{n-1}^2 - \frac{\eta_{n-1}}{c_{n-1}} + \frac{\eta_{n-1}}{c_{n-1}} \right] = c_n K \eta_{n-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{c_n}{c_{n-1}} \cdot 2Kc_{n-1} \eta_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \frac{c_n}{c_{n-1}} K_{n-1} \eta_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{\psi'(t_n)}{\psi'(t_{n-1})} = \frac{\psi'(t_{n-1}) + \psi''(t_{n-1}) \eta_{n-1}}{\psi'(t_{n-1})} = 1 - K_{n-1} \eta_{n-1} = 1 - h_{n-1}, \quad (37)$$

поэтому

$$\eta_n = \frac{1}{2} \frac{K_{n-1} \eta_{n-1}^2}{1 - h_{n-1}} = \frac{\eta_{n-1}}{2} \cdot \frac{h_{n-1}}{1 - h_{n-1}}. \quad (38)$$

Аналогично также с помощью (37)

$$K_n = 2c_n K = 2Kc_{n-1} \cdot \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{K_{n-1}}{1 - h_{n-1}}.$$

Отсюда

$$h_n = K_n \eta_n = \frac{1}{2} \frac{K_{n-1} \eta_{n-1} h_{n-1}}{(1 - h_{n-1})^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{n-1}}{1 - h_{n-1}} \right]^2. \quad (39)$$

Из (38) и (39), учитывая, что $h_n \leq \frac{1}{2}$, получаем оценки

$$\eta_n \leq h_{n-1} \eta_{n-1}; \quad h_n \leq 2h_{n-1}^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (40)$$

Следовательно, $h_n \leq \frac{1}{2} [2h_0]^{2^n} = \frac{1}{2} [2h]^{2^n}$ и

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq h_{n-1} \eta_{n-1} \leq h_{n-1} h_{n-2} \eta_{n-2} \leq \dots \leq h_{n-1} h_{n-2} \dots h_0 \eta_0 \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta. \end{aligned}$$

Отсюда, наконец, привлекая (36), находим

$$\begin{aligned} t^* - t_n &= (t_{n+1} - t_n) + (t_{n+2} - t_{n+1}) + \dots = \eta_n + \eta_{n+1} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta \left\{ 1 + \frac{1}{2} [2h]^{2^n} + \frac{1}{2^2} [2h]^{2^{n+1}} + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{2}{2^n} [2h]^{2^{n-1}} \eta = \frac{1}{2^n} [2h]^{2^n} \frac{\eta}{h}. \end{aligned}$$

В силу (27) это приводит к требуемой оценке (33).

Рассмотрим теперь оценку погрешности модифицированного метода. Предположим, что $h < \frac{1}{2}$. Понимая под φ ту же функцию, что и в доказательстве теоремы 3, можем написать

$$t^* - t'_n = \varphi(t^*) - \varphi(t'_{n-1}) = \varphi'(\tilde{t}_n)(t^* - t'_{n-1}) \left(\tilde{t}_n = \frac{t^* + t'_{n-1}}{2} \right).$$

Но

$$\varphi'(t) = 1 + c_0 \psi'(t) = Kt,$$

так что

$$\varphi'(\tilde{t}_n) = K\tilde{t}_n \leq Kt^* = 1 - \sqrt{1 - 2h}.$$

Поэтому

$$t^* - t'_n \leq [1 - \sqrt{1 - 2h}](t^* - t'_{n-1}).$$

Применяя этот же прием, оценим $t^* - t'_{n-1}$ и продолжая так и дальше, получим, в конце концов,

$$t^* - t'_n \leq [1 - \sqrt{1 - 2h}]^n (t^* - t'_0) = \frac{\eta}{h} [1 - \sqrt{1 - 2h}]^{n+1}.$$

Подставляя это в (22), найдем

$$\|x^* - x'_n\| \leq \frac{\eta}{h} [1 - \sqrt{1 - 2h}]^{n+1}.$$

т. е. неравенство (34).

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Условия 2) и 3) теоремы можно заменить условиями:

- 1') $\|\Gamma_0\| \leq B'$;
 2') $\|P(x_0)\| \leq \eta'$;
 3') $\|P''(x)\| \leq K' \quad (x \in \mathcal{Q}_0)$.

При этом h, r_0, r_1 будут соответственно

$$h = K' B'^2 \eta'; \quad r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B' \eta', \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} B' \eta'.$$

Замечание 2. Условия (28), (29), (31) (или (32)) точны в том смысле, что для квадратного уравнения (35) нарушение каждого из первых двух условий влечет отсутствие решения для этого уравнения, а без условия (31) или (32) не имеет места единственность. *)

§ 2. Следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона

В этом параграфе указаны некоторые следствия из теоремы о сходимости метода Ньютона (теорема 6 (1.XVIII)). Как и в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать уравнение

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

причем относительно операции P (ее области задания, дифференциальных свойств и т. д.) сохраним прежние предположения и обозначения.

2.1. Прежде всего отметим следующее обобщение теоремы 6 (1.XVIII), когда вместо обратной операции $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ требуется лишь существование операции, близкой к Γ_0 .

Теорема 1 (2.XVIII). Пусть существует линейная операция $\Gamma \in [Y \rightarrow X]$ и выполнены условия:

- 1) $\|\Gamma(P(x_0))\| \leq \bar{\eta}$;
 2) $\|\Gamma P'(x_0) - I\| \leq \delta$;
 3) $\|\Gamma P''(x)\| \leq \bar{K} \quad (x \in \mathcal{Q}_0)$.

Тогда, если

$$\bar{h} = \frac{\bar{K} \bar{\eta}}{(1 - \delta)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \delta < 1 \quad (2)$$

и

$$r \geq \bar{r}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta}, \quad (3)$$

*) В случае условия (32) уравнение (35) имеет единственное решение. Однако уравнение $\psi(t) - \varepsilon = 0$ ($\varepsilon > 0$) будет иметь в промежутке $[0, r]$ уже два решения.

то уравнение (1) имеет решение $x^* \in \Omega_0$, единственное, если

$$r < \bar{r}_1 \quad \text{при} \quad \bar{h} < \frac{1}{2} \quad \left(\bar{r}_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \cdot \frac{\dot{\eta}}{1 - \delta} \right).$$

$$r \leq \bar{r}_1 \quad \text{при} \quad \bar{h} = \frac{1}{2}$$

При этом, если $\{x_n\}$ — последовательность приближений основного процесса Ньютона, то

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2^n} [2\bar{h}]^{2^n} \frac{\bar{\eta}}{\bar{h}(1-\delta)} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 6 (1.XVIII). Из второго условия вытекает, что существует линейная операция

$$U = [\Gamma P'(x_0)]^{-1},$$

причем

$$\|U\| \leq \frac{1}{1-\delta}.$$

Отсюда следует, что существует линейная операция

$$\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1} = U\Gamma.$$

При этом

$$\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \|U\| \|\Gamma(P(x_0))\| \leq \frac{\bar{\eta}}{1-\delta},$$

$$\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq \|U\| \|\Gamma P''(x)\| \leq \frac{\bar{K}}{1-\delta} \quad (x \in \Omega_0).$$

Остается заменить в теореме 6 (1.XVIII) η на $\frac{\bar{\eta}}{1-\delta}$ и K на $\frac{\bar{K}}{1-\delta}$.

2.2. Рассмотрим процесс последовательных приближений, подобный модифицированному, с заменой в последней операции $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ на близкую к ней, Γ . Иначе говоря, построим последовательность $\{\tilde{x}_n\}$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \Gamma(P(\tilde{x}_n)) \quad (n = 0, 1, \dots; \tilde{x}_0 = x_0). \quad (4)$$

Теорема 2 (2.XVIII). В условиях теоремы 1 процесс (4) осуществим, т. е. $\tilde{x}_n \in \Omega_0$ ($n = 0, 1, \dots$) и имеет место сходимость

$$\tilde{x}_n \rightarrow x^*.$$

Доказательство. Так же, как и в теореме 3 (1.XVIII), при доказательстве сходимости модифицированного процесса восполь-

зуемся теоремой 1 (1.XVIII), полагая в ней

$$S(x) = x - \Gamma(P(x)) \quad (x \in \mathcal{Q}_0)$$

и

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \bar{K} t^2 + \delta t + \bar{\eta} = t + \psi(t) \quad \left(\psi(t) = \frac{1}{2} \bar{K} t^2 - (1 - \delta)t + \bar{\eta}; \right. \\ \left. t \in [t_0, t'], t_0 = 0, t' = r \right).$$

Имеем

$$\|S(x_0) - x_0\| = \|\Gamma(P(x_0))\| \leq \bar{\eta} = \varphi(t_0) - t_0.$$

Далее, если $\|x - x_0\| \leq t \leq r$, то

$$\|S'(x)\| = \|I - \Gamma P'(x)\| \leq \|I - \Gamma P'(x_0)\| + \|\Gamma(P'(x_0) - P'(x))\| \leq \\ \leq \delta + \left\| \int_{x_0}^x \Gamma P''(y) dy \right\| \leq \delta + \int_0^t \bar{K} d\tau = \delta + \bar{K}t = \varphi'(t).$$

Таким образом, уравнение

$$x = S(x) \tag{5}$$

мажорируется уравнением $t = \varphi(t)$, которое имеет решение

$$t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta} = \bar{r}_0 \leq r.$$

Следовательно, и уравнение (5) имеет решение, которое должно совпадать с x^* (так как в сфере $\|x - x_0\| \leq \bar{r}_0$ решение x^* уравнения (1) единственно).

З а м е ч а н и е. Что касается оценки быстроты сходимости последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ к x^* , то она может быть выведена совершенно аналогично тому, как это было сделано в XVIII. 1.4 для модифицированного процесса. Именно, предоставляем читателю доказать, что при $h < \frac{1}{2}$

$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leq \frac{1}{h} [1 - (1 - \delta) \sqrt{1 - 2\bar{h}}]^{n+1} \frac{\bar{\eta}}{(1 - \delta)^2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

2.3. Пусть выполнены условия теоремы 6 (1.XVIII) с $h < \frac{1}{2}$.

Покажем, что процесс Ньютона обладает известной устойчивостью, т. е. сходимость процесса не нарушится, если в качестве начального приближения взять не x_0 , а произвольный элемент $x'_0 \in \mathcal{Q}_0$, достаточно близкий к x_0 .

Теорема 3 (2.XVIII). Пусть выполнены условия теоремы 6 (1.XVIII) с постоянными η, K и $h = K\eta < \frac{1}{2}$. Если при этом

$$\|x'_0 - x_0\| \leq \varepsilon \quad \left(\varepsilon = \frac{1 - 2h}{4K} = \frac{1 - 2K\eta}{4K} \right), \tag{6}$$

то основной и модифицированный процессы Ньютона будут сходиться, если в качестве начального приближения принять элемент x'_0 .

Доказательство. Применим теорему 1, взяв в ней в качестве Γ операцию $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, а за x_0 приняв элемент x''_0 . Условие 1):

$$\|\Gamma_0(P(x'_0))\| = \left\| \Gamma_0 \left[P(x_0) + P'(x_0)(x'_0 - x_0) + \int_{x_0}^{x'_0} P''(x)(x'_0 - x) dx \right] \right\| \leq \eta + \varepsilon + K \frac{\varepsilon^2}{2},$$

так что в качестве $\bar{\eta}$ следует принять величину $\eta + \varepsilon + K \frac{\varepsilon^2}{2}$.

$$\|\Gamma_0 P'(x'_0) - I\| = \|\Gamma_0 [P'(x'_0) - P'(x_0)]\| = \left\| \int_{x_0}^{x'_0} \Gamma_0 P''(x) dx \right\|.$$

Таким образом, $\delta = K\varepsilon$.

Наконец, $\bar{K} = K$.

Величина $\bar{h}$ будет при этом равна

$$\bar{h} = \frac{\bar{K}\bar{\eta}}{(1-\delta)^2} = \frac{K\left(\eta + \varepsilon + \frac{K}{2}\varepsilon^2\right)}{(1-K\varepsilon)^2} = \frac{1}{2} \frac{K^2\varepsilon^2 + 2K\varepsilon + 2K\eta}{K^2\varepsilon^2 - 2K\varepsilon + 1} = \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $h \geq 4\sqrt{2} - 5,5 \approx 0,16$, то сфера $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ содержится в сфере $\|x - x_0\| \leq r_0$ и, следовательно, в сфере Ω_0 . Если же $h < 4\sqrt{2} - 5,5$, то условие (6) уже не обеспечивает, вообще говоря, включения $x'_0 \in \Omega_0$ и его надо потребовать дополнительно.

2.4. В числе данных, участвующих в оценке близости начального приближения x_0 к решению x^* , т. е. в оценке величины r_0 , фигурирует и операция Γ_0 . Знание этой операции позволяет уточнить область расположения решения. Действительно, зная Γ_0 , мы можем найти x_1 — следующее приближение по методу Ньютона — и применить к нему теорему 1.

Теорема 4 (2. XVIII). Пусть существует линейная операция $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и выполнены условия

- 1) $\|\Gamma_0(P(x_0))\| \leq \eta$;
- 2) $\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \eta_1$ ($x_1 = x_0 - \Gamma_0(P(x_0))$);
- 3) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leq K$ ($x \in \Omega_0$);
- 4) $h_1 = \frac{K\eta_1}{(1-K\eta)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Тогда уравнение (1) имеет решение x^* , причем

$$\|x^* - x_1\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \cdot \frac{\eta_1}{1 - K\eta}. \quad (7)$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 1, полагая в ней $\Gamma = \Gamma_0$ и беря x_1 вместо x_0 :

$$\|\Gamma_0(P(x_1))\| \leq \eta_1,$$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 P'(x_1) - I\| &\leq \|\Gamma_0[P'(x_1) - P'(x_0)]\| = \\ &= \left\| \int_{x_0}^{x_1} \Gamma_0 P''(x) dx \right\| \leq K \|x_1 - x_0\| \leq K\eta. \end{aligned}$$

Тогда в качестве $\bar{\eta}$, δ и $\bar{h}$ следует принять η_1 , $K\eta$ и h_1 соответственно.

Согласно теореме 1, решение x^* лежит в сфере $\|x - x_1\| \leq \bar{r}_0$. Поскольку в данном случае

$$\bar{r}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\bar{h}}}{\bar{h}} \frac{\bar{\eta}}{1 - \delta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \frac{\eta_1}{1 - K\eta},$$

отмеченное обстоятельство приводит к (7).

З а м е ч а н и е 1. Может случиться, что $h_1 \leq \frac{1}{2}$, хотя $h = K\eta > \frac{1}{2}$. В этом случае теорема дает возможность делать заключение о существовании решения, хотя теорема 6 (1. XVIII) и не применима.

З а м е ч а н и е 2. Условия 1) — 4) не гарантируют включение сферы $\|x - x_1\| \leq \bar{r}_0$ в сферу Ω_0 . Поэтому надо предполагать, что радиус сферы Ω_0 настолько велик, чтобы указанное включение имело место. Например,

$$r \geq \eta + \bar{r}_0 = \eta + \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \cdot \frac{\eta_1}{1 - K\eta}.$$

2.5. Если в условиях замечания 1 к теореме 6 (1. XVIII) оценка нормы операции $[P'(x)]^{-1}$ известна не только в точке x_0 , но и во всей области Ω_0 , то можно ослабить условие, накладываемое на h , потребовав вместо $h \leq \frac{1}{2}$ лишь $h < 2$ (см. [80a]).

Теорема 5 (2. XVIII) (Мысовских). Пусть выполнены условия:

1) $\|P(x_0)\| \leq \eta$;

2) для $x \in \Omega_0$ существует линейная операция $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$, причем

$$\|\Gamma(x)\| \leq B \quad (x \in \Omega_0);$$

3) $\|P''(x)\| \leq K \quad (x \in \Omega_0)$.

Тогда, если

$$h = B^2 K \eta < 2 \quad (8)$$

и

$$r > r' = B\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k - 1},$$

то уравнение (1) имеет решение $x^* \in Q_0$, к которому сходится основной процесс Ньютона, начатый с x_0 . При этом быстрота сходимости устанавливается неравенством

$$\|x^* - x_n\| \leq B\eta \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2^n - 1}}{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n}} \quad (x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)(P(x_n)); n = 0, 1, \dots). \quad (9)$$

Доказательство. Покажем сначала, что процесс Ньютона осуществим, т. е. что $x_n \in Q_0$ ($n = 0, 1, \dots$). Имеем

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma(x_0)(P(x_0))\| \leq B\eta, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \|P(x_1)\| &= \left\| P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} P''(x)(x_1 - x, \cdot) dx \right\| \leq \\ &\leq \int_0^{B\eta} K(B\eta - t) dt = \frac{KB^2\eta^2}{2} = \frac{h\eta}{2} = \eta_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) вытекает, что $x_1 \in Q_0$.

Подсчитаем величину h , соответствующую точке x_1 :

$$h_1 = B^2 K \eta_1 = \frac{B^2 K \eta h}{2} = \frac{h^2}{2}. \quad (12)$$

Пусть уже доказано, что $x_n \in Q_0$. Обозначая через h_k и η_k ($k = 0, 1, \dots, n$) величины h и η , отвечающие точке x_k , будем иметь аналогично (10), (11) и (12)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq B\eta_n, \quad (13)$$

$$\eta_{k+1} = \frac{h_k \eta_k}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$h_k = 2 \left(\frac{h_{k-1}}{2}\right)^2 = \dots = 2 \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^k} = 2 \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Из двух последних соотношений находим

$$\eta_n = \frac{h_{n-1} \eta_{n-1}}{2} = \frac{h_{n-1} h_{n-2} \eta_{n-2}}{4} = \dots = \frac{h_{n-1} h_{n-2} \dots h_0}{2^n} \eta_0 = \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n - 1} \eta$$

Подставляя это в (13), получим

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq B\eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n-1}. \quad (14)$$

Отсюда, используя для $\|x_{k+1} - x_k\|$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) аналогичную оценку,

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{k=0}^n \|x_{k+1} - x_k\| \leq B\eta \sum_{k=0}^n \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1} \leq r' \leq r,$$

и, следовательно, $x_{n+1} \in \Omega_0$.

Также на основании (14) имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} B\eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (15)$$

так что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе и, значит, существует $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ясно, что x^* — решение уравнения (1).

Устремляя в (15) $p \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\|x^* - x_n\| \leq B\eta \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k-1} \leq B\eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n \cdot k} = B\eta \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{2^n-1}}{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^{2^n}},$$

что и дает оценку (9) быстроты сходимости процесса.

2.6. Нередко оказывается возможным данное уравнение (1) заменить на близкое к нему, но уже более простое уравнение также, вообще говоря, нелинейное. Выясним условия, на основании которых можно судить о разрешимости данного уравнения по решению приближенного уравнения.

Итак, пусть уравнение (1) имеет вид

$$P(x) \equiv \pi(x) + R(x) = 0. \quad (16)$$

Предположим, что элемент x_0 является решением упрощенного уравнения

$$\pi(x_0) = 0.$$

Если выполнены условия:

$$1) \|\pi'(x_0)^{-1} R(x_0)\| \leq \eta;$$

$$2) \|\pi'(x_0)^{-1} R'(x_0)\| \leq \alpha < 1;$$

$$3) \|\pi'(x_0)^{-1} \pi''(x)\| \leq K, \quad \|\pi'(x_0)^{-1} R''(x)\| \leq L \quad (x \in \Omega_0),$$

и если

$$h = \frac{\eta(K+L)}{(1-\alpha)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (17)$$

и

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{\eta}{1-\alpha}, \quad (18)$$

то уравнение (16) имеет в Ω_0 решение x^* .

Это предложение получается непосредственно из теоремы 1, если положить в ней $\Gamma = [\pi'(x_0)]^{-1}$. Также с помощью теоремы 1 может быть установлена область единственности решения x^* .

Рассмотренная только что ситуация является частным случаем более общей, когда левая часть уравнения (1) зависит от числового или иного параметра, причем при одном значении параметра решение уравнения известно и требуется установить существование решения для значений параметра, близких к начальному. Мы ограничимся здесь случаем, когда параметр входит в уравнение линейно. Точнее говоря, рассмотрим уравнение

$$P(x, \mu) \equiv \pi(x) + \mu R(x) = 0, \quad (19)$$

где μ означает линейную операцию в пространстве Y ($\mu \in [Y \rightarrow Y]$). В частности, μ может быть числовым множителем.

Теорема 6 (2. XVIII). Пусть выполнены условия:

- 1) $P(x_0, 0) = \pi(x_0) = 0$;
- 2) существует линейная операция $\Gamma_0 = [\pi'(x_0)]^{-1}$ и $\|\Gamma_0\| \leq B$;
- 3) $\|R(x_0)\| \leq \eta$, $\|R'(x_0)\| \leq \alpha$;
- 4) $\|\pi''(x)\| \leq K$, $\|R''(x)\| \leq L$ ($x \in Q_0$).

Тогда, если μ таково, что

$$h_+ = \frac{B^2 \eta (K + L \|\mu\|) \|\mu\|}{(1 - \alpha B \|\mu\|)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha B \|\mu\| < 1, \quad (20)$$

то, если радиус r сферы Q_0 достаточно велик, уравнение (19) имеет решение $x^*(\mu) \in Q_0$.

Доказательство получается непосредственно из сказанного выше по поводу уравнения (16).

Область расположения решения $x^*(\mu)$ и область его единственности могут быть найдены с помощью теоремы 1. Из этой же теоремы следует, что к $x^*(\mu)$ сходится как основной, так и модифицированный процесс Ньютона, начатый с x_0 . Кроме того, на основании теоремы 2 к $x^*(\mu)$ сходится последовательность $\{\tilde{x}_n(\mu)\}$: $\tilde{x}_{n+1}(\mu) = \tilde{x}_n(\mu) - [\pi'(x_0)]^{-1} (P(\tilde{x}_n(\mu), \mu))$ ($n = 0, 1, \dots$; $\tilde{x}_0(\mu) = x_0$). (21)

Этот последний процесс имеет то достоинство, что в нем используется обратная операция, соответствующая начальной точке x_0 и начальному значению параметра $\mu = 0$.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что при каждом μ мажорантным для уравнения (19) будет вещественное уравнение

$$\left(\frac{K}{2} t^2 - \frac{1}{B} t\right) + \|\mu\| \left(\frac{L}{2} t^2 + \alpha t + \eta\right) = 0$$

и условия (20) означают не что иное, как требование вещественности корней этого уравнения.

Замечание 2. Несколько более сложные рассуждения позволяют разобрать общий случай, когда параметр μ входит в уравнение $P(x, \mu) = 0$ нелинейно.

Отметим, что в некоторых случаях более широкие границы для допустимых значений параметра могут быть получены, если применить теорему 1 не к x_0 и Γ_0 , а к значениям x и Γ , представляющим решение системы уравнений

$$P(x, \mu) = 0, \quad \Gamma P'(x, \mu) = I$$

с точностью до «первых» степеней параметра μ .

Ограничимся случаем, когда параметр имеет числовое значение и приближенное уравнение $\pi(x) = 0$ линейно, т. е. уравнение (19) имеет вид

$$P(x, \mu) \equiv U(x - x_0) + \mu R(x) = 0, \quad (22)$$

где $U = \pi'(x_0)$ — линейная операция.

В этом случае указанные решения с точностью до первой степени μ , имеют вид

$$x_1 = x_0 - \mu \Gamma_0(R(x_0)), \quad \Gamma_1 = \Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0.$$

Таким образом, требуется оценить величины

- 1) $\|\Gamma_1(P(x_1, \mu))\| = \|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| \|- \mu R(x_0) +$
 $\quad + \mu R(x_0 - \mu \Gamma_0 R(x_0))\| \leq \gamma_1;$
- 2) $\|\Gamma_1 P'(x_1, \mu) - I\| =$
 $\quad = \|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| \|U + \mu R'(x_0 - \mu \Gamma_0 R(x_0)) - I\| \leq \delta_1;$
- 3) $\|\Gamma_0 - \mu \Gamma_0 R'(x_0) \Gamma_0\| R''(x) \| \leq L_1 \quad (x \in \Omega_0).$

Тогда, уравнение (22) разрешимо, если

$$\frac{L_1 \gamma_1 |\mu|}{(1 - \delta_1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

2.7. Существование решения и сходимость определяющего его процесса в определенной области изменения параметра позволяет делать заключения и о характере зависимости решения $x^*(\mu)$ от параметра. Например, поскольку $\tilde{x}_0(\mu) = x_0$ непрерывно зависит от μ , а $\pi(x)$ и $R(x)$ — непрерывные функции x , то все $\tilde{x}_n(\mu)$ в (21) будут непрерывными функциями параметра, а тогда и $x(\mu)$ непрерывно зависит от μ .

При определенных условиях можно заключить и об аналитическом характере зависимости $x^*(\mu)$ от параметра.

Функцию $x(\mu)$ со значениями в пространстве X будем называть *слабо аналитической*, если, каков бы ни был линейный функционал $f \in X^*$, функция $f(x(\mu))$ аналитическая в обычном смысле слова.

Операция P называется *аналитической*, если она преобразует любую слабо аналитическую функцию $x(\mu)$ в слабо аналитическую же функцию $P(x(\mu))$ (в пространстве Y).

Считая в уравнении (19) μ числовым параметром, предположим, что π и R — аналитические операции. Тогда, все приближения (21) будут, как легко проверить, аналитическими функциями от μ . Пусть f — произвольный линейный функционал в пространстве X . Ввиду равномерной (по μ) ограниченности норм элементов $\tilde{x}_n(\mu)$ аналитические функции

$$\varphi_n(\mu) = f(\tilde{x}_n(\mu)) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ограничены в совокупности, а тогда и функция

$$\varphi(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mu) = f(x^*(\mu))$$

является аналитической. Поскольку f — произвольный функционал, то $x^*(\mu)$ — слабо аналитическая функция от μ .

Если естественным образом определить разложение функции $x^*(\mu)$ в ряд по степеням μ

$$x^*(\mu) = x_0 + \mu x_1 + \dots + \mu^n x_n + \dots$$

то из сказанного вытекает, что ряд должен слабо сходиться для всех $|\mu| < \mu_0$.

Другие условия сходимости метода Ньютона и различные его видоизменения рассматриваются в работах [8], [27д,] [80а], [98], [102а, в], [129], [132], [133], [137], [138], [143]. Особо следует упомянуть о работе [72б], в которой развивается иной по сравнению с изложенным выше подход к решению нелинейных уравнений.

§ 3. Применение метода Ньютона к конкретным функциональным уравнениям

3.1. Рассмотрим сначала применение метода Ньютона к одному вещественному или комплексному уравнению:

$$f(z) = 0. \quad (1)$$

Используя теорему 6 (1. XVIII), учитывая при этом, что величины η и K , фигурирующие там, имеют следующий смысл:

$$\eta \geq \frac{|f(z_0)|}{|f'(z_0)|}, \quad K \geq \max \frac{|f''(z)|}{|f'(z_0)|}$$

(здесь z_0 — начальное приближение), получаем, что существование корня обеспечено, если

$$h = \eta K \leq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{|f(z_0)| |f''(z_0)|}{|f'(z_0)|^2} \leq \frac{1}{2}$$

причем корень расположен в круге

$$|z - z_0| \leq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \quad (2)$$

и единственен в круге

$$|z - z_0| < r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta. *) \quad (3)$$

Метод Ньютона можно использовать и для решения систем алгебраических уравнений

$$\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, v), \quad (4)$$

которую мы будем рассматривать как одно уравнение

$$P(x) = 0$$

в v -мерном пространстве X :

$$y = P(x) \quad (y = (\varphi_1(\xi_1, \dots, \xi_v), \dots, \varphi_v(\xi_1, \dots, \xi_v)), \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_v)).$$

Пусть $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_v^{(0)})$ — начальное приближение. Подставляя его в уравнение метода Ньютона

$$P'(x_0)(x - x_0) + P(x_0) = 0,$$

учитывая при этом выражение для производной $P'(x_0)$, указанное в XVII. 1.6, получим для поправки $\Delta x = x_1 - x_0 = (\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \dots, \Delta \xi_v)$ систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^v \frac{\partial \varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_v^{(0)})}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k = -\varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_v^{(0)}) \quad (j = 1, 2, \dots, v), \quad (5)$$

из которой находим Δx и, следовательно, x_1 . Таким же образом находим x_2 и т. д.

Если использовать модифицированную схему процесса, то матрица системы (5) остается неизменной на каждом шагу — меняются только правые части.

Условия сходимости процесса зависят от нормировки пространства X . Мы рассмотрим два случая: $X = m$, и — менее подробно — $X = 1_v^2$.

Теорема 1 (3. XVIII). Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v$ и начальное приближение x_0 удовлетворяют условиям:

$$1) |\varphi_j(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_v^{(0)})| \leq \eta' \quad (j = 1, 2, \dots, v);$$

2) матрица Якоби

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_v^{(0)}) \right) \quad (j, k = 1, 2, \dots, v)$$

*) При этом предполагается, что оценка второй производной осуществляется в круге $|z - z_0| \leq r$, где $r \geq r_0$, если имеется в виду (2), и $r \geq r_1$, если рассматривается (3).

имеет определитель $D \neq 0$ и, если $A_{j,k}$ означает алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}$, то справедлива оценка

$$\frac{1}{|D|} \sum_{j=1}^{\nu} |A_{j,k}| \leq B' \quad (k = 1, 2, \dots, \nu);$$

$$3) \left| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi_k \partial \xi_s}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu) \right| \leq L \quad (j, k, s = 1, 2, \dots, \nu; |\xi_i - \xi_i^{(0)}| \leq r);$$

$$4) h = B'^2 \eta' L \nu^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда, если

$$r \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B' \eta', \quad (6)$$

то система (4) имеет решение $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_\nu^*)$, лежащее в окрестности точки x_0 , к которому сходятся как основной, так и модифицированный процессы Ньютона.

Доказательство теоремы сводится к проверке условий теоремы 6 (1. XVIII), точнее говоря, замечания 1 к этой теореме, если принять $X = m_\nu$. Эту проверку мы предоставляем читателю. *)

Замечание 1. Быстрота сходимости основного и модифицированного процессов оценивается с помощью неравенств (33) и (34) теоремы 6 (1. XVIII).

Замечание 2. Так как при $0 < h \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \leq 2,$$

то (6) будет выполнено, если принять $r = 2B' \eta'$.

Замечание 3. Пусть число уравнений системы (4) $\nu = 2$. Тогда

$$A_{j,k} = \pm \frac{\partial \varphi_{3-k}}{\partial \xi_{3-j}}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \quad (j, k = 1, 2),$$

поэтому, если известна оценка

$$\left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_k}(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \right| \leq l \quad (j, k = 1, 2),$$

то в качестве B' может быть принята величина

$$B' = \frac{2l}{|D|},$$

и условие 4) запишется в форме

$$\frac{16l^2 \eta' L}{|D|} \leq \frac{1}{2}$$

или

$$32l^2 \eta' L \leq |D|.$$

*) Легко убедиться, что $\|P''(x)\| \leq L \nu^2$ (ср. XVII. 2.2).

Это условие было получено в [88]. Любопытно отметить, что прямое доказательство сходимости метода Ньютона даже в этом простейшем случае весьма сложно.

Если использовать нормировку пространства l_v^2 , то условия 1)–4) теоремы 1 следует заменить условиями:

$$1') \quad \|\Gamma_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = \left[\sum_{k=1}^v |\Delta \xi_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \eta;$$

$$2') \quad \|\Gamma_0\| = \sqrt{\Lambda} \leq B',$$

здесь Γ_0 , как всегда, означает $[P'(x_0)]^{-1}$, а через Λ обозначено наибольшее собственное значение матрицы $\Gamma_0 \Gamma_0^*$; в качестве B' можно принять, например,

$$B' = \frac{1}{|D|} \left[\sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v |A_{j,k}|^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$3') \quad \|P''(x)\| \leq \left[\sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v \sum_{s=1}^v \left| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq K',$$

в качестве K' можно принять поэтому

$$K' = L \sqrt{v};$$

$$4') \quad h = B' K' \eta \leq \frac{1}{2}.$$

Выполнение этих условий обеспечивает существование решения системы (4) и сходимость к нему основного и модифицированного процессов Ньютона.

Проиллюстрируем сказанное примером. Рассмотрим систему

$$3\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^2 = 1,$$

$$\xi_1^4 + \xi_1 \xi_2^3 = 1.$$

Начальное приближение $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})$ выбираем по графику (рис. 7)

$$\xi_1^{(0)} = 0,98, \quad \xi_2^{(0)} = 0,32.$$

Система для определения поправок будет иметь вид

$$1,880 \Delta \xi_1 + 3,188 \Delta \xi_2 = 0,045,$$

$$3,798 \Delta \xi_1 + 0,301 \Delta \xi_2 = 0,046,$$

откуда находим

$$\Delta \xi_1 = 0,0105, \quad \Delta \xi_2 = 0,0075.$$

Отсюда же получаем

$$-\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -0,026 & 0,256 \\ 0,329 & -0,163 \end{pmatrix}.$$

Принимая нормировку пространства m_2 , подсчитаем константы B' , η' и L теоремы 1. Имеем

$$\|\Gamma_0\| = 0,492 < 0,5 = B',$$

$$\|P(x_0)\| = \max [0,046; 0,045] < 0,05 = \eta'.$$

Вторые производные функций φ_1 и φ_2 оцениваем для $\|x - x_0\| \leq 2B'\eta'$, т. е. для $0,93 \leq \xi_1 \leq 1,03$; $0,27 \leq \xi_2 \leq 0,37$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_1^2} &= 6\xi_2; & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= 6\xi_1; & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi_2^2} &= 6\xi_2; \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1^2} &= 12\xi_1^2; & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} &= 3\xi_2^2; & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_2^2} &= 6\xi_1 \xi_2; \end{aligned}$$

то в качестве L можно принять

$$L = 12,8 > \max \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \xi_1^2} = 12(1,03)^2.$$

При указанных значениях B' , η' и L величина h будет

$$h = B'^2 \eta' L^2 = 0,25 \cdot 0,05 \cdot 12,8 \cdot 4 = 0,64.$$

Таким образом, теорема 1 не дает возможности сделать заключение о сходимости процесса Ньютона.

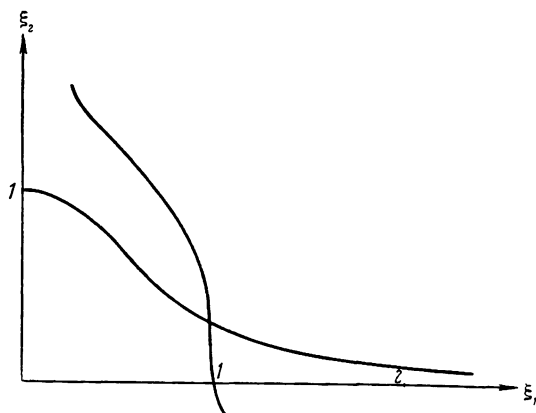


Рис. 7

дмости процесса Ньютона. Это происходит вследствие очень грубой оценки $\|P''(x)\|$. Действительно, мы приняли

$$\|P''(x)\| \leq L^2 = 51,2,$$

между тем фактически имеет место более точная оценка

$$\|P''(x)\| \leq 16 = K'.$$

Используя ее, получим

$$h = B'^2 \eta' K' = 0,25 \cdot 0,05 \cdot 16 = 0,2,$$

что уже позволяет заключить о сходимости процесса Ньютона.

Заметим, что если воспользоваться непосредственно теоремой 6 (1. XVIII), то для h можно получить и еще меньшую величину. Действительно,

$$\|\Gamma_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = \max[|\Delta\xi_1|, |\Delta\xi_2|] = 0,0105,$$

а

$$\|\Gamma_0 P''(x)\| < 7,2.$$

Поэтому, беря $\eta = 0,0105$, $K = 7,2$, получим

$$h = \eta K < 0,08. \quad (7)$$

Используя схему модифицированного процесса, найдем последовательные приближения

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= 0,9905, & \xi_2^{(1)} &= 0,3275; \\ \xi_1^{(2)} &= 0,99117, & \xi_2^{(2)} &= 0,32738; \\ \xi_1^{(3)} &= 0,991189, & \xi_2^{(3)} &= 0,327382. \end{aligned}$$

Оценка погрешности третьего приближения, подсчитанная по формуле (34) теоремы 6 (1. XVIII), дает величину 0,0008 (при этом для h взято значение (7)).

Если применить теорему 4 (2. XVIII), то можно указать и более точную оценку погрешности; именно, на основании указанной теоремы

$$0,991173 \leq \xi_1^* \leq 0,991205; \quad 0,327366 \leq \xi_2^* \leq 0,327398.$$

Таким образом, в третьем приближении оказываются верными четыре десятичных знака.

Если воспользоваться нормировкой пространства I_2^2 , то, исходя из условий 1')—3') можно получить

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &\leq 0,448 < 0,5 = B'; \quad \|\Gamma_0(P(x_0))\| = \|\Delta x\| = 0,0133 < 0,015 = \eta; \\ \|\Gamma_0 P''(x)\| &\leq 15,2 = K'; \\ h &= B'K'\eta = 0,1026. \end{aligned}$$

3.2. Рассмотрим применение метода Ньютона к нелинейным интегральным уравнениям. Пусть дано интегральное уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt, \quad (8)$$

где $K(s, t, u)$ — непрерывная функция всех своих аргументов, имеющая непрерывные производные нужных порядков. В функциональном пространстве X введем операцию P :

$$y = P(x) \quad y(s) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt, \quad (9)$$

и запишем уравнение (8) в виде функционального уравнения

$$P(x) = 0.$$

Процесс Ньютона для этого уравнения строится следующим образом: пусть x_0 — начальное приближение; предположим, что пространство X

и функция $K(s, t, u)$ таковы, что $P'(x_0)$ может быть получено «дифференцированием под знаком интеграла», т. е. что $z = P'(x_0)(x)$ означает

$$z(s) = x(s) - \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) x(t) dt; \quad (10)$$

поправка $\Delta x = x_1 - x_0$ определяется из уравнения

$$P'(x_0)(\Delta x) = -P(x_0),$$

которое в силу (10) будет иметь вид

$$\Delta x(s) - \int_0^1 K'_u(s, t, x_0(t)) \Delta x(t) dt = \varepsilon_0(s), \quad (11)$$

где

$$\varepsilon_0(s) = \int_0^1 K(s, t, x_0(t)) dt - x_0(s)$$

есть невязка уравнения (8), отвечающая начальному приближению.

Таким образом, для нахождения каждого следующего приближения требуется решение линейного интегрального уравнения; при этом, если использовать схему модифицированного процесса, то ядро на каждом шагу будет одним и тем же.

Относительно сходимости процесса Ньютона можно высказать на основании общих теорем те или иные результаты в зависимости от того, какое пространство берется в основу. Так, если $X = C$, то мы приходим к такой теореме.

Теорема 2 (3. XVIII). Пусть выполнены условия:

1) для ядра $K(s, t) = K'_u(s, t, x_0(t))$ интегральное уравнение (11) имеет резольвенту $G(s, t)$, причем

$$\int_0^1 |G(s, t)| dt \leq B \quad (s \in [0, 1]); \quad (12)$$

$$2) |\varepsilon_0(s)| \leq \eta' \quad (s \in [0, 1]);$$

$$3) \int_0^1 |K''_{uu}(s, t, u)| dt \leq K'$$

в области значений s и u , определяемой неравенствами

$$0 \leq s \leq 1, \quad |u - x_0(s)| \leq 2(1 + B)\eta';$$

$$4) \quad h = (1 + B)^2 K' \eta' \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда процесс Ньютона (основной и модифицированный) сходится к решению уравнения (8). При этом решение — $x^*(s)$ — находится в области

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} (1 + B) \eta' \quad (s \in [0, 1])$$

и единственно в области

$$0 \leq s \leq 1 \quad |u - x_0(s)| \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} (1 + B) \eta'.$$

Выполнение условий теоремы 6 (1. XVIII) проверяется здесь без труда, если принять во внимание, что в силу теоремы 2 (3. XVII) производная $P'(x_0)$ операции P имеет форму (10) и на основании той же теоремы $P''(x)$ есть билинейная интегральная операция с ядром $K''_{u^2}(s, t, x_0(t))$. Что касается операции $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, то она, как показано в XIII. 6.1, имеет вид

$$z = \Gamma_0(y) \quad z(s) = y(s) + \int_0^1 G(s, t) y(t) dt,$$

и, следовательно,

$$\|\Gamma_0\| \leq 1 + B.$$

Если за X принять пространство L^2 , то, опираясь на теорему 1 (3. XVII), можно указать иные условия разрешимости интегрального уравнения (8). Именно,

$$1') \quad \int_0^1 |\varepsilon_0(s)|^2 ds \leq \eta'^2;$$

2') соблюдено неравенство

$$\left| \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} \right| \leq B' \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где λ_n — характеристические значения ядра $K(s, t) = K'_u(s, t, x_0(t))$ в случае, если оно симметрично (если ядро $K(s, t)$ не симметрично, это требование усложняется; ср. III. 2.6 и III. 2.7);

$$3') \quad |K''_{u^2}(s, t, u)| \leq K' \quad (s, t \in [0, 1], -\infty < u < \infty);$$

$$4') \quad h = B'^2 K' \eta' \leq \frac{1}{2}.$$

3.3. Условия теоремы 2 или условия 1')—4') предполагают наличие начального приближения x_0 достаточно близкого к точному решению. Сейчас мы рассмотрим довольно общий способ построения такого начального приближения, состоящий в замене данного интегрального уравнения (8) уравнением более простой структуры, решение которого сводится к решению алгебраической системы.

Предположим именно, что ядро $K(s, t, u)$ может быть аппроксимировано ядром более простого вида

$$H(s, t, u) = \sum_{k=1}^{\nu} h_k(t, u) \omega_k(s),$$

где $\omega_k(s)$ ($k = 1, 2, \dots, \nu$) — некоторые функции, которые, не умаляя общности, можно считать попарно ортогональными и нормированными. В качестве H может быть взят, например, отрезок ряда Фурье функции K по функциям полной ортонормальной системы $\{\omega_k(s)\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Уравнение

$$x(s) = \int_0^1 H(s, t, x(t)) dt \quad (13)$$

естественно рассматривать как приближенное по отношению к уравнению (8). Но решение $x_0(t)$ уравнения (13) имеет вид

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{\nu} A_k \omega_k(t),$$

где коэффициенты A_k ($k = 1, 2, \dots, \nu$) определяются из нелинейной алгебраической системы

$$A_j = \int_0^1 h_j \left(t, \sum_{k=1}^{\nu} A_k \omega_k(t) \right) dt. \quad (j = 1, 2, \dots, \nu). \quad (14)$$

Функцию $x_0(t)$ мы и примем за начальное приближение для уравнения (8).

Так как во многих случаях важным является лишь вопрос о существовании решения уравнения (8) и области его расположения и единственности, то здесь естественно применить схему теоремы 6 (2. XVIII). Для этого примем $X = C$ и уравнение (8) запишем в форме

$$P(x) \equiv \pi(x) + \mu R(x) = 0;$$

$$\pi(x)(s) = x(s) - \int_0^1 H(s, t, x(t)) dt;$$

$$R(x)(s) = \int_0^1 [K(s, t, x(t)) - H(s, t, x(t))] dt;$$

$$\mu = 1.$$

Тогда можно высказать следующую теорему.

Теорема 3 (3. XVIII). Пусть выполнены условия:

1) существует резольвента $G_0(s, t)$ ядра $H'_u(s, t, x_0(t))$, причем

$$\int_0^1 |G_0(s, t)| dt \leq B \quad (s \in [0, 1]);$$

$$2) \left| \int_0^1 [K(s, t, x_0(t)) - H(s, t, x_0(t))] dt \right| = |\varepsilon_0(s)| \leq \eta \quad (s \in [0, 1]);$$

$$3) \int_0^1 |K'_u(s, t, x_0(t)) - H'_u(s, t, x_0(t))| dt \leq \alpha \quad (s \in [0, 1]);$$

$$4) \int_0^1 |H''_{u^2}(s, t, u)| dt \leq K \quad (s \in [0, 1], |u - x_0(s)| \leq r);$$

$$5) \int_0^1 |K''_{u^2}(s, t, u) - H''_{u^2}(s, t, u)| dt \leq L \quad (s \in [0, 1], |u - x_0(s)| \leq r);$$

$$6) h = \frac{(1+B^2)(K+L)\eta}{[1-\alpha(B+1)]^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha(B+1) < 1.$$

Тогда если

$$r \geq r_0 = \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{\eta(1+B)}{1-\alpha(1+B)},$$

то уравнение (8) имеет решение x^* , причем

$$|x^*(s) - x_0(s)| \leq r_0. \quad (15)$$

Удобство сформулированной теоремы по сравнению с теоремой 2 состоит в том, что ядро $H'_u(s, t, x_0(t))$ — вырожденное, так что резольвенту $G_0(s, t)$ легко найти.

Для определения решения уравнения (8) можно воспользоваться процессом указанным в XVIII. 2.6, хотя при этом сходимость будет медленнее, чем при использовании модифицированного процесса.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим пример. Пусть дано уравнение

$$x(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x(t)]^2 \sin st dt + 1.$$

В качестве аппроксимирующего ядра возьмем

$$H(s, t, u) = \frac{1}{2} stu^2 + 1,$$

так что уравнение (13) в данном случае будет

$$x(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x(t)]^2 st dt + 1.$$

Решение этого уравнения имеет вид $x_0(t) = 1 + At$, причем A определяется из квадратного уравнения. $A = 0,405887$. Константы, входящие в условия теоремы 3, без труда подсчитываются. Для них мы получаем следующие значения:

$$B = 1,124; \quad \eta = 0,0367; \quad \alpha = 0,055; \quad K = 0,5; \quad L = 0,0417,$$

откуда

$$0,1 < h < 0,103; \quad \alpha(1+B) < 0,12,$$

и на основании (15)

$$|x^*(s) - x_0(s)| < 0,096 \quad (s \in [0, 1]).$$

Если бы мы приняли

$$H(s, t, u) = \frac{1}{2} \left(st - \frac{s^2 t^3}{6} \right) u^2 + 1,$$

то получили бы

$$x_0(s) = 1 + 0,38617s - 0,0345s^3,$$

и оценка (15) приобрела бы вид

$$|x^*(s) - x_0(s)| < 0,0119 \quad (s \in [0, 1]).$$

3.4. Рассмотрим вопрос о применении метода Ньютона к дифференциальным уравнениям. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$x'(t) - \varphi(x(t), t) = 0 \quad (x(0) = 0). \quad (16)$$

В пространстве C^1 непрерывно дифференцируемых в промежутке $[0, a]$ функций, обращающихся в нуль при $t = 0$, введем нормировку

$$\|x\| = \max_{t \in [0, a]} |x(t)| + \lambda \max_{t \in [0, a]} |x'(t)|,$$

где λ — положительный коэффициент, который мы определим впоследствии. Предполагая функцию $\varphi(u, t)$ непрерывной и имеющей непрерывную вторую производную по u в области

$$0 \leq t \leq a; \quad |u - x_0(t)| \leq \delta \quad (x_0 \in C^1),$$

рассмотрим операцию P

$$y = P(x), \quad y(t) = x'(t) - \varphi(x(t), t).$$

Нетрудно проверить, что P отображает сферу $\|x - x_0\| \leq \delta$ (мы обозначим эту сферу через $\mathfrak{Q}$) в пространство C и имеет в $\mathfrak{Q}$ непрерывные производные первого и второго порядка. При этом

$$P'(z)(x)'(t) = x'(t) - \varphi'_u(z(t), t) x(t), \quad (17)$$

$$P''(z)(x, \tilde{x})(t) = -\varphi''_{uu}(z(t), t) x(t) \tilde{x}(t). \quad (18)$$

Найдем $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$. Вследствие (17) элемент $x = \Gamma_0(y)$ есть решение дифференциального уравнения

$$x'(t) = \varphi'_u(x_0(t), t) x(t) + y(t), \quad (19)$$

т. е.

$$x(t) = \psi(t) \int_0^t \frac{y(s)}{\psi(s)} ds,$$

где обозначено

$$\psi(t) = \exp \left(\int_0^t \varphi'_u(x_0(s), s) ds \right).$$

Отсюда

$$\max_{t \in [0, a]} |x(t)| \leq a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} \|y\|,$$

а из уравнения (19) находим

$$\max_{t \in [0, a]} |x'(t)| \leq \max_{t \in [0, a]} |\varphi'_u(x_0(t), t)| \max_{t \in [0, a]} |x(t)| + \|y\| \leq \theta \|y\|.$$

Таким образом,

$$\|x\| \leq \left[a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} + \lambda \theta \right] \|y\|,$$

так что

$$\|\Gamma_0\| \leq a \frac{\max |\psi(t)|}{\min |\psi(t)|} + \lambda \theta.$$

Полученная оценка позволяет применить теорему 6 (1. XVIII), на основании которой мы приходим к следующему результату.

Теорема 4 (3. XVIII). Пусть выполнены условия:

- 1) $|\varphi(x_0(t), t)| \leq \eta' \quad (t \in [0, a]);$
- 2) $|\varphi'_u(x_0(t), t)| \leq M_1 \quad (t \in [0, a]);$
- 3) $|\varphi''_{u^2}(u, t)| \leq M_2 \quad (t \in [0, a], |u - x_0(t)| \leq \delta)$
- 4) $h_0 = M_2 a^2 e^{4aM_1} \eta' < \frac{1}{2}.$

Тогда, если

$$\delta > r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} e^{2aM_1} a \eta',$$

то уравнение (16) имеет в промежутке $[0, a]$ единственное решение $x^*(t)$, причем

$$|x^*(t) - x_0(t)| < r_0.$$

Чтобы проверить условия теоремы 6 (1. XVIII), достаточно убедиться, что

$$\max |\psi(t)| \leq e^{aM_1}, \quad \min |\psi(t)| \geq e^{-aM_1},$$

поэтому в качестве B' в указанной теореме можно принять

$$B' = a e^{2aM_1} + \lambda \theta.$$

Далее, можно положить $K' = M_2$. Таким образом, условие разрешимости уравнения (16) запишется в форме

$$h = B'^2 K' \eta' = (ae^{2aM_1} + \lambda \theta)^2 M_2 \eta' \leq \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Поскольку $\lim_{\lambda \rightarrow 0} h = h_0$, то, взяв λ достаточно малым, мы на основании условия 4) обеспечим выполнение (20).

Замечание 1. Случай ненулевого начального условия сводится к рассмотренному очевидной заменой переменных.

Замечание 2. Использованный метод пригоден и для исследования систем дифференциальных уравнений. Трудности его проведения для указанного случая лежат в невозможности, как правило, аналитического решения линейной системы и, следовательно, оценки нормы операции Γ_0 .

3.5. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$x''(t) + x(t) + \mu \varphi(x(t), x'(t), t) = 0, \quad (21)$$

где $\varphi(u, v, t)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывные производные по u и v до второго порядка и периодическая по t с периодом $\omega > 0$.

Рассуждая по аналогии с 3.4, укажем условия, при которых уравнение (21) имеет периодическое решение с периодом ω , т. е., иначе говоря, имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям,

$$x(\omega) = x(0); \quad x'(\omega) = x'(0). \quad (22)$$

На этот раз воспользуемся схемой теоремы 6 (2. XVIII). Введем пространство $\tilde{C}^2$ дважды непрерывно-дифференцируемых периодических (с периодом ω) функций. Норму в $\tilde{C}^2$ определим, полагая

$$\|x\| = \max_t |x(t)| + \max_t |x'(t)| + \lambda \max_t |x''(t)| \quad (x \in \tilde{C}^2),$$

где $\lambda > 0$ будет определено впоследствии. Введем, далее, операции π и R

$$y = \pi(x), \quad y(t) = x''(t) + x(t); \quad z = R(x), \quad z(t) = \varphi(x(t), x'(t), t).$$

Уравнение (21) запишется при этом в виде

$$\pi(x) + \mu R(x) = 0. \quad (23)$$

Произведем необходимые для применения теоремы 6 (2. XVIII) оценки.

Операция π , очевидно, линейная, так что решением x_0 уравнения $\pi(x) = 0$ является элемент $x_0 = 0$. Если $\cos \omega \neq 1$, то существует $\Gamma_0 = \pi^{-1}$. Операцию Γ_0 можно найти, решая дифференциальное уравнение

$$x'' + x = y$$

при условиях (22). Опуская несложные по существу, но утомительные выкладки, укажем сразу оценку нормы операции Γ_0 :

$$\|\Gamma_0\| \leq \omega \left[2 + \frac{1 + |\cos \omega| + |\sin \omega|}{1 - \cos \omega} \right] + \lambda \theta \leq \frac{4 + 1 + \sqrt{2}}{1 - \cos \omega} \omega + \\ + \lambda \theta < \frac{6,5\omega}{1 - \cos \omega} + \lambda \theta,$$

здесь θ означает некоторое выражение, содержащее ω .

Таким образом, за B можно принять

$$B = \frac{6,5\omega}{1 - \cos \omega} + \lambda \theta = B_0 + \lambda \theta.$$

Учитывая, что

$$R'(x_0)(x)(t) = \varphi'_u(0, 0, t)x(t) + \varphi'_v(0, 0, t)x'(t), \\ R^n(z)(x, \tilde{x})(t) = \varphi''_{u^2}(z(t), z'(t), t)x(t)\tilde{x}(t) + \\ + \varphi''_{uv}(z(t), z'(t), t)[x(t)\tilde{x}'(t) + x'(t)\tilde{x}(t)] + \\ + \varphi''_{v^2}(z(t), z'(t), t)x'(t)\tilde{x}'(t),$$

можем теперь сформулировать следующую теорему.

Теорема 5 (3. XVIII). Пусть выполнены условия:

- 1) $\omega \neq 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$);
- 2) $|\varphi(0, 0, t)| \leq \eta$;
- 3) $|\varphi'_u(0, 0, t)| \leq \alpha, \quad |\varphi'_v(0, 0, t)| \leq \alpha$;
- 4) $|\varphi''_{u^2}(u, v, t)| \leq L, \quad |\varphi''_{uv}(u, v, t)| \leq L, \quad |\varphi''_{v^2}(u, v, t)| \leq L$.

Тогда, если

$$\mu < \frac{1 - \cos \omega}{6,5\omega(\alpha + \sqrt{2}L\eta)}, \quad (24)$$

то уравнение (21) имеет единственное периодическое решение с периодом ω .

Для доказательства достаточно проверить, что неравенство (20) теоремы 6 (2. XVIII), которое в данном случае принимает вид

$$h_\mu = \frac{B^2 L \eta \mu^2}{(1 - \alpha B \mu)^2} \leq \frac{1}{2},$$

будет выполнено, если λ достаточно мало и

$$\frac{B_0^2 L \eta \mu^2}{(1 - \alpha B_0 \mu)^2} < \frac{1}{2},$$

а это неравенство равносильно (24).

Замечание. Если функция φ зависит от своих аргументов аналитически, то на основании сказанного в XVIII. 2.7 можно сделать заключение, что и периодическое решение уравнения (21) будет зависеть от μ аналитически для μ , удовлетворяющих (24).

Для уравнений более высокого порядка можно использовать аналогичные рассуждения.

3.6. Рассмотрим применение метода Ньютона к теории возмущений.

Пусть U и V — линейные операции, отображающие B -пространство X в себя. Пусть требуется найти собственное значение и соответствующий собственный элемент операции $U_t = U + tV$, предполагая, что для $t=0$ решение этой задачи известно, т. е. предполагая известным собственное значение λ_0 операции U и соответствующего ему собственного элемента x_0 .

Накладывая на операции U и V некоторые дополнительные требования, докажем, что для достаточно малых t операция U_t имеет собственное значение λ_t и соответствующий ему собственный элемент x_t , близкие к λ_0 и соответственно к x_0 . Именно, имеет место

Теорема 6 (З. XVIII). Пусть выполнены условия:

1) $\bar{\lambda}_0$ является собственным значением для операции U^* :

$$U^*(f_0) = \bar{\lambda}_0 f_0;$$

при этом f_0 означает собственный элемент, нормированный условием:

$$f_0(x_0) = 1.$$

2) Операция $U - \lambda_0 I$, область значений которой лежит в пространстве $X_0 = N(f_0)$, состоящем из тех $y \in X$, для которых $f_0(y) = 0$ (ср. XII. 2.1), рассматриваемая как операция из X_0 в X_0 , имеет линейную обратную T :

$$T(Ux - \lambda_0 x) = x; \quad UTx - \lambda_0 Tx = x \quad (x \in X_0).$$

Тогда, если

$$\|T\| \|V\| |t| \leq \frac{1}{1 + 2\|f_0\| \|x_0\| + 2\sqrt{(1 + \|f_0\| \|x_0\|)\|f_0\| \cdot \|x_0\|}}. \quad (25)$$

то операция U_t имеет собственное значение λ_t такое, что если нормировать соответствующий собственный элемент x_t условием

$$f_0(x_t) = 1,$$

то

$$|\lambda_t - \lambda_0| \leq A|t|, \quad \|x_t - x_0\| \leq B|t|,$$

где A и B — некоторые постоянные, определяемые операциями U и V .

Доказательство. Требуется определить λ и x из условий

$$U(x) + tV(x) = \lambda x, \quad f_0(x) = 1.$$

Введем новые неизвестные z и δ , полагая

$$x = x_0 + z, \quad \lambda = \lambda_0 + \delta.$$

Новые неизвестные должны удовлетворять условиям

$$U(z) + tV(x_0 + z) = \delta(x_0 + z) + \lambda_0 z, \quad f_0(z) = 0,$$

т. е. в пространстве X_0 требуется найти решение уравнения

$$U(z) + tV(x_0 + z) = \delta(x_0 + z) + \lambda_0 z. \quad (26)$$

Применим к обеим частям уравнения (26) функционал f_0 . Так как

$$f_0(Uz - \lambda_0 z) = U^*(f_0)(z) - (\bar{\lambda}_0 f_0)(z) = 0,$$

то это приводит к равенству

$$\delta = tf_0(V(x_0 + z)), \quad (27)$$

выражающему δ через z . Подставляя (27) в (26), получаем уравнение для определения z

$$U(z) - \lambda_0 z + t[V(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))(x_0 + z)] = 0. \quad (28)$$

В этом уравнении оба слагаемых принадлежат подпространству X_0 , поэтому можно применить к нему операцию T ; это даст

$$\pi(z) + tR(z) = 0, \quad (29)$$

где

$$\pi(z) = z, \quad R(z) = T[V(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))(x_0 + z)].$$

Применим к уравнению (29) теорему 6 (2. XVIII). Имеем ($z_0 = 0$)

$$\pi'(z_0) = I; \quad \pi''(z_0) = 0;$$

$$R(z_0) = T[V(x_0) - f_0(V(x_0))x_0];$$

$$R'(z)(x) = T[V(x) - f_0(V(x))(x_0 + z) - f_0(V(x_0 + z))x];$$

$$\begin{aligned} R''(z)(x, \tilde{x}) &= -T[f_0(V(x))\tilde{x} + f_0(V(x))\tilde{x}] = \\ &= -f_0(V(x))T(\tilde{x}) - f_0(V(\tilde{x}))T(x). \end{aligned}$$

Это позволяет принять

$$\eta = \|T\| \|V\| [1 + \|f_0\| \|x_0\|] \|x_0\|; \quad B = 1;$$

$$\alpha = \|T\| \|V\| [1 + 2\|f_0\| \|x_0\|];$$

$$K = 0; \quad L = 2\|T\| \|V\| \|f_0\|.$$

Условие разрешимости уравнения (29) будет, таким образом,

$$h_t = \frac{L\eta |t|^2}{(1 - \alpha|t|)^2} \leq \frac{1}{2},$$

что равносильно (25).

Обозначая через z_t решение уравнения (29), имеем

$$\|z_t\| = \|z_t - z_0\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_t}}{h_t} \eta |t| \leq 2\eta |t| = B |t|,$$

а из равенства (27) получаем

$$|\lambda_t - \lambda_0| = |\delta| \leq |t| \|f_0\| \|V\| \|x_0 + z_t\| \leq A |t|.$$

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим один важный частный случай, когда возможно более простое выражение величин η и α . Пусть X — гильбертово пространство и U — самосопряженный оператор. Нетрудно проверить, что в этом случае в качестве f_0 можно взять функционал, определяемый элементом x_0 , т. е.

$$f_0(y) = (y, x_0) \quad (y \in X).$$

Учитывая, что $\|x_0\|^2 = f_0(x_0) = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|R(z_0)\| &\leq \|T\| \|Vx_0 - (Vx_0, x_0)x_0\| \leq \|T\| \|V(x_0)\| \leq \|T\| \|V\| \\ \|R'(z_0)(x)\| &\leq \|T\| \|Vx - (Vx, x_0)x_0 - (Vx_0, x_0)x\| \leq \|T\| [\|Vx - \\ &\quad - (Vx, x_0)x_0\| + \|(Vx_0, x_0)x\|] \leq \|T\| [\|Vx\| + |(Vx_0, x_0)| \|x\|] \leq \\ &\leq 2\|T\| \|V\| \|x\|, \end{aligned}$$

так что на этот раз можно принять

$$\eta = \|T\| \|V\|, \quad \alpha = 2\|T\| \|V\|.$$

и условие разрешимости уравнения (29) будет

$$\frac{2(\|T\| \|V\| |t|)^2}{(1 - 2\|T\| \|V\| |t|)^2} \leq \frac{1}{2},$$

что позволяет заменить (25) неравенством

$$\|T\| \|V\| |t| \leq \frac{1}{4}.$$

Непосредственное исследование данного случая привело М. К. Гавурина (см. [27г]) к условию

$$\|T\| \|V\| |t| \leq \frac{1}{2},$$

которое уже не улучшаемо.

3.7. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$\begin{aligned} A(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + B(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \\ + C(s, t, u, p, q) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(s, t, u, p, q) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

здесь p и q означают первые производные: $p = \frac{\partial u}{\partial s}$, $q = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Уравнение (30) будем рассматривать в некоторой области Q и будем искать решение, удовлетворяющее некоторому граничному условию на кривой γ , ограничивающей область Q .

Применение метода Ньютона к поставленной задаче позволяет указать условия существования решения и область его расположения, если известно приближенное решение $u_0 = u_0(s, t)$ (см. [136а, б]).

Будем предполагать, что уравнение (30) эллиптического типа, точнее говоря, будем считать, что для всех значений переменных или, по крайней мере, для тех, которые могут встретиться, выполнено неравенство

$$B^2 - 4AC_1 < 0. \quad (31)$$

Для того, чтобы применить метод Ньютона к уравнению (30), запишем его в виде одного уравнения

$$P(u) = 0, \quad (32)$$

где P — операция, отображающая некоторое пространство функций U в другое пространство функций V . Эти пространства будут конкретизированы позднее.

Пусть $F = F(s, t, u, p, q)$ — некоторая функция. Через F_0 будем обозначать результат подстановки в F вместо u функции u_0 и вместо p и q частных производных $p_0 = \frac{\partial u_0}{\partial s}$ и $q_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t}$.

Не задаваясь вопросами обоснования, легко найдем:

$$\begin{aligned} P'(u_0)(u) = & A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \left[\left(\frac{\partial A}{\partial u} \right)_0 u + \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} + B_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial B}{\partial u} \right)_0 u + \left(\frac{\partial B}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial s \partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left[\left(\frac{\partial C}{\partial u} \right)_0 u + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial C}{\partial p} \right)_0 p + \left(\frac{\partial C}{\partial q} \right)_0 q \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \left[A_0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + B_0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + C_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u + \dots \quad (33) \end{aligned}$$

При этом невыписанные слагаемые не содержат производных второго порядка от u . Таким образом, $P'(u_0)$ есть линейный эллиптический дифференциальный оператор, и, следовательно, каждый шаг метода Ньютона для уравнения (32) сводится к решению линейного эллиптического дифференциального уравнения.

$$P'(u_n)(u_{n+1}) = P'(u_n)(u_n) - P(u_n) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (34)$$

В случае использования схемы модифицированного процесса мы также получаем на каждом шагу эллиптическое уравнение

$$P'(u_0)(u_{i+1}) = P'(u_i)(u_n) - P(u_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (35)$$

но уже с неизменной левой частью.

Вторая производная операции P , которая понадобится для исследования сходимости метода Ньютона, также может быть легко найдена (разумеется, как и выше, без обоснования). Именно, ясно, что $P''(u)(x, y)$ является билинейной формой от x, y и их производных до второго порядка включительно с коэффициентами, зависящими от u . Существенно при этом отметить, что слагаемые, содержащие произведения второй производной от x на вторую производную от y , в указанной форме отсутствуют.

Займемся теперь пространствами U и V . Подчиним их следующим требованиям.

1) Операция P отображает пространство U (или его часть Ω) в пространство V .

2) Операция P должна быть дважды дифференцируема, и в качестве производных должны получаться указанные выше выражения.

3) Каково бы ни было $u \in \Omega$, коэффициенты F_k билинейной формы $P''(u)(x, y)$, рассматриваемые как операторы умножения, являются линейными операциями из V в V , причем

$$\|F_k\|_V^V \leq M \quad (u \in \Omega). \quad (36)$$

Аналогично, если $x \in U$, то функция $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} (\alpha, \beta = 0, 1; \alpha + \beta \leq 1)$, рассматриваемая так же как оператор умножения, является линейной операцией из V в V и

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} \right\|_V^V \leq M_1 \|x\|_U. \quad (37)$$

4) Операция, сопоставляющая элементу $x \in U$ его производную $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} (\alpha, \beta = 0, 1, 2; \alpha + \beta \leq 2)$, является линейной операцией из U в V .

5) Операция $P'(u_0)$ имеет линейную обратную $\Gamma_0 = [P'(u_0)]^{-1}$, отображающую пространство V на пространство U .

Пространства U, V , удовлетворяющие поставленным требованиям, будем называть *соответствующими*. Для такой пары пространств возможно применение теоремы 6 (1. XVIII), если только начальное приближение u_0 выбрано достаточно удачно. В самом деле, условия 3) и 4) обеспечивают равномерную ограниченность $\|P''(u)\|$, так как, например, для слагаемого вида $F \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t^2}$ имеем на основании (36) и (37)

$$\left\| F \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \leq \|F\|_V^V \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|_V^V \left\| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \leq M \cdot M_1 \left\| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\|_V \|x\|_U \|y\|_U.$$

Ниже будет указано несколько конкретных пар соответствующих пространств. Однако лишь в первом, простейшем, случае мы остановимся на проверке условий 1)–5).

Рассмотрим уравнение *)

$$P(u) \equiv \pi(u) + R(u) \equiv \Delta u + \frac{\partial}{\partial s}(pH) + \frac{\partial}{\partial t}(qH) = \varphi$$

$$(\pi(u) = \Delta u, R(u) = \frac{\partial}{\partial s}(pH) + \frac{\partial}{\partial t}(qH)) \quad (38)$$

*) Уравнением такого типа будет, например, уравнение минимальной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Такого же типа уравнения встречаются в задаче пластического кручения.

и будем решать для него задачу Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (39)$$

на границе квадрата $Q = [0, \pi; 0, \pi]$.

Относительно функции H будем предполагать, что она непрерывна вместе с нужными производными и ограничена.

С помощью формулы Грина легко убедиться, что если u удовлетворяет граничному условию, то

$$\iint_Q [P(u)] ds dt = 0; \quad (40)$$

поэтому функцию φ следует подчинить условию $\iint_Q \varphi ds dt = 0$.

В связи с уравнением (38) рассмотрим пару пространств

$$U = \overset{\circ}{W}_2^{(3)}, \quad V = \overset{\circ}{W}_2^{(1)},$$

где $\overset{\circ}{W}_2^{(3)}$ состоит из функций $u \in W_2^{(3)}$, удовлетворяющих граничному условию (39) и условию

$$\iint_Q u(s, t) ds dt = 0. \quad (41)$$

Пространство $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$ образовано из функций $v \in W_2^{(1)}$, удовлетворяющих условию

$$\iint_Q v(s, t) ds dt = 0. \quad (42)$$

В качестве норм в указанных пространствах примем

$$\|u\| = \left[\iint_Q \sum_{\alpha+\beta=3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^\alpha \partial t^\beta} \right)^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\| = \left[\iint_Q \left(\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right) ds dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (u \in U, v \in V).$$

Проверим, что пара U, V удовлетворяет условиям 1) — 5) (за Ω принимается сфера достаточно большого радиуса).

В силу теорем вложения вторые производные функции $u \in U$ суммируемы с любой степенью; поэтому в частности,

$$\left[\iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right]^{\frac{1}{4}} \leq M_2 \|u\| \quad (43)$$

и аналогично для других производных второго порядка. Сама же функция u и ее первые производные p и q ограничены.

Рассмотрим характерное слагаемое выражения $\|P(u)\|$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_Q \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(H \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_Q \int \left(H \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \right)^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left\{ \int_Q \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot p + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \max |H| \|u\| + \max \left| \frac{\partial H}{\partial q} \right| \left\{ \int_Q \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right)^4 ds dt \right\}^{\frac{1}{4}} \times \\ & \times \left\{ \int_Q \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right\}^{\frac{1}{4}} + \dots \end{aligned}$$

Второе слагаемое конечно в силу (43); конечность невыписанных слагаемых очевидна. Таким образом, $P(u) \in V$.

Дифференцируемость P и то, что $P'(u_0)$ имеет форму (33) проверяется на основании тех же соображений. Сначала устанавливается, что выражение (33) является слабой производной, а так как P' непрерывна, то тем самым P дифференцируема. То же самое справедливо и по отношению ко второй производной.

Рассмотрим теперь функцию F — один из коэффициентов билинейной формы $P''(u)(x, y)$. Очевидно, F есть частная производная функции H и поэтому непрерывна и ограничена. Для $v \in V$ имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_Q \int \left[\frac{\partial}{\partial s} (Fv) \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_Q \int \left[F \frac{\partial v}{\partial s} + v \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \max |F| \|v\| + \\ & + \left\{ \int_Q \int \left[v \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (44) \end{aligned}$$

На основании теорем вложения функция v суммируема с любой степенью, в частности,

$$\left\{ \int_Q \int [v(s, t)]^4 ds dt \right\}^{\frac{1}{4}} \leq M_3 \|v\|.$$

Оценим на основании этого один из членов второго слагаемого в (44). Например,

$$\left\{ \int_Q \int \left[v \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right]^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant \max \left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| \left\{ \int_Q \int v^4 ds dt \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_Q \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^4 ds dt \right\}^{\frac{1}{4}} \leqslant M_4 \|v\|.$$

Из сказанного ясно, что рассматриваемый оператор есть линейная операция из $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}$, причем выполнено (36). Вторая часть условия 3) следует из ограниченности функции $u \in \mathbf{U}$ и ее производных p и q .

Выполнение условия 4) очевидно.

Перейдем к условию 5). Имея в виду использовать соображения из XVIII. 2.6, достаточно доказать, что оператор Лапласа, рассматриваемый как операция из $\mathbf{U}$ в $\mathbf{V}$, имеет линейный обратный. Рассмотрим для этого уравнение

$$\Delta u = v \quad (v \in \mathbf{V}). \quad (45)$$

Изложим правую часть — функцию v — в ряд по косинусам

$$v(s, t) = \sum_{k, m=0}^{\infty} a_{km} \cos ks \cos mt.$$

Вследствие (42) $a_{00} = 0$. Тогда, как легко видеть, единственное решение уравнения (45), удовлетворяющее граничному условию (39), дается рядом

$$u(s, t) = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{a_{km}}{k^2 + m^2} \cos ks \cos mt.$$

Проверим, что $u \in \mathbf{U}$. Действительно, поскольку производные функции v суммируемы с квадратом, имеем

$$\sum_{k, m=0}^{\infty} (k^2 + m^2) a_{km}^2 = M_4 \int_Q \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt = M_4 \|v\|^2.$$

Но тогда очевидна сходимость в среднем рядов, определяющих третьи производные функции u , например,

$$\frac{\partial^3 u(s, t)}{\partial s^2 \partial t} = \sum_{k, m=0}^{\infty} \frac{k^2 m}{k^2 + m^2} a_{km} \cos ks \cos mt.$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_Q \int \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^2 \partial t} \right)^2 ds dt &= M_6 \sum_{k, m=-\infty}^{\infty} \frac{k^4 m^2}{(k^2 + m^2)^2} a_{km}^2 \leq \\ &\leq M_6 \sum_{k, m=0}^{\infty} k^2 a_{km}^2 \leq M_7 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $u \in U$ и $\|u\| \leq M_8 \|v\|$; существование операции Δ^{-1} доказано.

Таким образом, в данном случае применимы теоремы о сходимости метода Ньютона. Отметим, в частности, что если вместо уравнения (38) рассмотреть уравнение с параметром

$$\Delta u + \mu \left[\frac{\partial}{\partial s} (pH) + \frac{\partial}{\partial t} (qH) \right] = \varphi,$$

то, поскольку при $\mu = 0$ решение существует, на основании теоремы 6 (2. XVIII) его можно гарантировать и для всех достаточно малых μ .

Заметим, что применение схемы теоремы 6 (2. XVIII) здесь приводит к решению уравнения Пуассона на каждом шагу процесса.

В заключение, уже не входя в подробности, укажем еще на две пары соответствующих пространств. Так, если решается задача Дирихле, то можно принять $U = \overset{\circ}{W}_p^{(2)}$, $V = L^p$. Проверка условий 1)–4) здесь не представляет особого труда. Этого, однако, нельзя сказать по поводу условия 5), которое проверяется весьма сложно.

Наконец, в качестве U можно принять пространство $\text{Lip}^{(2)}\alpha$, состоящее из всех непрерывно-дифференцируемых функций, вторые производные которых удовлетворяют условию Липшица с показателем α . За V в этом случае следует взять пространство $\text{Lip } \alpha$. Как и в предыдущем случае основное затруднение здесь составляет проверка условия 5), для которой нужно использовать тонкие теоремы теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Другие применения метода Ньютона кроме упоминавшихся выше работ рассмотрены в [806], [128], [135], [139].

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И ОСНОВНАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. Введение в общую теорию функций и множеств. Гостехиздат. 1948.

Ахизер Н. И. и Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Гостехиздат. 1950.

Банах (Banach S.). I. Théorie des opérations linéaires. Warszawa. 1932.
II. Курс функционального анализа. Київ. 1948.

Биркгоф Г. Теория структур. ИЛ. 1952.

Бурбаки (Bourbaki N.). Éléments de mathématique. I. t. II. Topologie générale. Paris. Hermann. 1940.

II. t. V. Espaces vectoriels topologiques. Paris. Hermann. 1953, 1955.

Вайнберг М. М. Нелинейные интегральные уравнения. Гостехиздат. 1956.

Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. Физматгиз. 1958.

Гавурин М. К. Аналитические методы исследования функциональных преобразований. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1950, 19, 59—154.

Гельфанд И. М. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. Матем. сб., 1938, 4, 235—286.

Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е. I. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз. 1958.

II. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз. 1958.

III. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз. 1958.

Гильберт (Hilbert D.). Grundzuge einer allgemeine Theorie der Integralgleichungen. Leipzig. 1912.

Дьёдонне (Dieudonné J.). Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 495—512.

Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ. 1939.

Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, 1948, 3, № 6 (28).

Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. Гостехиздат. 1950.

Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 4-е. Гостехиздат. 1952.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Вып. 1. Изд-во МГУ. 1954.

Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат. 1956.

Крейн М. Г. и Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН, 1948, 3, № 1 (23).

Кук (Cooke R. G.). Linear operators. Macmillan. 1953.

Люстерник Л. А. 1. Основные понятия функционального анализа. УМН, 1936, 1.

II. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление. Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, 1947, 19.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат. 1951.

Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат. 1952.

Наймарк М. А. I. Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат. 1954.

II. Нормированные кольца. Гостехиздат. 1956.

Натансон И. П. I. Конструктивная теория функций. Гостехиздат. 1951.

II. Теория функций вещественной переменной, изд. II, перераб. Гостехиздат. 1957.

Нейман (Neuman J. von). Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin. 1932.

Немыцкий В. В. Метод неподвижной точки в анализе. УМН, 1936, 1.

Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. Гостехиздат.

Плесснер А. И. Спектральная теория линейных операторов I. УМН, 1941, 9.

Плесснер А. И. и Рохлин В. А. Спектральная теория линейных операторов II. УМН, 1946, 1 (11).

Радон И. О линейных функциональных преобразованиях. УМН, 1936, 1.

Рисс Ф. (Riesz F.). I. Leçons sur les systèmes d'équations à une infinité inconnues. Paris. 1913.

II. О линейных функциональных уравнениях. УМН, 1936, 1.

III. Линейные операторы в комплексном гильбертовом пространстве. УМН, 1941, 9.

IV. О функциях от эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве. УМН, 1941, 9.

V. О некоторых основных понятиях общей теории линейных функционалов. УМН, 1946, 1, № 2 (12).

Рисс Ф. и Сёкафальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. ИЛ. 1954.

Сакс С. Теория интеграла. ИЛ. 1949.

Сирвинт Ю. Ф. Выпуклые множества и линейные функционалы в абстрактных пространствах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, 143—170 и 189—211.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V. Изд. II. Физматгиз 1959.

Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд.-во ЛГУ. 1950.

Стоун (Stone M. H.) Linear transformations in Hilbert space. New York. 1932.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III. Гостехиздат.

Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. (Пойа). Неравенства ИЛ. 1948.

Хаусдорф Ф. Теория множеств. ОНТИ. 1937.

Хеллингер и Тёплиц (Hellinger E., Toeplitz O.). Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II 3, H. 9. 1927.

Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ. 1951.

Шварц (Schwartz L.). Théorie des distributions, t. I—II, Paris. 1950—1951.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар (Hadamard J.). *Leçons sur la calcul de variation*. Paris, 1913.
2. Акилов Г. П. (а) О распространении линейных операций. Докл. АН СССР, 1947, 57, № 7, 643—646. (б) Необходимые условия распространности линейных операций. Докл. АН СССР, 1948, 59, № 3, 417—418. (в) О применении одного метода решения нелинейных функциональных уравнений к исследованию систем дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1949, 68, № 4, 645.
3. Акилов Г. П. и Вершик А. М. О взаимно непрерывном распространении линейных операций. Вестник Ленингр. ун-та, 1958, 7, № 2, 27—33.
4. Асколи (Ascoli G.). *Le curve limite di una varieta data di curve*. R. Acc. dei Lincei Mem., 1883, 18 (3), 521—586.
5. Аренс (Arens R. F.). *Duality in linear spaces*. Duke Math. Jour., 1947, 14, 787—794.
6. Арцела (Arzelá C.). *Sulle funzioni di linee*. Mem. della R. Acc. Sci. dell' Ist. di Bologna, 1893, (5), 5, 225—244.
7. Бабич В. М. К вопросу о распространении функций. УМН, 1953, 8, № 2, 111—113.
8. Балугев А. Н. К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина. Докл. АН СССР, 1952, 83, № 6, 781—784.
9. Банах (Banach S.). (а) *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*. Fund. Math., 1922, 3, 133—181. (б) *Sur le probleme de la mesure*. Fund. Math., 1923, 4, 7—33. (в) *Sur les fonctionelles linéaires II*. Studia Math., 1929, 1, 223—240.
10. Банах и Штейнхаус (Banach S., Steinhaus H.). *Sur le principe de la condensation des singularites*. Fund. Math. 1927, 9, 51—57.
11. Берман Д. Л. Об одном классе линейных операций. Докл. АН СССР, 1952, 85, № 1, 13—16.
12. Биркхоф и Келлог (Birkhoff G., Kellog A.). *Invariant points in function space*. Trans. Amer. Math. Soc., 1922, 23, 96—115.
13. Бирман М. Ш. (а) Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска. УМН, 1950, 5, № 3, 152—155. (б) О вычислении собственных чисел

методом наискорейшего спуска. Зап. Ленинград. горного ин-та, 1952, 27 № 1, 209—216.

14. Боненблуст и Собчик (Bonenblust, Sobczyk A.). Extensions of functionals on complex linear spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1938, 44, 91—93.

15. Бохнер (Bochner S.). Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. Fund. Math., 1933, 20, 262—276.

16. Брауэр (Brouwer L. E. F.). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann., 1911, 71, 97—115.

17. Бурбаки Н. О некоторых векторных топологических пространствах. Математика, 1958, 2, № 2 (первоначально, 1951).

18. Бэр (Baire-R.). Sur les fonctions des variables reelles. Ann. di Math., 1899, (3), 3, 1—123.

19. Вайнберг М. М. Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. УМН, 1952, 7, № 4, 55—102.

20. Варга (Warga J.) On a class of iterative procedures for solving normal systems of ordinary differential equations. Jour. Math. and Phys., 1953, 31, № 4, 223—243.

Вершик А. М. (см. [3]).

21. Вегаузен (Wehausen J. V.). Transformations in linear topological spaces. Duke Math. Jour., 1938, 4, 157—169.

22. Виландт (Wielandt H.). Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. VI — Numerical Analysis. N. Y. — Toronto — London. 1956, 261 — 282.

23. Виссер (Visser). Note on linear operators. Akad. Wetensch. Amst. Proc., 1937, 40, 270—272.

24. Вишик М. И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. общ., 1952, 1, 187—246.

25. Вольтерра (Volterra V.). Leçons sur les equations aux dérivées partielles. Stokholm — Upsala. 1906. Paris. 1918.

26. Воробьев Ю. В. (а) Операторные ортогональные многочлены и приближенные методы определения спектра линейных ограниченных операторов. УМН, 1954, 9, № 1, 83—90. (б) Применение операторных ортогональных многочленов к решению неоднородных линейных уравнений. УМН. 1955, 10, № 1, 89—96.

Вулих Б. З. (см. [46]).

27. Гавурин М. К. (а) Über die Stiltjessche Integration abstrakten Funktionen. Fund. Math., 1936, 27, 254—268. (б) О k -кратно линейных операциях в пространствах Вапач'а. Докл. АН СССР, 1939, 22, № 4, 547—551. (в) Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов. УМН, 1950, 5, № 3 (37), 156—157. (г) Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. Докл. АН СССР,

1954, **96**, № 6, 1093—1095. (д) Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. высш. уч. завед., 1958, **5** (6).

28. Г а т о (Gateaux R.). (а) Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques. Comptes Rendus, 1913, **157**, 325—327. (б) Fonctions d'une infinité des variables indépendantes. Bull. Soc. Math. Fr., 1919, **47**, 70—96. (в) Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques. Bull. Soc. Math. Fr., 1922, **50**, 1—21.

29. Г е л ь ф а н д И. М. Sur le lemme de la théorie des espaces linéaires. Зап. матем. т-ва, 1936, (4), **13**, 35—40.

30. Г и л ь д е б р а н д т (Hildebrandt T. H.). Über vollstetige lineare Transformationen. Acta Math., 1928, **51**, 311—318.

31. Г о л ь д с т а й н (Goldstine H. H.). Weakly complete Banach spaces. Duke Math. Jour., 1938, **4**, 125—131.

32. Г р а м м (Gramm J.). Über die Entwicklung reeler Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Jour. f. reine u. angew. Math., 1883, **94**, 41—73.

33. Г р о т е н д и к А. О пространствах (F) и (DF). Математика, 1958, **2**, № 3 (первоначально — 1954).

34. Г р э й в с (Graves R. E.). Riemann integration and Tay'or's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 163—177.

35. Г у с е в а О. В. О краевых задачах для сильно эллиптических систем. Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 6, 1069—1072.

36. Г ю н т е р Н. М. (а) Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. I. Изд.-во. АН СССР. Ленинград. 1932. (б) Теория потенциала. Гостехиздат. 1952.

37. Д а н ф о р д (Dunford N.). Uniformity in linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 305—356.

38. Д а у г о в е т И. К. Применение общей теории приближенных методов к исследованию сходимости метода Галеркина для некоторых граничных задач математической физики. Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 6, 897—899.

39. Д ж е й м с (James R.). A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space: Proc. Nat. Ac. USA, 1951, **37**, № 3, 174—177.

Д ж о н с (см. [110]).

Д у н к а н (см. [111]).

40. Д ь ё д о н н е (Dieudonne J.). La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. École Norm. Sup., (3), 1942, **59**, 107—139.

41. Д ь ё д о н н е Ж. и Ш в а р ц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF). Математика, 1958, **2**, № 2 (первоначально — 1950).

42. Д э й (Day M. M.). (а) The space L^p with $0 < p < 1$. Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 816—843. (б) Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1941, **47**, 313—317.

43. Жордан и Нейман (Jordan P., Neuman J. von). On inner products in linear metric spaces. *Ann. of Math.*, 1935, 36, № 3, 719—723.

44. Какутани (Kakutani Sh.). (a) Some characterizations of euclidean space. *Jap. Jour. Math.*, 1939, 16, № 2, 93—98. (б) A proof of Schauder's theorem. *Jour. Math. Soc. Jap.*, 1951, 3, 228—231.

45. Канторович Л. В. (см. также [108]). (а) Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных. Докл. АН СССР, 1934, 4, № 8—9, 532—536. (б) О функциональных уравнениях. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1937, 3 (17), 24—50. (в) Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. Докл. АН СССР, 1945, 48, № 7, 483—487. (г) Об интегральных операторах УМН, 1956, 11, № 2, 3—29. (д) Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона, Вестник Ленингр. ун-та, 1957, 2, № 7, 68—103.

46. Канторович Л. В. и Вулих Б. З. Sur la representation des operations linéaires. *Compositio Math.*, 1937, 5, 119—165.

47. Карпиловская Э. Б. О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений. УМН, 1953, 8, № 3 (55), 111—118.

48. Карри (Curry H. B.). The method of steepest descent for nonlinear minimization problems. *Quart. Appl. Math.*, 1944, 2, 258—261.

49. Каруш (Karuch W.). (a) Determination of the extreme values of the spectrum of a bounded self-adjoint operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1951, 2, № 6, 980—989. (б) Convergence of a method of solving linear problems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, 3, № 6, 839—851.

50. Каччопполи (Caccioppoli R.). Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti. *Acc. Naz. Lincei*, 1931, 6, № 13, 498—502.

51. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, 309—330.

52. Келли (Kelley J.). Banach spaces with the extension property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, 72, № 2, 323—326.

Келлог (см. [12]).

53. Кёте (Köthe G.). Ein axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume von Typus ω . *Math. Ann.*, 1949, 120, 634—699.

54. Килл (Kill). Invariant metrics in groups (solutions of a problem of Banach). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, 3, № 3, 484—487.

55. Клаксон (Clarkson J. A.). Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1936, 40, 396—414.

56. Кнастер (Knaster B.). *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 1927, 6, 133.

Коллар (см. [11]).

57. Колмогоров А. Н. (a) Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1931, 1, 60—63. (б) Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. *Studia Math.*, 1934, 5, 29—33.

58. Кондрашов В. И. О некоторых свойствах функций из пространств L_p^* . Докл. АН СССР, 1945, 48, № 8, 563—566.

59. Костарчук В. Н. Об одном методе решения систем линейных уравнений и отыскания собственных векторов матриц. Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 531—534.

60. Коши (Cauchy A.). Oeuvres compl., II (4), 273.

61. Кравчук М. Ф. Применение метода моментов для решения линейных дифференциальных уравнений. Сообщ. АН УССР, 1932, 1, 1—168.

62. Красносельский М. А. (а) Об одном принципе неподвижной точки для вполне непрерывных операторов в функциональных пространствах. Докл. АН СССР, 1950, 73, № 1. (б) Некоторые задачи нелинейного анализа. УМН, 1954, 9, № 3, 57—114. (в) Два замечания о методе последовательных приближений. УМН, 1955, 10, № 1, 123—127.

63. Красносельский М. А. и Крейн С. Г. Итерационный процесс с минимальными невязками. Матем. сб., 1952, 31, 315—334.

64. Красносельский М. А. и Рутницкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, 1958.

65. Крейн М. Г. и Мильман Д. П. On extreme points of regular convex sets. Studia Math., 1940, 9, № 1, 133—138.

66. Крейн М. Г. и Шмультян В. Л. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. Ann. of Math., 1940, 41, № 3, 556—583.

Крейн С. Г. (см. [63]).

67. Крылов Н. М. Les methods de solution approchée des problèmes de la physique mathématique. Paris. G. — V. 1931.

68. Ладыженская О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типа. Докл. АН СССР, 1954, 97, № 3, 395—398.

69. Лакс (Lax P.). On the existence of Green's function. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, № 4, 526—531.

70. Левин С. Integralgleichungen und Funktionalräume. Матем. сб., 1932, 39, № 4, 3—72.

71. Лерэ Ж. и Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. УМН, 1946, 1, № 3—4, 71—95.

72. Лозинский С. М. (а) Пространства $\tilde{C}_\omega$ и $\tilde{C}_\omega^*$ и сходимость интерполяционных процессов в них. Докл. АН СССР, 1948, 59, № 8, 1389—1392. (б) Обратные функции, неявные функции и решения уравнений. Вестник Ленингр. ун-та, 1957, 2, № 7, 131—142.

73. Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхности. УМН, 1947, 2, № 1 (17), 166—217.

74. Мазур (Mazur S.). Über convex Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math., 1933, 4, 70—85.

75. Макаров Б. М. Об индуктивном пределе последовательности нормированных пространств. Докл. АН СССР, 1958.

76. Макки (Mackey G.). (a) On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 155—207. (б) On convex topological linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **60**, 519—537.

77. Маринеску (Marinescu G.), The method of approximate equations in quasi-normed linear spaces. Acad. Rep. pop. Romane Bul. Sti. A, 1949, **57**, № 1, 965—972.

78. Мильман Д. П. (см. также [65]). (a) О некоторых признаках регулярности пространств типа (В). Докл. АН СССР, 1938, **20**, № 4, 243—246. (б) Об одном свойстве регулярных пространств. Докл. АН СССР, 1939, **22**, № 7, 394—398.

79. Михлин С. Г. (a) О сходимости метода Галеркина. Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 2, 197—199. (б) Вариационные методы решения задач математической физики. УМН, 1950, **5**, № 6, 3—51.

80. Мысовских И. П. (a) О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применения. Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 4, 565—568. (б) О граничной задаче для уравнения $\Delta u = k(x, y)u^2$, Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 6, 995—998.

81. Натансон И. П. Некоторые нелокальные теоремы о сингулярных интегралах. Докл. АН СССР, 1938, **19**, № 5, 357—360.

82. Нахбин (Nachbin L.). A theorem of the Hahn — Banach type for linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, № 1, 28—46.

83. Нейман (Neuman J. von). Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann., 1929, **102**, 49—131.

84. Немыцкий В. В. (a) Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des equations intégrales non-linéaires. Матем. сб., 1934, **41**, № 3, 421—452. (б) Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб., 1934, **41**, № 4, 655—658.

85. Николаев В. Ф. К вопросу о приближении непрерывных функций полиномами, Докл. АН СССР, 1948, **61**, № 2, 201—204.

86. Никольский С. М. (a) Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, **7**, № 3, 147—163. (б) Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, **38**, 244—278.

87. Орлич (Orlicz W.). (a) Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. l'Acad. Polonaise, 1932, 207—220. (б) Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen. Studia Math., 1935, **5**, 127—140.

88. Островский (Ostrowski A.). Comment. Math. Helv., 1937, **9**, 97.

89. Петтис (Pettis B. J.). (a) A note on regular Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, № 6, 420—428. (б) Differentiation in Banach spaces. Duke Math. Jour., 1939, **5**, 249—256.

90. Пойа (Полиа) (Polya G.). Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. Math. Zeitschr., 1933, 37, № 2, 264—286.

91. Польский Н. И. О сходимости некоторых приближенных методов анализа. Укр. матем. журн., 1955, 7, № 1, 56—70.

92. Птак (Ptak V.). О полных топологических линейных пространствах. Чехосл. матем. журн., 1953, 3, № 4, 301—364.

93. Радон (Radon I.). Theorie und Anwendungen der absolutadditiven Mengenfunktionen. Sitzungsbericht Akad. Wiss. Wien, 1913, 122, Abt. IIa, 1295—1438.

94. Райков Д. А. Индуктивные и проективные пределы с вполне непрерывными отображениями. Докл. АН СССР, 1957, 113, № 5, 984—986.

95. Реллих (Rellich F.). Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen, Math. Ann., 1934, 110, 342—356.

96. Рисс М. (Riesz M.). Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. Acta Sci. Math. Szeged, 1933, 6, 136—142.

97. Рисс Ф. (Riesz F.). (a) Sur les ensembles des fonctions. Comptes Rendus, 1906, 143, 738—741. (б) Sur les opérations fonctionnelles lineaires. Comptes Rendus, 1909, 149, 974—977. (в) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann., 1910, 69, 449—497. (г) Su alcune disuguaglianze. Bull. dell. Un. Math. Ital., 1928, 7, № 2, 77—79.

Рутицкий Я. Б. (см. [64]).

98. Салехов Г. С. и Мертвецова М. А., О сходимости некоторых итерационных процессов. Изв. Каз. филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1954, 5, 77—108.

99. Себаштьян - и - Силва Х. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Математика, 1957, 1, № 1, 60—70. (Первоначально — 1955.)

Скэн (см. [110]).

100. Смит (Smith R. C. T.). The approximate solution of equations in infinitely many unknowns. Quart. Jour. Math. Oxf., 1947, 18, № 69, 25—52.

101. Соболев С. Л. (a) Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. Матем. сб., 1937, 2, 467—500. (б) Об одной теореме функционального анализа. Матем. сб., 1938, 4, 471—497.

102. Стин (Stein M. L.). (a) Sufficient conditions for the convergence of Newton's method in complex Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, № 6, 858—863. (б) Gradient methods in the solution of systems of linear equations. Jour. Res. Nat. Bur. Stand., 1952, 48, 407—413. (в) On methods for obtaining solutions of fixed end-point problems in the calculus of variations. Jour. Res. Nat. Bur. Stand., 1953, 50, № 5, 277—297.

103. Сухомлинов Г. А. О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве. Матем. сб., 1938, 3, № 2, 353—357.

104. Темплъ (Temple G.). The general theory of relaxation method applied to linear systems. Proc. Royal Soc. London, (A), 1939, **169**, 476—500.
105. Тёплиц (Toeplitz O.) (см. также [117]). Über allgemeine lineare Mittelbildung. Prace Mathem.-Fiz., 1911, **22**, 113—119.
106. Троицкая Е. Приложения общей теории приближенных методов анализа к оценкам для собственных чисел. Докл. АН СССР, 1956.
107. Тулайков А. Н. Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, **1**, № 39, 167—170.
108. Фихтенгольц Г. М. и Канторович Л. В. Sur les opérations lineaires dans l'espace des fonctions bornées. Studia Math., 1935, **5**, 69—98.
109. Фреше (Fréchet M.). (a) Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Math. di Palermo, 1906, **22**, 1—74. (б) Sur les ensembles des fonctions et les opérations lineaires. Comptes Rendus, 1907, **144**, 1414—1416. (в) Sur les fonctionnelles continues. Ann. Ec. Norm., 1910, **27**, № 3, 193—216.
110. Фрэзер, Джонс, Скэн (Frazer, Jones, Skan). Approximations to functions and to the solutions of differential equations. Aeron. Res. Comm. Rep., 1937, № 1799, 1—33.
111. Фрэзер, Коллар, Дункан. Теория матриц. ИЛ. 1950.
112. Хайерс (Hyers D. H.). Linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, **51**, № 1, 1—21.
113. Хан (Hahn H.). Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen Jour. r. u. angew. Math., 1927, **157**, 214.
114. Харрик И. Ю. (a) О приближении функций, обращающихся в нуль на границе области, функциями особого вида. Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 353—384. (б) Об одном аналоге неравенства Маркова. Докл. АН СССР. 1956, **106**, № 2, 203—206.
115. Хаусдорф (Hausdorff F.). (a) Momentprobleme für eine endliches Intervall. Math. Zeitschr., 1923, **16**, 220—248. (б) Zur Theorie der linearen metrischen Räume, Jour. f. Math., 1932, **167**, 294—311.
116. Хелли (Helly E.). Über lineare Funktionaloperationen. Wiener Berichte, 1912, **121**, 265—297.
117. Хеллингер и Тёплиц (Hellinger E., Toeplitz O.). Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann., 1910, **69**, 289—330.
118. Хестенс (Hestenes M. R.). The conjugate-gradient method for solving linear systems. Proc. of Symposia in Appl. Math. Vol. VI — Numerical Analysis. 1956, 83—102.
119. Цаанен (Zaanen A. C.). (a) On a certain class of Banach spaces. Ann. of Math., 1946, **47**, № 4, 634—665. (б) On linear functional equations. Nieuw. Arch. v. Wisskunde, 1948, IIs, **22**, № 2, 269—288.
120. Цах Л. Метод наискорейшего спуска для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. наук ЛГУ. Ленинград, 1955.

121. Шаудер (Schauder J.). (а) Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Zeitschr., 1927, 26, № 1, 47—65. (б) Über lineare-vollstetige Operationen. Studia Math., 1930, 2, 183—196. (в) Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann., 1932, 106, 611—721. (г) Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen. Fund. Math., 1935, 24, 213—246.

Шварц (см. [41]).

122. Шмидт (Schmidt E.). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil I: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann., 1907, 63, 443—476.

123. Шмультян В. Л. (см. также [66]). (а) О регулярно замкнутых и слабо компактных множествах в пространствах типа (В). Докл. АН СССР, 1933, 18, № 7, 403—405. (б) О принципе вкладов в пространстве типа (В). Матем. сб., 5, № 2, 317—328. (в) О некоторых геометрических свойствах единичной сферы пространства типа (В). Матем. сб., 1939, 6, № 1, 77—94. (г) О линейных топологических пространствах. Матем. сб., 1940, 7, 425—448. (д) О компактных и слабо компактных множествах в пространствах типа (В). Матем. сб., 1943, 12, № 1, 91—98.

Шнирельман Л. Г. (см. [73]).

124. Штейнхаус (Steinhaus H.). (см. также [10]). Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr., 1919, 5, 186—221.

125. Шур (Schur J.). Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlich Reihen. Jour. f. Math., 1921, 151, 79—111.

126. Юд (Yood B.). Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation. Duke-Math. Jour., 1951, 18, № 3, 559—612.

127. Эброхи И. А. Некоторые типы линейных соответствий пространств Банаха. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1949, 16, 54—119.

128. Бакельман И. Я. Оценки деформаций регулярных выпуклых поверхностей в зависимости от изменений их внутренней метрики. Докл. АН СССР, 1956, 107, № 3, 358—361.

129. Вертгейм Б. А. О некоторых методах приближенного решения нелинейных функциональных уравнений в пространствах Банаха. УМН, 1957, 12, № 1, 166—169.

130. Владимиров В. С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц. Изв. АН СССР, сер. Матем., 1957, 21, № 5, 681—710.

131. Иванов В. В. О применении метода моментов и «смешанного» метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 945—948.

132. Каззик Ю. Я. О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративным методом. УМН, 1957, 12, № 1, 195—199.

133. Ка а з и к Ю. Я. и Т а м м е Э. Э. Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений. Докл. АН СССР, 1955, 101, № 6, 981—984.

134. К а л а н д и я А. И. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости. Матем. сб., 1957, 42, 249—272.

135. К о л а т ц (Colatz L.) Einige Anwendungen funktionalanalytischen Methoden in der praktischen Analysis (zusammenfassender Bericht). Zeitschr. angew. Math. Phys., 1953, 4, № 5, 327—357.

136. К о ш е л е в А. И. (а) Метод Ньютона и обобщенные решения нелинейных уравнений эллиптического типа. Докл. АН СССР, 1953, 91, № 6, 1263—1266. (б) Существование обобщенного решения упруго-пластической задачи кручения. Докл. АН СССР, 1954, 99, № 3, 357—360.

137. М и р а к о в В. Е. О принципе мажорант для метода Чебышева. УМН, 1956, 11, № 3, 171—174.

138. Н е ч е п у р е н к о М. И. О методе Чебышева для функциональных уравнений. УМН, 1954, 9, 163—170.

139. Н и к о л а е в а Г. А. О приближенном построении конформного отображения методом сопряженных тригонометрических рядов. Докл. АН СССР, 1956, 110, № 2.

140. П у г а ч е в Б. П. Об одном способе одновременного вычисления двух границ спектра. Тр. семинара по функц. анализу, Воронеж, в. 5, 52—70.

141. С а м о к и ш Б. А. (а) Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска. УМН, 1957, 12, № 1, 238—240. (б) Метод наискорейшего спуска в задаче о собственных значениях полуограниченных операторов. Изв. высш. уч. завед., 1958, 5(6), 105—114.

142. С о ф р о н о в И. Д. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1956, 111, № 1, 37—39.

143. Ф е н ь о (Fenyő J.) Ueber die Lösung der im Banachschen Raume definierten nichtlinearen Gleichungen. Acta math. Acad. Sci. Hung., 1954, № 1—2, 85—93.

144. Ф и л и п п о в А. Ф. О корректности и сходимости разностных уравнений. УМН, 1957, 12, № 1, 245.

145. Ч ж а о - Ф а н - с ю н. Метод градиента для решения систем уравнений. Шусюэ сюэбао, 1953, 3, № 4, 328—342.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно выпуклое множество** 417
— непрерывная функция 76, 227
Аддитивное семейство 212
Алгебра множеств 212
Алгебраическая сумма множеств 52
Алгебраический базис 51, 361
Альтернатива Фредгольма 448
Аналитическая операция 645
Антиградиент 542
Асимптотическая устойчивость 617
- Базис окрестностей** 35
— фильтра 44
Барицентрические координаты 568
Билинейная операция 599
Борнологическое пространство 376
***B*-пространство** 55
- Векторная функция** 78
Векторное пространство 51
Вещественная операция 445
— часть элемента 448
Вещественное ядро пространства 448
Вещественный элемент 448
Внутренняя точка 17, 35
Вполне непрерывная операция 276
— ограниченное множество 390
Вторая производная операции 598
— — — слабая 604
Выпуклая оболочка 52
Выпуклое замыкание 55
— множество 51
Вычет 33
- Гильбертово пространство** 81
Гиперплоскость 135
Гомеоморфизм 38, 262
Гомеоморфные пространства 34
Гомоморфизм 423
— естественный 359, 421
Границы оператора 288
Грань симплекса 567
- Двойственное пространство** 378
Дифференциал Гато 589
Дифференцируемая операция 589
 ϵ -сеть 27
- Замкнутая операция** 427
Замкнутое множество 17, 34
Замыкание 17, 36
— операции 124
Звездная область 338
- Измеримая функция** 215
Изометрия 18
Изоморфизм 50
Инволюция 448
Индуктивный предел 402
— — регулярный 406
Индукцированная топология 34
Интеграл Гюнтера — Стильеса 207
— Лебега — Стильеса 215
— Радона 215
— Стильеса 199
Интегральное уравнение Вольтерра 481
— представление оператора 309
Интерполяционный метод 521
Инфра-тоннельное пространство 385
- Квадратурная формула интерполяционная** 237
— — типа Гаусса 237
Квази-полное пространство 363
— окрестность 382
— тоннельное пространство 385
Кольцо 152
Компактная операция 276
Компактное в себе множество 43
— множество 26, 44
— пространство 26, 41
Комплексное расширение операции 450
Конечномерная операция 464

Корень квадратный из оператора 176
 Коэффициенты Фурье 91
 Кратность характеристического значения 454

Линеаризация 48
 Линейная изометрия 58
 — оболочка 50
 — операция 97, 374
 Линейное замыкание 55
 — метрическое пространство 360
 — множество вещественное 47
 — — комплексное 49
 — топологическое пространство 355
 Линейно независимая система 50
 — независимые элементы 50
 Линейный функционал 366
 LN^* -пространство 412
 Локально-аналитическая функция 417
 — выпуклое пространство 367

Мажорантная мультинорма 369
 Мажорантное уравнение 624
 Метод Галеркина 500
 — коллокации 521
 — моментов 518, 526
 — Ньютона 623
 — редукции 508
 — совпадения 521
 Метризуемое топологическое пространство 34
 Метрика 12
 Метрическое пространство 11
 Мнимая часть элемента 448
 Множество второй категории 32
 — первой категории 32
 Мультинорма 368

Направление 39
 Неопределенный интеграл 228
 Неособенное значение 454
 Неподвижная точка 563
 Непрерывная операция 96
 Непрерывное отображение 37
 Неравенство Бернштейна — Ладыженской 486
 — треугольника 12
 Нигде не плотное множество 32
 Норма билинейной операции 599
 — линейной операции 99
 — элемента 53
 Нормированное кольцо 152
 — пространство 53

Нулевое множество 429, 431

Обобщенная последовательность 40
 — производная 77, 228, 347
 — сумма ряда 245
 — функция 373, 409
 Образ множества 37, 96
 — элемента
 Обратимая операция 155
 Обратная операция 155
 — — двусторонняя 158
 — — левая 157
 — — правая 157
 Ограниченная операция 98, 374
 Ограниченное множество 362
 Ограниченно-полное пространство 363
 Ограниченный функционал 366
 Окрестность 17, 35
 Оператор 96
 Операторная функция 296
 Операторный полином 174, 295
 Операция 96
 — аддитивная 96
 — вложения 336
 — однородная 96
 — сжатия 563
 —, область значений 96
 —, — определения 96
 —, распространение 122
 Опорная плоскость 135
 Орт 184
 Ортогонализация 86
 Ортогональная система 85
 — сумма 181, 183
 Ортогональное дополнение 83, 182
 Ортогональность 83
 Ортогональные полиномы 89
 — проекторы 179
 Ортонормальная система 85
 — — замкнутая 93
 Отделимое пространство 38
 Открытое множество 17, 34
 Относительно полное множество 391
 Отображение 37
 —, непрерывное в точке 37

Перманентный метод суммирования 246
 Плоскость 135
 Плотное множество 23
 Повторные ядра 170
 Поглощающее множество 356
 Подпространство 18, 35, 57, 355
 Подразделение симплекса 568
 Покрывание 42

- Полиномы Лагерра 90
 — Лежандра 89
 — Чебышёва 90
 — Эрмита 90
 — Якоби 90
 Полная вариация 74, 213
 — система элементов 55
 Полное пространство 19, 363
 Положительный оператор 173
 Полунепрерывный функционал 233
 Полунорма 365
 Полуполное пространство 363
 Полурефлексивное пространство 389
 Поляра 379
 Пополнение 21, 364
 Последовательность операторов, сходимость 173
 Почти равномерно непрерывная функция 332
 Предел Банаха 144
 — обобщенной последовательности 40
 Предельная точка 17, 36
 Приближенное уравнение 488
 Проблема моментов 208
 — — степенная 209
 Проективный предел 398
 Проектор 120
 Проекция 85
 Произведение операций 151
 Производная Гато 589
 — обобщенной функции 374
 — операции 589
 — — порядка n 598
 — Фреше 589
 — функционала 542
 Производящая система окрестностей 367
 Прообраз множества 37
 — элемента 37
 Пространства аналитических функций 418
 — конкретные: C 13, C^n 13, S 14, s 15, M_T 25, m 67, c 67, l^p 68, L^p 70, $\tilde{M}$ 73, V 75, V_0 168, $\tilde{C}$ 237, $W_p^{(1)}$ 349, $W_p^{(l)}$ 350, s_T 360, C_∞ 360, $D_{[a,b]}^\circ$ 360, D_K° 361, L_∞ 361, s_T^* 361, C_n^α 610, D_n^α 610
 Пространство Макки 394
 — со скалярным произведением 78
 — счетнонормируемое 362
 — типа B 55
 — — F 384
 — — $\mathfrak{M}$ 125
 Прямое произведение 38, 613
 Радиус сферы 17
 Разложение единицы 310
 Размерность 51
 Размерность множества 574
 — симплекса 567
 Ранг характеристического значения 454
 Расстояние 12
 Регулярное значение 453
 — пространство 39
 Регулярно ограниченное множество 406
 Резольвента 458, 480
 Рефлексивное пространство 149, 389
 Ряд Неймана 169
 Ряд Фурье 91
 Самосопряженный оператор 118
 Сепарабельность 24
 Сильная производная 589
 — топология 381
 Симплекс 567
 Симплициальные координаты 568
 Слабая вторая производная 604
 — компактность 249
 — производная 589
 — сепарабельность 250
 — сходимость 247, 254
 — топология 375, 378
 Слабое линейное замыкание 430
 Слабо аналитическая функция 644
 — ограниченное множество 370
 Собственное значение 286, 454
 — подпространство 286, 454
 Собственный элемент 286, 454
 Сопряженная операция 279, 405
 Сопряженное пространство 146, 381
 — уравнение 429
 Сопряженный оператор 118
 — элемент 449
 Спектр 297, 454
 Спектральная функция 302
 Средняя функция 268
 Сфера 17
 — замкнутая 17
 — открытая 16
 Сферическая окрестность 17
 Сходимость 12, 39
 — в себе 18, 363
 — операторов 173
 Сцепленная система 125
 Счетно-нормируемое пространство 368
 — — полное пространство 363
 Тело 572
 Тоннельное пространство 382

- Топологическая эквивалентность 262, 358
 Топологическое пространство 34
 Топология 34
 — индуцированная 34
 — Макки 393
 —, сравнение 34
 Точно-ограниченная система 382
 Точка накопления 36
 — прикосновения 36
 — сгущения 36
- Ультрафильтр 45
 Унитарное пространство 79
 Уравнение замкнутости 93
 Уравновешенное множество 356
 Усреднение по Стеклову 268
 Устойчивость 618
- Фактор-пространство 359, 421
 Фильтр 44
 —, сравнение 44
 —, сходимость 45
 Формула конечных приращений 592
 — пространство 384
 Фундаментальная система окрестностей 35
 Фундаментальное множество 137
 Функционал 96
 — положительно-однородный 140
 — полуаддитивный 140
 Функция Дирака 374
 Функция множества аддитивная 213
 — — — ограниченной 213
 — — — ограниченной вариации 213
 — — —, отрицательная вариация 214
 — — — —, полная вариация 213
- Функция множества аддитивная ограниченная, положительная вариация 214
 — ограниченной вариации 74
 — пафаллепипеда 206
 — аддитивная 206
 — —, полная вариация 206
 — Хевисайда 374
- Характеристический элемент 294, 454
 Характеристическое значение 294, 454
 — множество 453
 — подпространство 454
 Хаусдорфово пространство 38
- Центр симплекса 568
 — сферы 17
 Центрированная система множеств 42
- Частично упорядоченное множество 39
 Частная производная 613
- Эквивалентные базисы 36
 — нормы 426
 Эквинепрерывная система 382
 Эквинепрерывное множество 381
 Экстремальное множество 41
 Элементарное расширение 126
- Ядро типа потенциала 334
 — уравнения 439
 — усреднения 268

